

ΑΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Αναλυτική μελέτη της μεθοδολογίας επίλυσης υπερστατικών φορέων  
στο επίπεδο»

ΟΝ/ΜΟ: ΕΥΘΥΜΙΑ ΒΟΓΚΛΗ

Α.Μ.: 40240

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Δρ. Κωνσταντίνος Ι. Γιαννακόπουλος

ΑΘΗΝΑ, 2016



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Δρ. Κωνσταντίνο Ι. Γιαννακόπουλο, επιβλέποντα καθηγητή, για την ανάθεση της εργασίας καθώς και για το ενδιαφέρον και την υπομονή που επέδειξε για την διεκπεραίωση της εργασίας αυτής.

Επίσης, θα ήταν παράλειψη μου να μην εκφράσω τις ευχαριστίες μου και σε όλους τους καθηγητές της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ανώτατου εκπαιδευτικού ιδρύματος Πειραιά Τεχνολογικού τομέα για τις γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσαν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή της, την υποστήριξή της και για την υπομονή που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι αναλυτική μελέτη των μεθόδων επίλυσης υπερστατικών φορέων στο επίπεδο. Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Μηχανικής ώστε να υπάρχει ένα καλό υπόβαθρο γνώσεων. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο επεξηγούνται οι όροι της ισοστατικότητας και της υπερστατικότητας. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται οι κλασικές μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων, η μέθοδος των Δυνάμεων και η μέθοδος των Μετακινήσεων καθώς και η αρχή των Δυνατών έργων. Επίσης, αναλύονται και κάποιες από τις ειδικές μεθόδους επίλυσης των υπερστατικών φορέων όπως τα θεωρήματα του Castigliano, η μέθοδος Γωνιών Στροφής, η μέθοδος Cross, η μέθοδος Kani και η μέθοδος Clayperon.

## ABSTRACT

The purpose of this graduation thesis is a detailed study on solving methods of statically indeterminate structures. Initially, in the first chapter is being presented the basic concept of mechanics that constitute a good knowledge base. Then, in the second chapter are being explained the term of structural redundancy. Finally, in the third charter are being analyzed the classic solving methods of indeterminate structures such as displacement method. Also are being analyzed some of the specific solving methods of indeterminate structures such as the theorems of Castigliano, the Cross method, the Kani method and Clayperon method.

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

- Δ.Ε.Σ. = Διάγραμμα ελεύθερου σώματος  
Ε.Σ.Ι. = Εξισώσεις στατικής ισορροπίας  
Β.Σ.Α. = βαθμός στατικής αοριστίας  
Α.Δ.Ε. = Αρχή δυνατών έργων  
Μ.Δ. = Μέθοδος Δυνάμεων  
Σ.Κ.Σ. = Στατικό κύριο σύστημα  
Α.Σ.Δ.Ε. = Αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων  
Μ.Μ. = Μέθοδος Μετακινήσεων  
Γ.Κ.Σ. = Γεωμετρικό κύριο σύστημα  
Β.Κ.Α. = βαθμός κινηματικής αοριστίας  
Μ.Γ.Σ. = Μέθοδος Γωνιών Στροφής  
Μ.Ε.Μ. = Μέθοδος Επικόμβιων Μετατοπίσεων  
Μ.Κ.Ρ. = Μέθοδος των μετατοπίσεων με κατανομή των ροπών  
Θ.Ρ.Π. = Θεμελιώδης Ροπή Πάκτωσης

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα	Σελ.	Βιβλιογραφία	Σχήμα	Σελ.	Βιβλιογραφία
1.1	14	Π.Α. Βουθούνης	3.14	68	Ι. Ε. Αβραμίδα
1.2	16	Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής	3.15	69	Στατική ανάλυση κατασκευών ΙΙ Π. Ρουσής
1.3	16		3.16	69	
1.4	17		3.17	70	
2.1	19		3.18	70	
2.2	19		3.19	73	Ι. Ε. Αβραμίδα
2.3	20	Στατική ανάλυση κατασκευών ΙΙ Π. Ρουσής	3.20	74	
2.4	20		3.21	75	
2.5	20		3.22	76	Ασκήσεις μεθόδου μετακινήσεων Ι. Ε. Αβραμίδα Κωνσταντίνος Μορφίδης
2.6	21	Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής	3.23	76	
2.7	23-24		3.24	77	
2.8	25	Στατική ανάλυση κατασκευών ΙΙ Π. Ρουσής	3.25	78	
2.9	28		3.26	80	
2.10	29	Π.Α. Βουθούνης	3.27	80	
2.11	30		3.28	81	
3.1	35	Ε. Μυστακίδης	3.29	81	
3.2	40	Βασικές αρχές μελέτης των κατασκευών	3.30	82	
3.3	43	Υπενθυμίσεις Μηχανικής Παραμορφώσιμων στερεών	3.31	83	Στατική ανάλυση κατασκευών ΙΙ Π. Ρουσής
3.4	48		3.32	83	
3.5	56	Εγχειρίδιο αρχών και Μεθόδων στη Στατική	3.33	84	
3.6	60	Ι. Ε. Αβραμίδα	3.34	86	
3.7	61		3.35	86	
3.8	62		3.36	87	
3.9	63		3.37	88	
3.10	64		3.38	91	
3.11	65		3.39	91	Στατική ΙΙ Αναστασία Σωτηροπούλου
3.12	65		3.40	92	
3.13	66				

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

A	Εμβαδόν επιφάνειας	t	χρόνος
c	Ύψος διατομής /2	u	Μετατόπιση, επιμήκυνση
Cm	Φορτικός συντελεστής	u <sub>m</sub>	Βύθιση
C ή G	Αριθμός εσωτερικών ελευθεριών	U	Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης
E	Μέτρο ελαστικότητας	U'	Πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης
F ή P	Δύναμη, δράση	U*	Συμπληρωματική ενέργεια
G	Μέτρο διάτμησης	Ū	Δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης
H <sub>A</sub> ή A <sub>x</sub>	Οριζόντια αντίδραση	V <sub>A</sub> ή A <sub>y</sub>	Κατακόρυφη αντίδραση
I	Ροπή αδράνειας	V	Όγκος
J	Πολική ροπή αδράνειας	W	Έργο δύναμης
K <sub>11</sub>	Συντελεστής στιβαρότητας	W <sub>m</sub>	Ελαστικό φορτίο
K <sub>10</sub>	Συντελεστής φόρτισης	W <sub>E</sub>	Εξωτερικό έργο
l	Μήκος	W <sub>I</sub>	Εσωτερικό έργο
M <sub>A</sub>	Ροπή πάκτωσης	W*	Συμπληρωματικό έργο
M	Ροπή	Ū	Εξωτερικό δυνατό έργο
M(x)	Ροπή κάμψης	x	απόσταση
m	Αριθμός κόμβων	α	Συντελεστής θερμικής διαστολής
N	Αριθμός των ΕΣΙ	δ	Μετατόπιση, μετακίνηση
N(x)	Αξονική δύναμη	δn	Συνιστώσα μετακίνησης
$\bar{N}$	Εσωτερικές δυνάμεις	Δl	Παραμορφώσεις
Q(x)	Τέμνουσα δύναμη	Δl <sub>κατ</sub>	Κατασκευαστική ατέλεια
R	Συνισταμένη δύναμη	Δs	Μεταβολή μήκους
R ή r	Αριθμός αντιδράσεων	ΔT	Μεταβολή θερμοκρασίας
s	Μήκος (αρχικό)	ε	Παραμόρφωση
S	Επιφάνεια	θ	Γωνία (περιστροφής)
S <sub>σ</sub> ή S <sub>u</sub>	Τμήμα επιφάνειας	σ	Τάση
T	Ροπή στρέψης		

## Πίνακας περιεχομένων

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	11
1.1	Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής.....	11
1.2	Εξωτερικά φορτία.....	12
1.3	Φορέας.....	12
1.4	Στηρίξεις.....	14
1.5	Δύναμη .....	14
1.6	Ροπή.....	15
1.7	Συνιστάμενη- Συνιστώσες.....	15
1.8	Έργο εξωτερικών δυνάμεων.....	17
2	Ισοστατικοί και Υπερστατικοί φορείς.....	19
2.1	Υπολογισμός αντιδράσεων.....	19
2.2	Στερεότητα .....	24
2.3	Στατική Αοριστία Φορέων .....	25
2.4	Σύνθετοι φορείς.....	26
2.5	Εντατικά μεγέθη $N(x)$ , $Q(x)$ , $M(x)$ .....	28
3	Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων .....	32
3.1	Εισαγωγή.....	32
3.2	Τάσεις.....	32
3.3	Παραμορφώσεις και δυνατές μετακινήσεις.....	33
3.4	Ελαστική γραμμή .....	35
3.5	Γεωμετρικοί και ενεργειακοί μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων .....	36
3.6	Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο) .....	37
3.7	Θεωρήματα Castigliano.....	37
3.8	Αρχή των δυνατών έργων.....	43
3.8.1	Αναλυτική απόδειξη της αρχής των δυνατών έργων.....	46
3.8.2	Η αρχή των Δυνατών Έργων για τα Δικτύωματα .....	49
3.8.3	Η αρχή των Δυνατών Έργων για τις δοκούς και τα πλαίσια.....	51
3.8.4	Παράδειγμα εφαρμογής της ΑΔΕ.....	55
3.9	Μέθοδος των Δυνάμεων.....	56
3.9.1	Στατικό κύριο σύστημα.....	58
3.9.2	Βήματα επίλυσης με την μέθοδο των δυνάμεων.....	60
3.9.3	Παράδειγμα επίλυσης φορέα της μεθόδου των Δυνάμεων .....	68
3.9.4	Θεώρημα Betti –Maxwell.....	70



3.10	Μέθοδος των Μετακινήσεων .....	70
3.10.1	Βήματα επίλυσης με τη μέθοδο των μετακινήσεων .....	72
3.10.2	Παράδειγμα επίλυσης φορέα με τη μέθοδο των μετακινήσεων .....	75
3.10.3	Μέθοδος Γωνιών Στροφής .....	81
3.10.4	Μέθοδος Επικόμβιων Μετατοπίσεων .....	83
3.10.5	Μέθοδος των Μετατοπίσεων με Κατανομή των Ροπών (MKP ή Cross).....	88
3.11	Άλλες ειδικές μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων .....	89
3.11.1	Μέθοδος του Kani .....	89
3.11.2	Η εξίσωση των τριών ροπών ή Clayperon .....	89
3.11.3	Σύγχρονες μέθοδοι επίλυσης .....	92
4	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	94



# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής

Η Μηχανική είναι η εφαρμοσμένη φυσική επιστήμη που ασχολείται με τη συμπεριφορά των φυσικών σωμάτων τα οποία βρίσκονται σε ηρεμία ή κίνηση όταν αυτά αλληλεπιδρούν με δυνάμεις μεταξύ τους. Ανάλογα με την φυσική κατάσταση των σωμάτων που εξετάζει διακρίνεται σε:

- 1 . Μηχανική των στερεών
- 2 . Μηχανική των υγρών και
- 3 . Μηχανική των αερίων

Η Μηχανική των στερεών ασχολείται με την ισορροπία , την κατάσταση και την κίνηση των φορέων, δηλαδή των σωμάτων που φορτίζονται. Πιο αναλυτικά χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: τη Στατική και τη Δυναμική.

- i. Η Στατική εξετάζει τις συνθήκες ισορροπίας των σωμάτων, τα οποία θεωρούνται απαραμόρφωτα, παρά την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων σε αυτά, διατηρούν το αρχικό τους σχήμα και διαστάσεις, δηλαδή δεν παραμορφώνονται. Αντιθέτως, η Αντοχή των υλικών (προέκταση της Στατικής) μελετά τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους φορείς που καταπονούνται, την κατανομή των τάσεων στα στερεά, τις παραμορφώσεις καθώς και τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.
- ii. Η Δυναμική μελετά τη κίνηση των σωμάτων καθώς επίσης και τις δυνάμεις που σχετίζονται με τα κινούμενα σώματα. Η Δυναμική χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: την Κινηματική και την Κινητική. Η Κινηματική μελετά την κίνηση των σωμάτων χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις που την προκαλούν εν αντιθέσει με την Κινητική.

Οι βασικότερες αρχές της Μηχανικής είναι οι εξής:

- I. Αρχή της αδράνειας  
«Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση της ηρεμίας του ή συνεχίζει κινούμενο ευθυγράμμως και ισοταχώς, εφόσον όλες οι δυνάμεις που δρουν επάνω σε αυτό ισορροπούν».
- II. Αρχή της δράσης- αντίδρασης  
«Όταν ένα σώμα A ασκεί σε ένα σώμα B μια δύναμη  $P_A$  (δράση) τότε και το σώμα B ασκεί επάνω στο σώμα A μια δύναμη  $P_B$  (αντίδραση), η οποία έχει το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση αλλά είναι αντίθετης φοράς της  $P_A$ ».
- III. Αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης  
«Το αποτέλεσμα (αντίδραση, τάση) το προερχόμενο από δύο ή περισσότερες δυνάμεις που επενεργούν ταυτόχρονα σε ένα σώμα, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των αποτελεσμάτων που θα προήρχετο, αν κάθε δύναμη δρούσε ξεχωριστά στο σώμα».

#### IV. Αρχή του Saint Venant

«Τα στατικά ισοδύναμα συστήματα, επιφέρουν ίδιες τάσεις και παραμορφώσεις σε ικανοποιητική απόσταση από την περιοχή εφαρμογής τους».

### 1.2 Εξωτερικά φορτία

Τα εξωτερικά φορτία (δυνάμεις ή ροπές) που ασκούνται σε ένα σώμα ή μια κατασκευή διακρίνονται σε:

- i. **Ημιστατικά φορτία:** ορίζονται εκείνα που αυξάνονται ομαλά, δηλ. διατηρούν σταθερή τιμή για ένα χρονικό διάστημα και στη συνέχεια μειώνονται ομοίως ομαλά.
- ii. **Κρουστικά φορτία:** ορίζονται εκείνα που δρουν απότομα με όλη τους την ένταση σε ένα σώμα.
- iii. **Πάγια ή μόνιμα φορτία:** ορίζονται εκείνα που καταπονούν μονίμως μια κατασκευή όπως για παράδειγμα το ίδιο το βάρος μιας κατασκευής.
- iv. **Εναλλασσόμενα φορτία:** ορίζονται εκείνα που μεταβάλλονται ομαλά με την πάροδο του χρόνου.

Επίσης, όσον αφορά τον τρόπο δράσης τα εξωτερικά φορτία διακρίνονται σε:

- **Συγκεντρωτικά φορτία ή συγκεντρωμένες δυνάμεις:** ασκούνται σε σχετικά μικρή περιοχή του σώματος, που πρακτικά θεωρείται σημείο, για αυτό και καλούνται και σημειακά φορτία.
- **Κατανεμημένα φορτία:** ασκούνται σε μια ορισμένη περιοχή του σώματος είτε α) ομοιόμορφα, όπου χαρακτηρίζεται από σταθερή ένταση σε όλο το μήκος δράσης, β) τριγωνικά ή γραμμικά μεταβαλλόμενο, με γραμμική μεταβολή της έντασης, γ) παραβολικό ή δ) τραπεζοειδές.
- **Κατανεμημένα επιφανειακά φορτία:** είναι κατανεμημένα σε όλο τον όγκο του σώματος (χαρακτηρίζονται και ως χωρικά κατανεμημένα) όπως το ίδιο βάρος των σωμάτων.

### 1.3 Φορέας

Φορέας θεωρείται ένα σώμα ή μια κατασκευή που δέχεται εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν υπό την επίδραση φορτίων. Κάθε πλήρης φορέας αποτελείται από τον ελεύθερο φορέα και τη στήριξη.

- Ελεύθερος φορέας θεωρείται το τμήμα της κατασκευής όπου επιδρούν τα εξωτερικά φορτία

- Στήριξη είναι το τμήμα διαμέσου του οποίου τα εξωτερικά φορτία καταλήγουν στο έδαφος.

Σύμφωνα με τα μορφολογικά στοιχεία του κάθε ελεύθερου φορέα διακρίνονται σε επτά κατηγορίες:

1. Η Ράβδος: ένα σώμα το μήκος του οποίου είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις του και έχει ένα ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας. Έτσι η ράβδος καταπονείται μόνο από εφελκυστικές ή θλιπτικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονά της.
2. Η Δοκός: ένα σώμα το μήκος του οποίου είναι αισθητά μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις του και έχει ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας. Η δοκός καταπονείται από αξονικά και εγκάρσια φορτία.
3. Το Πλαίσιο: ένα σώμα ή κατασκευή που αποτελείται από άθροισμα δοκών που είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους σε κλειστό περίγραμμα.
4. Το Τόξο: Έτσι χαρακτηρίζεται μια δοκός με καμπύλο άξονα.
5. Ο Δίσκος: ένα επίπεδο σώμα, ανεξαρτήτως γεωμετρικού σχήματος, το πάχος του οποίου είναι πολύ μικρό συγκριτικά με τις υπόλοιπες διαστάσεις του. Ο δίσκος μπορεί να καταπονείται από εφελκυστικές ή θλιπτικές δυνάμεις που ασκούνται στο επίπεδό του.
6. Η Πλάκα: ένα επίπεδο σώμα το πάχος του οποίου είναι αισθητά πολύ μικρό από τις υπόλοιπες διαστάσεις του. Σε αντίθεση με το δίσκο, η πλάκα μπορεί να δεχθεί και εγκάρσια φορτία στο επίπεδό της.
7. Το Κέλυφος: ένα σώμα το πάχος του οποίου είναι μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις και η μέση επιφάνειά του δεν είναι επίπεδη αλλά καμπύλη.

Ανάλογα με την μορφή τους χωρίζονται σε:

- ❖ **Χωρικούς** δηλαδή σώματα 3 διαστάσεων που δέχονται τυχαίες δυνάμεις στο χώρο.
- ❖ **Επιφανειακούς** δηλαδή κατασκευές με μικρό πάχος και απλώνονται σε επιφάνεια η οποία καλείται ως μέση. Αναλόγως τη μορφή της μέσης επιφάνειας χωρίζονται σε *κελυφωτούς*, όπου η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και δέχεται τυχαίες δυνάμεις και σε *επίπεδους* που είναι σώματα με σταθερό ή μεταβλητό πάντα μικρού πάχους και αναπτύσσονται σε επίπεδη επιφάνεια όπως για παράδειγμα οι δίσκοι και οι πλάκες, η διαφορά των οποίων είναι στα εξωτερικά φορτία που δέχονται (κάθετα ή οριζόντια).
- ❖ **Γραμμικούς** δηλαδή σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής με άξονα ανάλογα τη μορφή του οποίου χωρίζονται σε *ευθύγραμμους* όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή, σε *τοξωτούς* όταν ο άξονας είναι καμπύλο τόξο, σε *πλαισιωτούς* όταν ο άξονας είναι τεθλασμένη γραμμή και σε *σύνθετους* όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή (μία ή περισσότερες από τις παραπάνω κατηγορίες).

## 1.4 Στηρίξεις

Οι συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές που ασκούνται στη στήριξη ή στηρίξεις του ελεύθερου φορέα και είναι ικανές να εξισορροπήσουν όλα τα φορτία ονομάζονται αντιδράσεις. Οι στηρίξεις των επίπεδων φορέων διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- 1) Κύλιση ή ελεύθερη έδραση: ονομάζεται η στήριξη που επιτρέπει στη δοκό να αποχωρισθεί κάθετα προς την διεύθυνση της κύλισης. Δηλαδή το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να μετακινείται χωρίς τριβές με τη βοήθεια ενός εδράνου κύλισης κατά μία μόνο διεύθυνση. Η αντίδραση κύλισης είναι μια δύναμη που διέρχεται από το σημείο στήριξης και είναι κάθετη στη κύλιση (συμβολίζεται  $V_A$  ή  $A_y$ ).
- 2) Άρθρωση: ονομάζεται η στήριξη που επιτρέπει την ελεύθερη στροφή της δοκού και αποκλείει δύο ελευθερίες κίνησης (την κάθετη και την οριζόντια). Στην πράξη μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ενός πείρου. Επομένως έχουμε μια δέσμη αντιδράσεων, μια οριζόντια (συμβολίζεται  $H_A$  ή  $A_x$ ) και μια κατακόρυφη (συμβολίζεται  $V_A$  ή  $A_y$ ).
- 3) Πάκτωση: ονομάζεται η στήριξη που δεν επιτρέπει καμία μετακίνηση ή στροφή της δοκού. Οι αντιδράσεις είναι τρεις, οι δύο συνιστώσες της δύναμης ( $H_A$ ,  $V_A$ ) ή ( $A_x$ ,  $A_y$ ) και μια ροπή που αποκλείει την περιστροφή της δοκού και ονομάζεται ροπή πάκτωσης και συμβολίζεται με  $M_A$ .



Σχήμα 1.1

Τρόποι στήριξης δοκών

## 1.5 Δύναμη

Η έννοια της δύναμης είναι θεμελιώδης και ως εκ τούτου δεν υπάρχει ορισμός για την περιγραφή της. Έστω ότι έχουμε δύο σώματα, το A και το B. Όταν ένα σώμα A επιδρά σε ένα σώμα B με αποτέλεσμα να επιταχυνθεί, τότε θα θεωρούμε ότι η δράση του A πάνω στο B είναι δύναμη και ορίζεται ως η αιτία της επιτάχυνσης ή γενικά η αιτία μεταβολής της κίνησης ή της γεωμετρίας των σωμάτων. Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος οπότε για τον προσδιορισμό της χρειαζόμαστε:

1. Το μέτρο της, με μονάδα μέτρησης στο σύστημα SI το Newton (N)
2. Την ευθεία πάνω στην οποία ενεργεί, δηλαδή το φορέα της
3. Τη φορά της
4. Το σημείο εφαρμογής της

Γραφικά, η δύναμη παρίσταται με ένα διάνυσμα όπου το μήκος του διανύσματος συμβολίζει το μέτρο της δύναμης, το βέλος του διανύσματος τη φορά της και η αρχή ή το τέλος του δείχνει το σημείο εφαρμογής της δύναμης. Όταν δύο υλικά σώματα βρίσκονται σε επαφή, αναπτύσσονται μεταξύ τους δυνάμεις, με σημείο εφαρμογής το σημείο επαφής τους. Οι δυνάμεις αυτές έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες φορές και ονομάζονται δυνάμεις επαφής. Όταν δύο σώματα εφάπτονται, η επαφή τους δεν είναι σημείο αλλά μια μικρή επιφάνεια. Οι δυνάμεις επαφής ασκούνται κάθετα σε αυτή την επιφάνεια.

## 1.6 Ροπή

*Ροπή δυνάμεως ως προς το σημείο* είναι το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από το φορέα της δύναμης. *Ροπή δυνάμεως ως προς τον άξονα* είναι το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το γινόμενο της δύναμης επί την (κάθετη) απόσταση της δύναμης από τον άξονα και έχει ως φορέα τον άξονα. Στην ουσία περιγράφει την ύπαρξη ή δημιουργία ζεύγους δυνάμεων.

## 1.7 Συνιστάμενη- Συνιστώσες

Όταν ένα σώμα δέχεται πολλές δυνάμεις που ασκούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις δεν μπορεί να κινηθεί ταυτόχρονα προς όλες αυτές τις διευθύνσεις. Έτσι αυτές οι δυνάμεις συνδυάζονται σε μία δύναμη που θα προκαλέσει τα ίδια μηχανικά αποτελέσματα με αυτές. Η δύναμη αυτή ονομάζεται συνισταμένη των δυνάμεων αυτών και δείχνει το συνολικό αποτέλεσμα για μεταφορική κίνηση από την άσκηση τους. Αντίστοιχα οι δυνάμεις ονομάζονται συνιστώσες. *Σύνθεση* δύο ή περισσότερων δυνάμεων ονομάζεται ο προσδιορισμός της συνιστάμενης τους και μπορεί να γίνει είτε γραφικά είτε με αναλυτικές μεθόδους. Ανάλογα ο προσδιορισμός των συνιστωσών μιας δύναμης ονομάζεται *ανάλυση*.

Για τον υπολογισμό της συνιστάμενης συνηθέστερα χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τρόποι:

- **Μέθοδος παραλληλογράμμου:**

Έστω δύο δυνάμεις  $P_1$  και  $P_2$  που ενεργούν στο σημείο  $A$  όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.

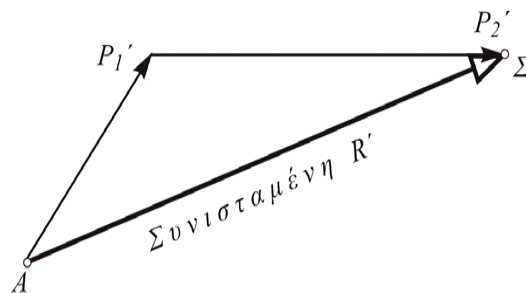


Σχήμα 1.2

Σύμφωνα με τον Stevin, η συνισταμένη αυτών των 2 δυνάμεων ισοδυναμεί με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που έχει ως πλευρές τις μη παράλληλες δυνάμεις  $P_1$  και  $P_2$ . Η αρχή αυτή είναι γνωστή ως *αρχή του παραλληλογράμμου*, μπορεί να αποδειχθεί πειραματικά και δίνεται από τη σχέση  $R = P_1 + P_2$ .

- **Δυναμοτρίγωνο ή δυναμοπολύγωνο**

Μια παρόμοια μέθοδος με αυτή του παραλληλογράμμου είναι η κατασκευή του δυναμοτρίγωνου, όταν πρόκειται για σύνθεση δύο δυνάμεων ή δυναμοπολύγωνου όταν πρόκειται για σύνθεση περισσότερων δυνάμεων. Άρα από το σχήμα 1.1 αν από το σημείο  $A$  φέρουμε την  $P_1'$  ίση και παράλληλη της  $P_1$  και από το τέλος της  $P_1'$  φέρουμε την  $P_2'$  η οποία είναι και παράλληλη της  $P_2$  σχηματίζουμε το παρακάτω δυναμοτρίγωνο.



Σχήμα 1.3

Η συνισταμένη  $R'$  προκύπτει ενώνοντας την αρχή της πρώτης δύναμης με το πέρας της τελευταίας. Στο δυναμοπολύγωνο τοποθετούμε τις δυνάμεις διαδοχικά. Η συνισταμένη  $R$  προκύπτει πάντα η ίδια ανεξάρτητα από τη σειρά που θα προσθέσουμε τις δυνάμεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για το ίδιο σύστημα δυνάμεων να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα δυναμοπολύγωνα τα οποία δίνουν την ίδια συνισταμένη. Στη περίπτωση που το πέρας της τελευταίας δύναμης συμπίπτει με την



αρχή της πρώτης τότε η συνιστάμενη δύναμη είναι μηδέν και επομένως το σύστημα δυνάμεων βρίσκεται σε ισοροπία.

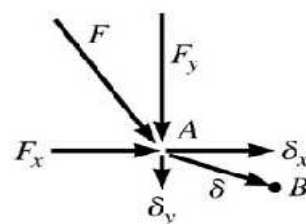
## 1.8 Έργο εξωτερικών δυνάμεων

*Έργο Δύναμης:* ορίζεται το γινόμενο της δύναμης επί τη συγγραμμική της μετατόπιση (δεδομένο ότι η δύναμη είναι σταθερή)

$$W = F \cdot \delta$$

όπου  $\delta$  είναι η συνιστώσα της μετατόπισης κατά τη διεύθυνση της δύναμης.

Όταν η δύναμη κινείται κάθετα στον άξονα εφαρμογής, το έργο ισούται με μηδέν. Αν η μετατόπιση δεν είναι συγγραμμική με τον άξονα εφαρμογής της δύναμης, το συνολικό έργο μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας το έργο που παράγει κάθε συνιστώσα της δύναμης που επιδρά κατά την διεύθυνση των συνιστωσών μετατοπίσεων  $\delta_x$  και  $\delta_y$  αντίστοιχα:



Σχήμα 1.4

$$W = F_x \delta_x + F_y \delta_y$$

Αν η δύναμη μεταβάλλεται (κατά μέτρο) όσο πραγματοποιείται η μετατόπιση, και αν η σχέση της δύναμης  $F$  και της συγγραμμικής μετατόπισης  $\delta$  είναι γνωστή, τότε το έργο μπορεί να υπολογιστεί με ολοκληρώματα. Διαιρούμε τη μετατόπιση σε μια σειρά από στοιχειώδη τμήματα απειροστού μήκους  $d\delta$ . Για κάθε στοιχειώδες τμήμα ισχύει  $dW = F d\delta$ . Αθροίζοντας όλα τα  $dW$  προκύπτει το συνολικό έργο:

$$W = \int_0^{\delta} F d\delta = \text{Εμβαδόν κάτω από την καμπύλη } F - \delta$$

*Έργο Ροπής:* Ορίζεται το γινόμενο της ροπής επί τη γωνία περιστροφής (δεδομένο ότι η ροπή είναι σταθερή)

$$W = M\theta$$

Όπου  $\theta$  είναι η γωνία περιστροφής

Αν η ροπή μεταβάλλεται κατά μέτρο όσο πραγματοποιείται η περιστροφή και αν η σχέση μεταξύ της ροπής  $M$  και της περιστροφής  $\theta$  είναι γνωστή, τότε το έργο μπορεί να υπολογιστεί με ολοκλήρωση:

$$W = \int_0^\theta M d\theta = \text{Εμβαδόν κάτω από την καμπύλη } M - \theta$$

*Γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά:* Αν το υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke , δηλαδή αν η επιβαλλομένη δύναμη ή ροπή μεταβάλλεται γραμμικά με τη μετατόπιση, καθώς αυξάνει από το μηδέν σε μια τελική τιμή F ή M, τότε το παραγόμενο έργο δίνεται από τις σχέσεις:

$$W = \frac{1}{2} F \delta \quad \text{για δύναμη}$$

$$W = \frac{1}{2} M \theta \quad \text{για ροπή}$$

Γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων

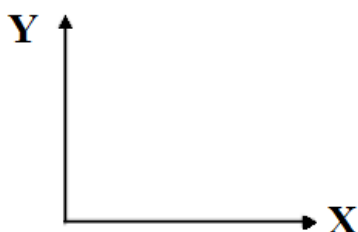
Ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρέσουμε όλα τα επιβαλλόμενα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις

## 2 Ισοστατικοί και Υπερστατικοί φορείς

### 2.1 Υπολογισμός αντιδράσεων

Για να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις μιας στήριξης αρχικά σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος (Δ.Ε.Σ.). Πιο αναλυτικά, σχεδιάζουμε όλα τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται, στις στηρίξεις σχεδιάζουμε τις αντιδράσεις τους που θέτουμε συνήθως κατά την θετική φορά. Επιπλέον αν οι εξωτερικές δυνάμεις είναι με κλίση τότε τις αναλύουμε στις συνιστώσες τους. Για να υπολογίσουμε τις άγνωστες αντιδράσεις εφαρμόζουμε τις τρεις «εξισώσεις στατικής ισορροπίας» (Ε.Σ.Ι.) στο Δ.Ε.Σ. οι οποίες είναι:

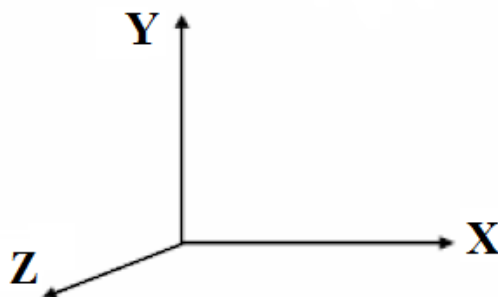
$$\Sigma F_x = 0 , \quad \Sigma F_y = 0 , \quad \Sigma M_A = 0$$



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Εξισώσεις στατικής ισορροπίας για επίπεδους φορείς

Σχήμα 2.1



$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}$$

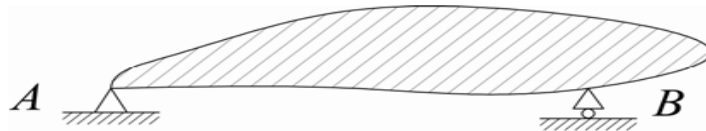
Εξισώσεις στατικής ισορροπίας για χωρικούς φορείς

Σχήμα 2.2

Όταν ένας φορέας για να προσδιορισθεί η εντατική του κατάσταση χρειάζονται μόνο οι 3 εξισώσεις στατικής ισορροπίας ονομάζεται **Ισοστατικός** (ή στατικά ορισμένος).

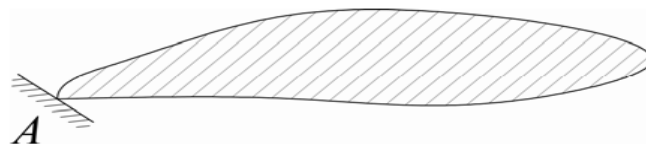
Υπάρχουν 3 τρόποι ισοστατικής στήριξης ενός σχηματισμού:

- Αμφιέριστη στήριξη



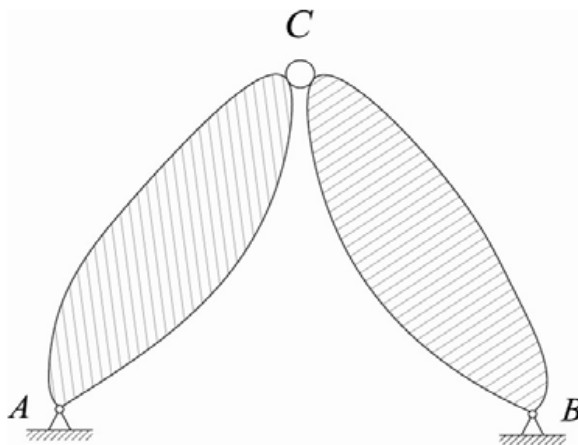
Σχήμα 2.3

- Πάκτωση



Σχήμα 2.4

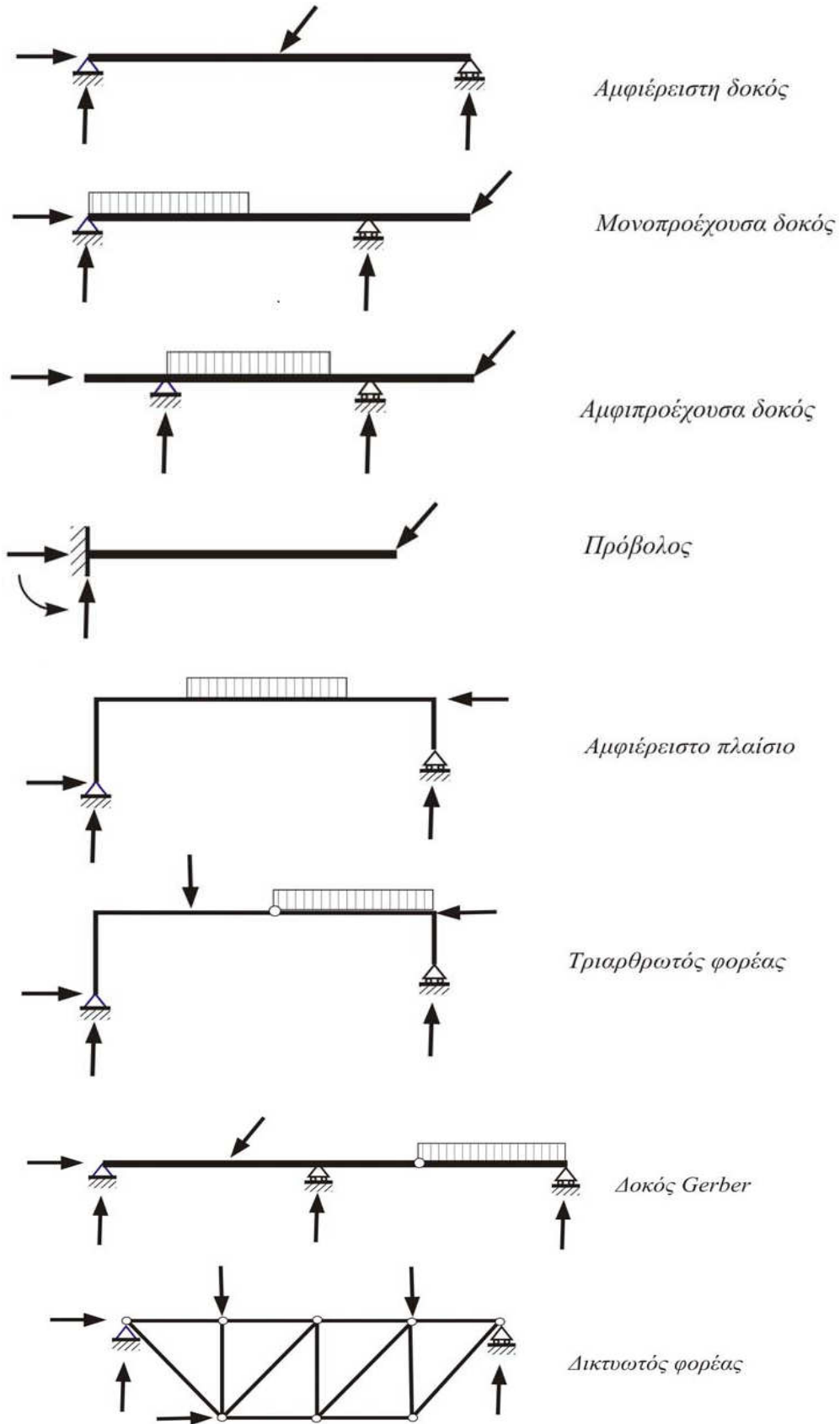
- Τριαρθρωτή στήριξη



Σχήμα 2.5

Παρακάτω απεικονίζονται μερικοί χαρακτηριστικοί τύποι ισοστατικών φορέων.

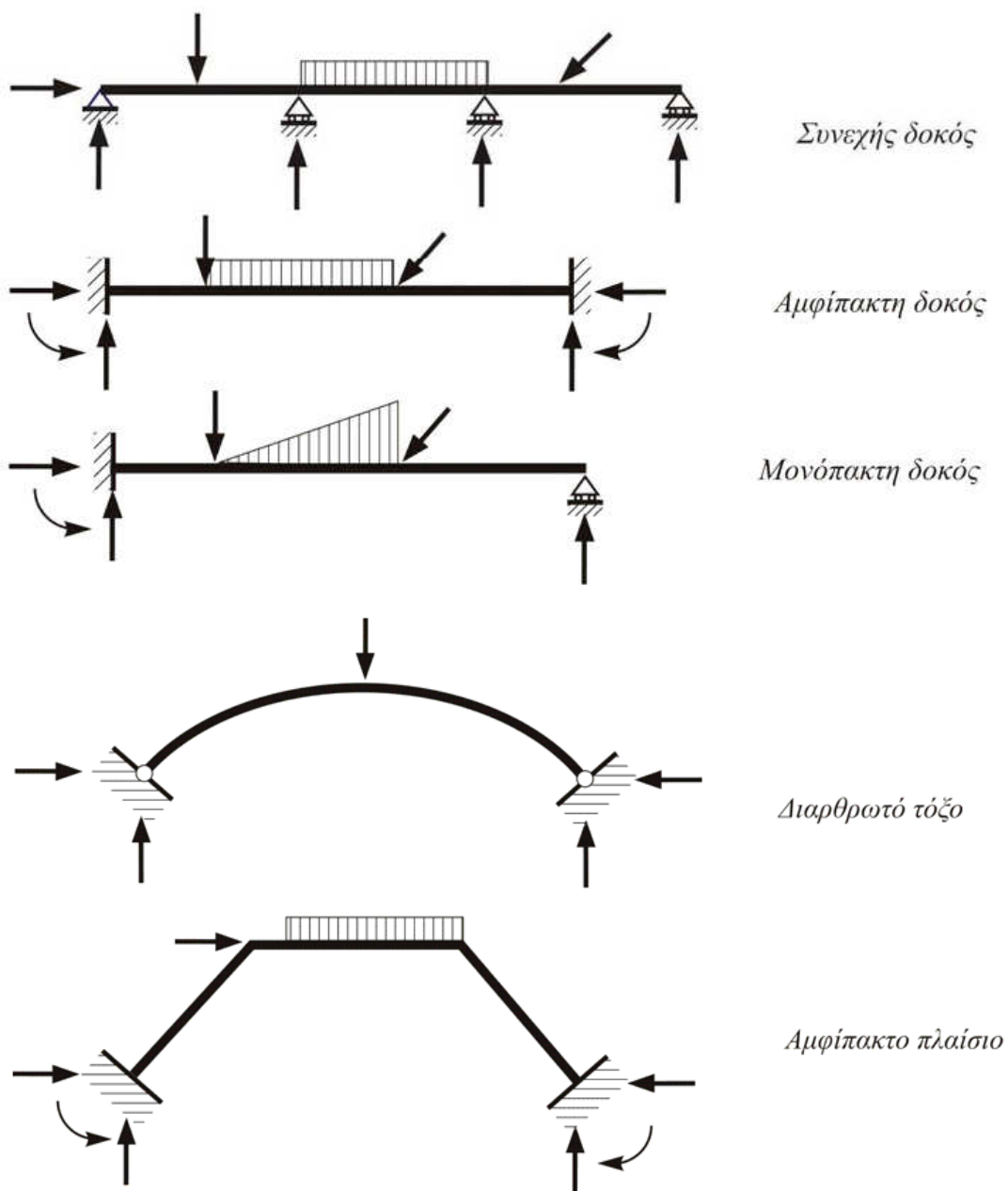
## Χαρακτηριστικοί ισοστατικοί φορείς

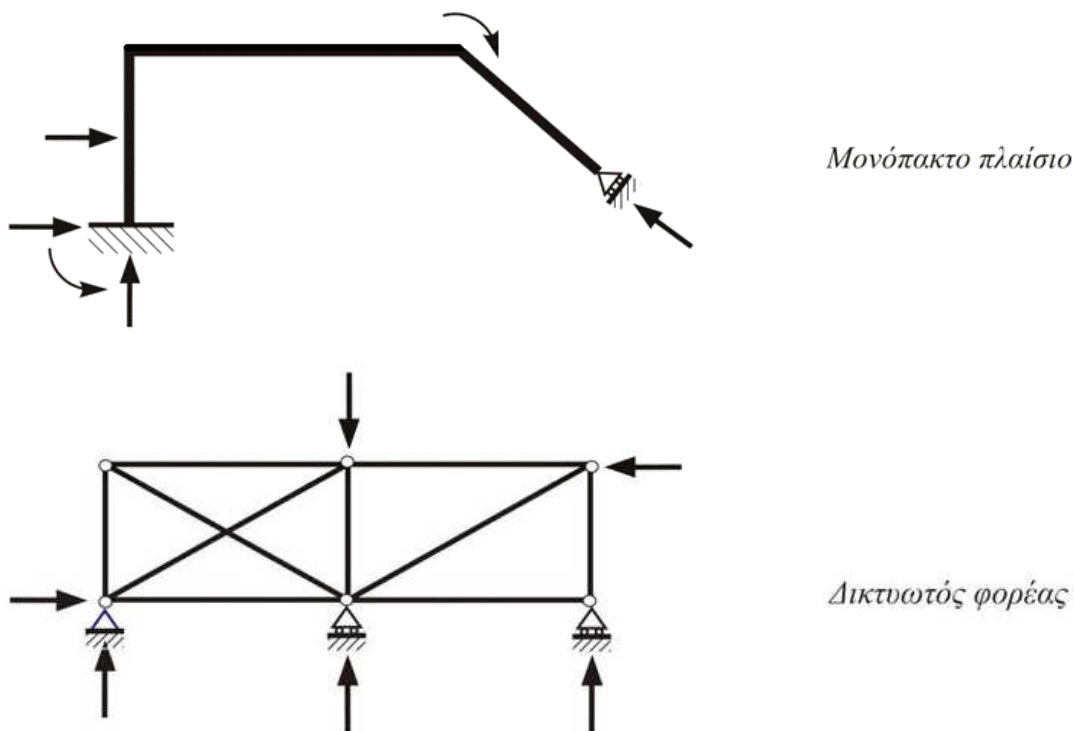


Σχήμα 2.6

**Υπερστατικός** (ή στατικά αόριστος) λέγεται ο φορέας για τον προσδιορισμό της εντατικής κατάστασης του οποίου δεν αρκούν οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας και για την ανάλυση του θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν εξισώσεις που σχετίζονται με τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα. Απαιτούνται τόσες επιπλέον εξισώσεις όσο και ο βαθμός στατικής αοριστίας. Μια υπερστατική κατασκευή είναι γενικά πιο δύσκαμπτη από μια ισοστατική και παρουσιάζει πολύ μικρότερες παραμορφώσεις και μετακινήσεις. Η υπερστατικότητα λειτουργεί σαν «ασφαλιστική δικλίδα», αφού σε περίπτωση κάποιας αστοχίας είναι δυνατή η ανακατανομή των εντατικών μεγεθών αποφεύγοντας έτσι πιθανή κατάρρευση της κατασκευής. Παρακάτω απεικονίζονται μερικοί χαρακτηριστικοί τύποι υπερστατικών φορέων.

## Χαρακτηριστικοί υπερστατικοί φορείς





Σχήμα 2.7

## 2.2 Στερεότητα

Στερεός (ή γεωμετρικά ευσταθής) ονομάζεται ο φορέας που στηρίζεται έτσι ώστε με την άσκηση κάθε πιθανού φορτίου, η κίνηση του ή τμήματος του να μην γίνεται εφικτή. Αντιθέτως, ο φορέας λέγεται μηχανισμός (ή γεωμετρικά ασταθής). Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι ένας φορέας στερεός είναι η ικανοποίηση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας για όλα τα τμήματα από τα οποία αποτελείται ο φορέας. Ο αριθμός και η σχέση των αντιδράσεων ορίζουν αν ο φορέας θα είναι στερεός ή όχι.

Αν ο αριθμός των αντιδράσεων ( $R$ ) είναι μικρότερος από τον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας ( $=3$ ) τότε ο φορέας είναι μηχανισμός. Δηλαδή

$$R < 3 \rightarrow \text{μηχανισμός}$$

Έτσι, αν πρέπει να ικανοποιούνται οι 3 εξισώσεις ισορροπίας για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, οι στηρίξεις πρέπει να επιβάλλουν τουλάχιστον 3 δεσμεύσεις για να έχουμε ένα γεωμετρικά ευσταθή φορέα. Συνεπώς, αν οι στηρίξεις διαθέτουν λιγότερες από τρεις δεσμεύσεις, τότε μία ή περισσότερες από τις εξισώσεις ισορροπίας δεν ικανοποιούνται και άρα ο φορέας δεν ισορροπεί.



Αν οι αντιδράσεις αποτελούν ένα σύστημα παράλληλων δυνάμεων ακόμα κι αν  $R \geq 3$  τότε ο φορέας θεωρείται μηχανισμός. Επίσης, ο φορέας είναι μηχανισμός όταν οι αντιδράσεις αποτελούν ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων.

### 2.3 Στατική Αοριστία Φορέων

*Βαθμός στατικής αοριστίας ή υπερστατικότητας* ονομάζεται η διαφορά των 3 εξισώσεων στατικής ισορροπίας με τον αριθμό των αγνώστων αντιδράσεων. Μπορεί να προσδιορισθεί από το άθροισμα της εξωτερικής και εσωτερικής του υπερστατικότητας.

#### ■ Εξωτερική υπερστατικότητα

Αφορά τον τρόπο στήριξης ενός φορέα και πιο συγκεκριμένα τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις του.

Όταν ο αριθμός των αντιδράσεων  $R$  ισούται με τον αριθμό των Ε.Σ.Ι. (=3) τότε ο φορέας είναι εξωτερικά ισοστατικός.

Όταν ο αριθμός των αντιδράσεων στήριξης  $R$  είναι μεγαλύτερος από τις 3 Ε.Σ.Ι. , τότε ο φορέας είναι εξωτερικά υπερστατικός. Δηλαδή αν ο αριθμός των αγνώστων αντιδράσεων υπερβαίνουν τον αριθμό των εξισώσεων τότε ο φορέας είναι εξωτερικά υπερστατικός με βαθμό στατικής αοριστίας

$$BΣΑ = R - 3$$

#### ■ Εσωτερική υπερστατικότητα

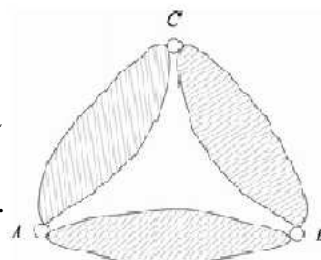
Αφορά τη μορφή του φορέα ανεξαρτήτως του τρόπου στήριξης.

Οι βασικοί τύποι εσωτερικά ισοστατικών φορέων είναι:

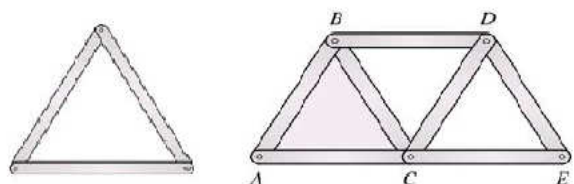
- Ανοιχτό σύστημα ραβδωτών στοιχείων που δεν σχηματίζουν κλειστές διαδρομές- βρόχους



- Τριαρθρωτή σύνδεση τμημάτων  
\* Η τριαρθρωτή σύνδεση αποδεικνύεται ότι είναι στερεός φορέας μόνο αν τα σημεία A, B & C δεν είναι συνευθειακά.



- Τριγωνική διάταξη αρθρωτών ράβδων δικτύωματος



σχήμα 2.8

Όταν ένας φορέας αποτελείται από ένα ή περισσότερα κλειστά συστήματα ραβδωτών στοιχείων μπορεί να είναι εσωτερικά υπερστατικός. Για να βρούμε την εσωτερική υπερστατικότητα του φορέα θα πρέπει να χωριστεί σε τέτοια τμήματα- τομές έτσι ώστε να μην σχηματίζουν κλειστή διαδρομή. Σύμφωνα με τον αριθμό των αγνώστων εντατικών μεγεθών που διέπουν από την υπό ανάλυση τομή και τις διαθέσιμες (επιπλέον) Ε.Σ.Ι. μπορούμε να προσδιορίσουμε την εσωτερική υπερστατικότητα του φορέα.

#### Ισοστατικότητα και βαθμοί στατικής αοριστίας απλών φορέων

Έστω ότι συμβολίζουμε με  $N$  τον αριθμό των Ε.Σ.Ι., για επίπεδους φορείς  $N = 3$  και για χωρικούς φορείς  $N = 6$ , με  $R$  τον αριθμό των αντιδράσεων και  $G$  τον αριθμό των εσωτερικών ελευθεριών τότε έχουμε:

- $R < G + N \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρός φορέας  
 $R = G + N \rightarrow$  ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
 $R > G + N \rightarrow$  υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
 ( βαθμός στατικής αοριστίας:  $R - G - N$  )

Στην περίπτωση που θέλουμε να προσδιορίσουμε την υπερστατικότητα των φορέων με βρόχους και αφού έχουμε χωρίσει τον φορέα σε  $n$  τομές για να τον απλοποιήσουμε και  $r$  οι αντιδράσεις περιλαμβανομένων των εντατικών μεγεθών σε τομές τότε θα έχουμε:

- $r < n N \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρός φορέας  
 $r = n N \rightarrow$  ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
 $r > n N \rightarrow$  υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
 ( βαθμός στατικής αοριστίας:  $r - n N$  )

#### 2.4 Σύνθετοι φορείς

Σύνθετοι φορείς ονομάζονται οι φορείς που αποτελούνται από δύο ή περισσότερους στερεούς σχηματισμούς που συνδέονται μεταξύ τους και με το έδαφος ώστε να προσδίδουν στον φορέα κάποιες εσωτερικές ελευθερώσεις. Οι σύνδεσμοι με τους οποίους συνδέονται μεταξύ τους οι σχηματισμοί λέγονται εσωτερικοί ενώ αυτοί με τους οποίους συνδέονται με το έδαφος ονομάζονται εξωτερικοί. Εσωτερική άρθρωση είναι ο εσωτερικός σύνδεσμος μεταξύ δύο σχηματισμών και αντιστοιχεί σε δύο τεμνόμενες δεσμικές ράβδους. Αντίθετα με τους απλούς φορείς, οι αντιδράσεις στήριξης των σύνθετων φορέων δεν μπορούν να υπολογιστούν μόνο από τις 3 Ε.Σ.Ι.

για ολόκληρο το φορέα και πρέπει να ληφθούν υπόψη οι πληροφορίες που δίνουν οι εσωτερικές ελευθερώσεις.

Για να επιλύσουμε ένα σύνθετο φορέα ακολουθούμε μία από τις παρακάτω ισοδύναμες μεθόδους:

- ✓ Πρώτα, καταστρώνονται οι 3 Ε.Σ.Ι. έχοντας θεωρήσει ολόκληρο το φορέα. Οι επιπλέον εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν από τις συνθήκες που επιβάλλουν οι συνδέσεις και αφορούν κάποιο ή κάποια τμήματα του φορέα αφού το έχουμε χωρίσει σε τομές.
- ✓ Αφού χωρίσουμε τον αρχικό φορέα σε επιμέρους συνιστούντα τμήματα γράφουμε τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας για κάθε στερεό σώμα.

Για να ελέγξουμε την στερεότητα σύνθετων φορέων με  $C$  εσωτερικές ελευθερώσεις, πρέπει ο αριθμός των αντιδράσεων  $R$  να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το άθροισμα των Ε.Σ.Ι. ( $= 3$ ) και του αριθμού των εξισώσεων συνθήκης  $C$ . Δηλαδή:

$$R < 3 + C \quad \longrightarrow \quad \text{μηχανισμός}$$

Για να εξετάσουμε αν ένας σύνθετος φορέας είναι στερεός γίνεται με θεώρηση του τρόπου μόρφωσης του φορέα με βάση τα συνιστούντα τμήματα του. Πιο αναλυτικά, πρώτα αναζητούμε θεμελιώδες στερεό τμήμα, που να στηρίζεται με έναν από τους 3 θεμελιώδεις τρόπους ισοστατικής στήριξης, πάνω στο οποίο θα διαρθρωθούν κατά διαδοχική σειρά τα υπόλοιπα τμήματα του φορέα. Ο σύνθετος φορέας είναι στερεός όταν και μόνο όταν κάθε ένα από τα τμήματα που το αποτελούν είναι στερεό και ισοστατικό.

#### *Στατική αοριστία σύνθετων φορέων*

Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρούμε την ολική υπερστατικότητα ενός σύνθετου φορέα:

1<sup>ος</sup> τρόπος: Θεωρούμε ολόκληρο το φορέα και καταστρώνουμε τις εξισώσεις συνθήκης. Δηλαδή τα επιμέρους τμήματα του φορέα συνδέονται έτσι ώστε να επιφέρουν  $C$  εσωτερικές ελευθερώσεις και μπορούν να γραφτούν  $C$  επιπρόσθετες εξισώσεις συνθήκης. Άρα, γράφουμε 3 Ε.Σ.Ι. για ολόκληρο το φορέα συν  $C$  εξισώσεις συνθήκης για τα συνιστούντα τμήματα.

Τα κριτήρια για την ισοστατικότητα είναι τα εξής:

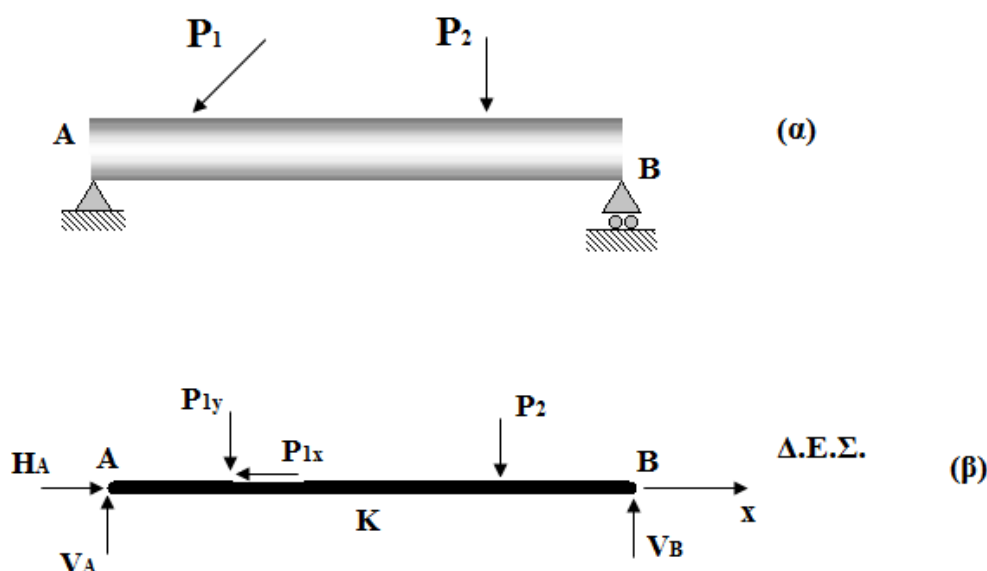
$$R = 3 + C \quad \longrightarrow \quad \text{ισοστατικός φορέας}$$

$$R > 3 + C \quad \longrightarrow \quad \text{υπερστατικός φορέας με } \text{ΒΣΑ} = R - (3 + C)$$

2<sup>ος</sup> τρόπος: Θεωρούμε κάθε τμήμα ξεχωριστά. Χωρίζουμε τον αρχικό φορέα σε επιμέρους τμήματα, καταστρώνουμε τις 3 Ε.Σ.Ι. για κάθε στερεό τμήμα. Από τη διαφορά των συνολικών Ε.Σ.Ι. και του συνολικού αριθμού αγνώστων αντιδράσεων προκύπτει ο ολικός βαθμός υπερστατικότητας.

## 2.5 Εντατικά μεγέθη $N(x)$ , $Q(x)$ , $M(x)$

Έστω μία δοκός  $AB$  (Σχήμα 2.9α) με εξωτερικά φορτία  $P_1$  και  $P_2$ . Εφαρμόζουμε τις 3 συνθήκες στατικής ισορροπίας στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος (Δ.Ε.Σ.) της δοκού (Σχήμα 2.9β) για να υπολογίσουμε τις 3 αντιδράσεις ( $H_A$ ,  $V_A$ ) και  $V_B$ .

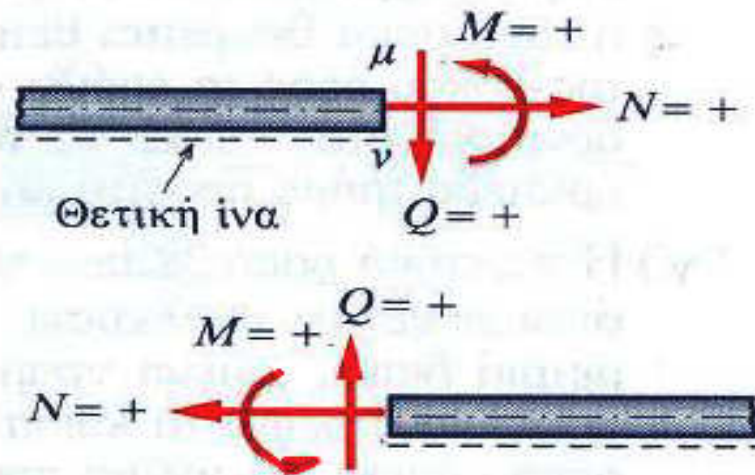


Σχήμα 2.9

Θεωρούμε μια «νοητή τομή» στο σημείο  $K$  με αποτέλεσμα να αποκόπτει τη δοκό σε δύο ανεξάρτητα τμήματα. Με βάση την «αρχή των τομών» επειδή η δοκός ισορροπούσε προ της τομής και τα τμήματα που νοητά αποκόπτονται από αυτήν πρέπει να ισορροπούν. Για να γίνει αυτό, στο αριστερό τμήμα για παράδειγμα, στην επιφάνεια τομής θα πρέπει να αναπτύσσονται δυνάμεις (που προέρχονται από το δεξιό τμήμα) άγνωστα κατανεμημένες. Όμως, όπως κι αν κατανεμηθούν, αυτές οι δυνάμεις δίνουν μια συνισταμένη δύναμη  $R$ . Αυτή η συνισταμένη  $R$  αναλύεται σε οριζόντια συνιστώσα  $N(x)$  και σε κατακόρυφη  $Q(x)$ . Η  $R$  μπορεί να μεταφερθεί στο κέντρο βάρους  $K$  της διατομής, με την προϋπόθεση να συνοδευτεί και από τη «ροπή μεταφοράς» της  $M(x)$ . Άρα, στο σημείο  $K$  που είναι σε τυχαία απόσταση  $x$ , ασκούνται:

- Η αξονική ή ορθή δύναμη που συμβολίζεται με  $N(x)$
- Η τέμνουσα δύναμη που συμβολίζεται με  $Q(x)$
- Η καμπτική ροπή ή ροπή κάμψης που συμβολίζεται με  $M(x)$

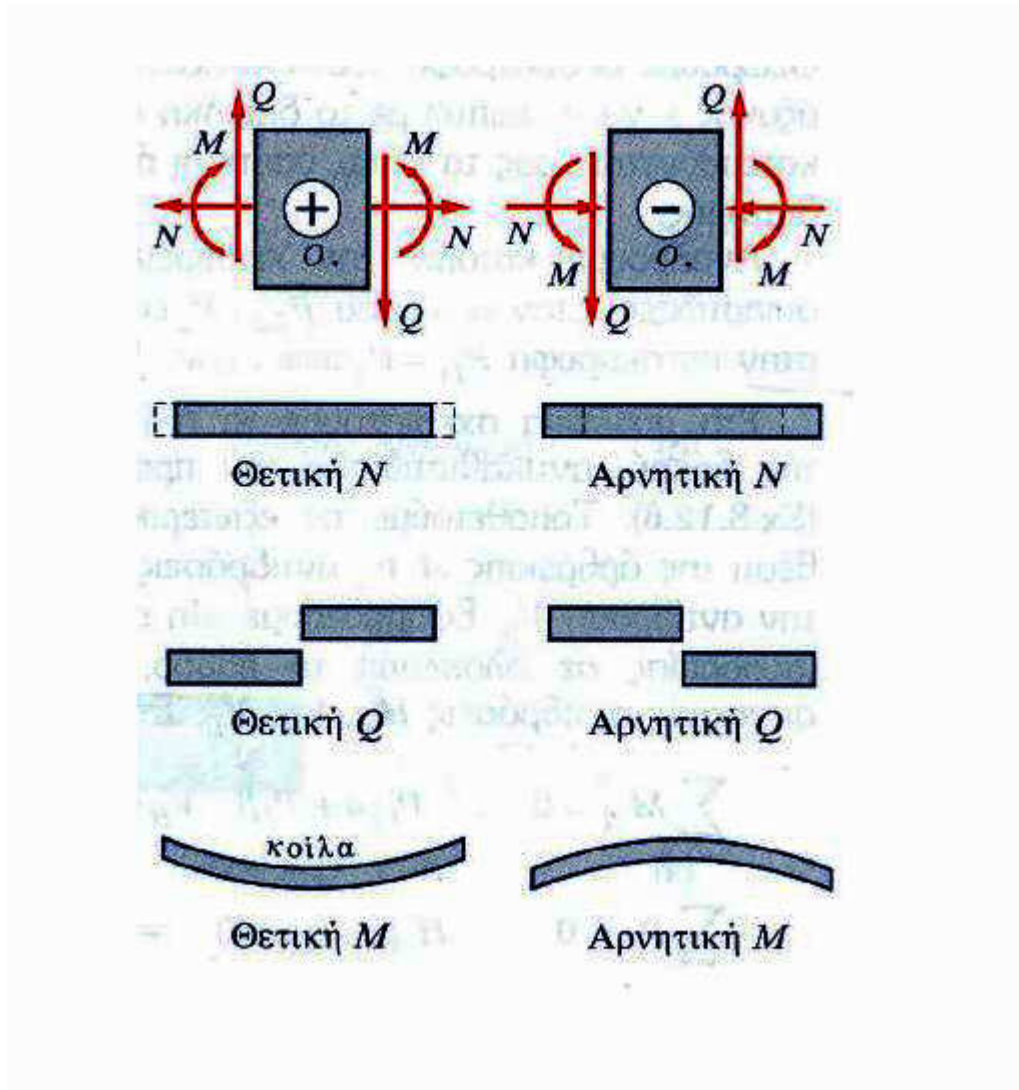
Τα τρία αυτά μεγέθη ονομάζονται **φορτία διατομής** ή **εντατικά μεγέθη**.



Σχήμα 2.10

### Πρόσημο των $N(x)$ , $Q(x)$ , $M(x)$

- i. Η αξονική δύναμη  $N(x)$  που εμφανίζεται σε μια διατομή θεωρείται θετική όταν αυτή τείνει να εφελκύσει τη διατομή στη θέση τομής. Αντίθετα, θεωρείται αρνητική όταν τείνει να τη θλίψει.
- ii. Η τέμνουσα  $Q(x)$  θεωρείται θετική, όταν τείνει να περιστρέψει το ελεύθερο σώμα δεξιόστροφα ως προς κάποιο εσωτερικό του σημείο ή ταυτόσημα θεωρείται θετική όταν τείνει να τμήσει το αριστερό τμήμα της δοκού προς τα επάνω σε σχέση με το δεξιό. Αντίθετα είναι αρνητική όταν τείνει να το στρέψει αριστερόστροφα ή να τμήσει το αριστερό τμήμα προς τα κάτω.
- iii. Η ροπή κάμψης  $M(x)$  θεωρείται θετική όταν τείνει να εφελκύσει την κάτω ίνα της δοκού που θεωρείται η θετική και ονομάζεται «ίνα αναφοράς» και που συμβολίζεται με μια διακεκομμένη γραμμή στο κάτω μέρος της (Σχήμα 2.10) ή ταυτόσημα όταν τείνει να στρέψει τα κοίλα προς τα επάνω. Στην αντίθετη περίπτωση θεωρείται αρνητική.



Σχήμα 2.11

### Υπολογισμός συναρτήσεων $N(x)$ , $Q(x)$ , $M(x)$

Γενικά:

- Κάθε δύναμη παράλληλη με το διαμήκη άξονα  $x$  της δοκού θεωρείται αξονική δύναμη
- Κάθε δύναμη κάθετη στον άξονά της θεωρείται τέμνουσα δύναμη.
- Αν μια δύναμη είναι σε κλίση, την αναλύουμε σε αξονική και τέμνουσα. Στην έννοια της δύναμης συμπεριλαμβάνονται και οι αντιδράσεις.

Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών  $N(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $M(x)$  ισχύουν τα παρακάτω:

- Η ορθή ή αξονική δύναμη  $N(x)$  σε μια διατομή, ισούται με το άθροισμα των προβολών των εξωτερικών δυνάμεων (φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται αριστερά (ή δεξιά) της εξεταζόμενης διατομής πάνω στον κεντροβαρικό άξονα της δοκού.
- Η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  σε μια τυχαία διατομή της δοκού, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των κάθετων δυνάμεων (και αντιδράσεων) που ασκούνται αριστερά της εξεταζόμενης διατομής, με θετικές αυτές που συναντούν πρώτα τη θετική ίνα και μετά τη δοκό.
- Η ροπή κάμψης  $M(x)$  σε μία τυχαία διατομή της δοκού, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των συγκεντρωμένων ροπών και των ροπών που προκύπτουν από τις τέμνουσες δυνάμεις (και αντιδράσεις) που ασκούνται αριστερά της εξεταζόμενης διατομής, με θετικές όσες τείνουν να περιστρέψουν δεξιόστροφα το αριστερό τμήμα περί το σημείο τομής.

### 3 Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων

#### 3.1 Εισαγωγή

Η μελέτη μιας κατασκευής, ανεξαρτήτως μορφής και εξωτερικών φορτίσεων που ασκούνται σε αυτή, βασίζεται στη διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας και συμβιβαστού καθώς και στις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων όπου αμφότερες μπορούν να περιγραφούν από απλές μαθηματικές εξισώσεις για την διευκόλυνση τόσο της κατανόησης των όσο και εφαρμογή τους.

- Συνθήκη ισορροπίας: έστω μια κατασκευή στην οποία ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Η συνθήκη ισορροπίας συνδέει τις εξωτερικές δυνάμεις με τις αντίστοιχες τάσεις  $\sigma$  που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της κατασκευής. Στα τμήματα μιας κατασκευής όπου δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η συνθήκη ισορροπίας συνδέει τις τάσεις που ασκούνται εκατέρωθεν μιας τυχαίας διατομής.
- Συνθήκη συμβιβαστού: η συνθήκη συμβιβαστού (η αλλιώς το συμβιβαστό των παραμορφώσεων- μετατοπίσεων) συνδέει τις παραμορφώσεις  $\epsilon$  μιας κατασκευής με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις  $u$ . Άρα η συνθήκη αυτή εκφράζεται ανάλογα με τον τρόπο που παραμορφώνεται η κατασκευή (επιμήκυνση, διάτμηση).
- Σχέσεις τάσεων- παραμορφώσεων: οι σχέσεις τάσεων- παραμορφώσεων βασίζονται σε ελεγχόμενα πειράματα που γίνονται σε δοκίμια του κάθε υλικού (εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση, κόπωση). Σε κάποιες εφαρμογές, λόγω της μορφής και του μεγέθους της φόρτισης, είναι απαραίτητη η χρήση ελαστο-πλαστικών σχέσεων τάσεων- παραμορφώσεων όπου λαμβάνεται υπόψη ότι το υλικό υπόκειται σε μόνιμες, μη- αντιστρεπτές, πλαστικές παραμορφώσεις. Γενικά, σε πολλές μηχανολογικές και ναυπηγικές κατασκευές, όπου πρωτεύοντα ρόλο έχουν τα μεταλλικά κράματα, η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να θεωρηθεί ελαστική. Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι αντιστρεπτές και οι σχέσεις τάσεων- παραμορφώσεων αποτελούν μια γενίκευση του νόμου του Hooke, ο οποίος για μονοδιάστατη φόρτιση δίνεται από τη γνωστή γραμμική σχέση  $\sigma = E\epsilon$ , όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

#### 3.2 Τάσεις

Οι εξωτερικές δυνάμεις που επιδρούν σε ένα σώμα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις καθολικές δυνάμεις και τις επιφανειακές δυνάμεις. Οι καθολικές δυνάμεις, όπως για παράδειγμα η βαρύτητα, οι αδρανειακές και οι μαγνητικές δυνάμεις, επιδρούν αμέσως στα μόρια του σώματος ενώ οι επιφανειακές δυνάμεις επιδρούν στην



επιφάνεια του σώματος και μεταβιβάζονται εμμέσως στο εσωτερικό του με τη βοήθεια του πλέγματος των συνδέσμων μεταξύ των μορίων και ατόμων του σώματος.

Οι τάσεις σε ένα στοιχειώδη όγκο ενός φορτισμένου σώματος ορίζονται με τη μορφή διανύσματος ως εξής:

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]$$

όπου  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  και  $\sigma_{zz}$  είναι οι ορθές συνιστώσες των τάσεων και  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  οι διατμητικές συνιστώσες των τάσεων ως προς τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### 3.3 Παραμορφώσεις και δυνατές μετακινήσεις

Όταν σε ένα σώμα επιδρούν εξωτερικά φορτία, αυτό παραμορφώνεται δηλαδή μεταβάλλονται οι φυσικές του διαστάσεις. Τα είδη των παραμορφώσεων είναι τα εξής:

- Επιμήκυνση δηλαδή η αύξηση μιας διάστασης του σώματος
- Επιβράχυνση δηλαδή η μείωση μιας διάστασης του σώματος
- Στρέβλωση είναι η αλλαγή της ακτίνας καμπυλότητας μιας διάστασης του σώματος

Η παραμόρφωση ενός σώματος σε κάθε διεύθυνση μπορεί να υπολογισθεί σαν ποσοστό της επιμήκυνσης ή βράχυνσης του φορέα κατά τη διεύθυνση αυτή. Έστω ότι ένα σώμα έχει αρχικό μήκος  $s$  και μετά την παραμόρφωσή του έχει αυξηθεί το μήκος του κατά  $\Delta s$ , τότε η παραμόρφωση είναι

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

Η παραμόρφωση είναι καθαρός αριθμός αφού είναι πηλίκο δύο μεγεθών με μονάδες μήκους.

Η συμπεριφορά των υλικών μετά την επίδραση εξωτερικών ή εσωτερικών παραμορφώσεων μπορεί να είναι ελαστική ή ανελαστική.

- Ελαστική συμπεριφορά: παραμόρφωση του υλικού υπό την επίδραση ενός αιτίου και εξαφάνιση της παραμόρφωσης μετά την αφαίρεση του αιτίου. Κανένα δομικό υλικό δεν είναι απόλυτα ελαστικό.
- Ανελαστική συμπεριφορά: παραμονή μόνιμων παραμορφώσεων μετά την απομάκρυνση των φορτίων.

Για να αποφύγουμε τυχόν μόνιμες παραμορφώσεις στις κατασκευές, περιορίζουμε τις τάσεις του υλικού κάτω από το όριο ελαστικότητας. Η επίλυση των γραμμικών φορέων στη στατική γίνεται με την παραδοχή γραμμικά ελαστικού υλικού.

Συνήθως όταν αναλύουμε μια κατασκευή υποθέτουμε ότι είναι απόλυτα στερεή χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τις παραμορφώσεις που οφείλονται στα επιβαλλόμενα φορτία. Στα πλαίσια της Στατικής των απολύτως στερεών σωμάτων, μπορούν να επιλυθούν οι ισοστατικές κατασκευές με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας, σύμφωνα με τις οποίες το άθροισμα όλων των δυνάμεων και το άθροισμα όλων των ροπών που εφαρμόζονται στη κατασκευή ισούται με μηδέν:

$$\sum F = 0 \quad , \quad \sum M = 0$$

Έτσι, με τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας υπολογίζουμε τις αντιδράσεις και τις εσωτερικές δυνάμεις στην κατασκευή και ύστερα σύμφωνα με αυτές επιλέγουμε το υλικό και τις διαστάσεις της κατασκευής.

Δυνατές μετακινήσεις είναι οι απειροστές μετακινήσεις που είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν, είναι ανεξάρτητες από το χρόνο και συμβιβαστές με τους συνδέσμους.

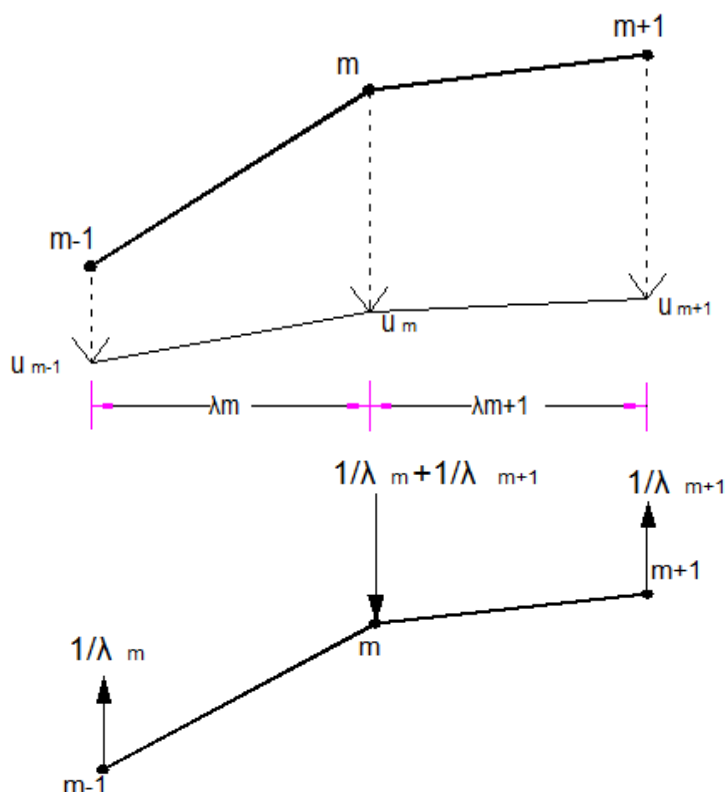
Η ύπαρξη δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων στα σημεία του σώματος και ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων είναι αναγκαίος για σκοπούς λειτουργικότητας. Επιπλέον, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων όταν δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας. Οι επιπλέον εξισώσεις προέρχονται από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και των μετακινήσεων του φορέα. Στην περίπτωση που οι παραμορφώσεις και μετακινήσεις είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος χρησιμοποιείται η αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία και μορφή του φορέα.

Όταν σε ένα κινητό σύστημα στερεών σωμάτων, όπου ενεργεί εξωτερικά ένα σύστημα δυνάμεων, δοθεί μια απειροστή μετατόπιση, τότε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετατοπίζονται, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις να εκτελούν μικρές ποσότητες έργων, τα οποία ονομάζονται δυνατά έργα. Αν στο ίδιο υλικό σημείο δρουν περισσότερες από μια δυνάμεις, τότε το έργο της συνισταμένης ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.

Κατά τη μετατόπιση ενός σώματος, το έργο της βαρύτητας ισούται με το γινόμενο του βάρους του σώματος επί την κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης του κέντρου βάρους του. Είναι ανεξάρτητο του δρόμου και είναι θετικό για κίνηση του σώματος προς τα κάτω, αρνητικό για κίνηση προς τα πάνω και μηδέν για οριζόντια κίνηση ή κλειστή τροχιά.

### 3.4 Ελαστική γραμμή

Με τον όρο ελαστική γραμμή εννοούμε τον άξονα του φορέα που παραμορφώνεται από εξωτερικά φορτία ή καταναγκασμούς. Συνήθως όμως, καλούμε ως ελαστική γραμμή τη γραμμή των βυθίσεων (κατακόρυφων μετατοπίσεων)  $u$  ή τη γραμμή των οριζόντιων μετατοπίσεων  $u$ . Ενώ ένα σκαρίφημα της ελαστικής γραμμής είναι πολύ χρήσιμο για την αντίληψη της μορφής του φορέα μετά την παραμόρφωση, σπάνια χρειάζεται ο ακριβής υπολογισμός της. Συνήθως αρκούν οι τιμές ορισμένων χαρακτηριστικών μετατοπίσεων που υπολογίζονται με τη μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου.



Σχήμα 3.1

Ο προσδιορισμός της ελαστικής γραμμής ενός φορέα γίνεται με τη μέθοδο των ελαστικών φορτίων ή μέθοδο Mohr. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει τον προσδιορισμό των βυθίσεων  $u_m$  των κόμβων  $m$  ενός φορέα, σαν ροπές κάμψης λόγω των μοναχικών φορτίων  $W_m$  που ενεργούν στους κόμβους αυτούς. Μέσω των επαγωγικών τύπων της δοκού με μοναχικά φορτία, τα φορτία  $W_m$  συνδέονται με τις βυθίσεις ως εξής:

$$W_m = \left(-\frac{1}{\lambda_m}\right) u_{m-1} + \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) u_m + \left(-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) u_{m+1}$$

Εάν θεωρηθεί η βοηθητική φόρτιση του παραπάνω σχήματος, η οποία αποτελείται από τρία αυτοίσοροπούμενα φορτία, τότε το  $W_m$  είναι ίσο με το έργο της βοηθητικής φόρτισης για τη βύθιση  $u_m$ . Συνεπώς το  $W_m$  θα είναι ίσο και με το έργο

των φορτίων διατομής της βοηθητικής φόρτισης για τις παραμορφώσεις από τις οποίες προήλθαν τα  $u_m$ . Συνεπώς θα ισχύει:

$$W_{m,\alpha} = \int (\bar{M}_{,m} \kappa_{,\alpha} + \bar{Q}_{,m} \gamma_{,\alpha} + \bar{N}_{,m} \varepsilon_{,\alpha}) ds + \sum \bar{S}_{r,m} \Delta l_{r,\alpha}$$

Άρα, για δεδομένες τις εσωτερικές παραμορφώσεις  $\kappa_{,\alpha}$ ,  $\gamma_{,\alpha}$ ,  $\varepsilon_{,\alpha}$  και  $\Delta l_{r,\alpha}$  μπορεί να υπολογιστεί σε κάθε σημείο το ελαστικό φορτία  $W_m$ . Το διάγραμμα των ροπών από το φορτίο αυτό θα ταυτίζεται με τη ζητούμενη ελαστική γραμμή του φορέα για το αίτιο  $\alpha$  λόγω του ελαστικού φορτίου  $W$ .

### 3.5 Γεωμετρικοί και ενεργειακοί μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

Οι γεωμετρικές μέθοδοι στηρίζονται (ή άμεσα ή έμμεσα) στην διαφορική εξίσωση που συνδέει την καμπτική ροπή με την καμπυλότητα και χρησιμοποιούνται για την εύρεση βυθίσεων και στροφών απλών φορέων λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις. Μερικές από τις κυρίες γεωμετρικές μεθόδους είναι οι παρακάτω:

- Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (double integration method)
- Μέθοδος ροπών (moment-area method)
- Μέθοδος ομόλογης δοκού (conjugate beam method)

Οι γεωμετρικές μέθοδοι όμως, παρουσιάζουν μειονεκτήματα όταν πρόκειται για συστηματική ανάλυση πολύπλοκων φορέων.

Οι έννοιες της ενέργειας παραμόρφωσης και της συμπληρωματικής ενέργειας αποτελούν τη βάση μιας σειράς ισχυρών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη κατασκευών. Στη πιο γενική τους μορφή, οι μέθοδοι αυτές ισχύουν στη γραμμική αλλά και στη μη-γραμμική περιοχή. (μη- γραμμική συμπεριφορά προκύπτει είτε λόγω μη-γραμμικής απόκρισης του υλικού είτε λόγω γεωμετρικής μη-γραμμικότητας δηλαδή μεγάλες μετατοπίσεις ) Οι ενεργειακές μέθοδοι βασίζονται στο ισοζύγιο εξωτερικού και εσωτερικού έργου. *Εξωτερικό έργο* (external work) είναι το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα. *Εσωτερικό έργο* (internal work) ή *ελαστική ενέργεια* (elastic strain energy) είναι η ενέργεια ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων.

Οι κύριες ενεργειακές μέθοδοι είναι οι εξής:

- Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο): μια άγνωστη μετακίνηση μπορεί να υπολογισθεί αν υπάρχει μόνο μία εξίσωση για το ισοζύγιο εξωτερικού και εσωτερικού έργου. Οι μετακινήσεις που μπορούν

να υπολογισθούν είναι μόνο στο σημείο και διεύθυνση ενός συγκεντρωμένου φορτίου.

- Θεωρήματα Castigliano: οι μετακινήσεις που μπορούν να υπολογισθούν είναι στο σημείο και διεύθυνση ενός συγκεντρωμένου φορτίου αφού πρώτα βρεθούν οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι των αντίστοιχων συγκεντρωμένων φορτίων
- Αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ): είναι η πλέον εύχρηστη μέθοδος αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μετακίνησης οποιουδήποτε σημείου του φορέα, σε οποιαδήποτε διεύθυνση και τυχαία φόρτιση. Μπορεί να εφαρμοστεί σε ελαστικά ή ανελαστικά προβλήματα και σε περιπτώσεις υποχωρήσεων στηρίξεων και θερμοκρασιακών μεταβολών.

Στα πλαίσια αυτής της πτυχιακής εργασίας οι παραπάνω μέθοδοι θα αναλυθούν περαιτέρω λόγω της χρησιμότητάς τους για την επίλυση φορέων.

### 3.6 Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο)

Η μέθοδος πραγματικού έργου που βασίζεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας λέει ότι: το εξωτερικό έργο  $W_E$ , το οποίο είναι είναι έργο που παράγεται από τις μετακινήσεις των σημείων εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων, πρέπει να είναι ίσο με την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  (ή αλλιώς εσωτερικό έργο  $W_I$ ) του φορέα λόγω των προκαλούμενων τάσεων και παραμορφώσεων έτσι ώστε να διατηρείται η συνολική ενέργεια του συστήματος

$$W_E = U$$

Έχοντας θεωρήσει όμως ότι τα φορτία ασκούνται τόσο αργά ώστε να μην προκαλείται κινητική ή θερμοκρασιακή ενέργεια, ότι το έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις και ροπές αποθηκεύεται υπό μορφή ελαστικής ενέργειας στα μέλη της κατασκευής τα παραμορφώνονται αντίστοιχα και ότι δεν υπάρχει τρόπος απορρόφησης της ενέργειας στο σύστημα. Αυτή η μέθοδος όμως έχει σημαντικούς περιορισμούς: η μετακίνηση μπορεί να υπολογισθεί μόνο στην περίπτωση στην περίπτωση που ο φορέας φορτίζεται με ένα συγκεντρωμένο φορτίο και μόνο κατά την διεύθυνση του επιβαλλόμενου εξωτερικού φορτίου.

### 3.7 Θεωρήματα Castigliano

Το 1873, ο Ιταλός μηχανικός Carlo Alberto Castigliano διατύπωσε τα δύο ενεργειακά θεωρήματά του. Τα θεωρήματα μας επιτρέπουν πρώτον να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις και τις γωνίες στροφής σε τυχαία σημεία ισοστατικών φορέων και

δεύτερον να επιλύσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία υπερστατικών φορέων. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι φορείς που πρέπει να στηρίζονται ακλόνητα δηλαδή να μην υποχωρούν οι στηρίξεις τους και τα μέλη τους να μην υποβάλλονται σε θερμοκρασιακές μεταβολές.

### **1ο θεώρημα του Castigliano**

Το πρώτο θεώρημα του Castigliano λέει: κάθε κατασκευή από γραμμικά ή μη-γραμμικά ελαστικό υλικό όπου οι στηρίξεις τους δεν μετακινούνται και η θερμοκρασία παραμένει αμετάβλητη, η πρώτη μερική παράγωγος της ενέργειας παραμορφώσεων ως προς κάποια συνιστώσα μετακίνησης είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται στο σημείο και στη διεύθυνση που αντιστοιχεί στην εξεταζόμενη συνιστώσα της μετακίνησης, δηλαδή:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_n} = P_n$$

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί μέθοδο έκφρασης των Συνθηκών Ισορροπίας και Επίλυσης Υπερστατικών Κατασκευών, παρά μέθοδο υπολογισμού των μετακινήσεων.

Τώρα θα αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα. Έστω ότι έχουμε μια κατασκευή που ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων  $P_1, P_2, \dots, P_n$  οι οποίες παράγουν κάποιο εξωτερικό έργο  $W_E$  και στην κατασκευή έχει αποταμιευτεί ίση ποσότητα ενέργειας παραμορφώσεων  $U$ . Έστω ότι τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετακινήθηκαν κατά  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Αν οι δυνάμεις μεταβληθούν κατά απειροστές ποσότητες, η μετακίνηση  $\delta_n$  θα μεταβληθεί κατά απειροστό  $d\delta_n$  ενώ όλες οι υπόλοιπες μετακινήσεις θα παραμείνουν σταθερές. Η ενέργεια παραμορφώσεων που έχει αποταμιευτεί στο σώμα θα γίνει  $U'$  όπου

$$U' = U + \frac{\partial U}{\partial \delta_n} d\delta_n$$

Όπου η πρώτη παράγωγος  $\frac{\partial U}{\partial \delta_n}$  είναι ο βαθμός μεταβολής της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς τη μετατόπιση  $\delta_n$ . Παρατηρούμε ότι κατά την μεταβολή της μετακίνησης  $\delta_n$  κατά  $d\delta_n$ , παράγεται έργο από την δύναμη  $P_n$  όχι όμως και από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στην κατασκευή αφού οι υπόλοιπες μετακινήσεις δεν μεταβάλλονται. Το έργο αυτό ισοδυναμεί με  $P_n d\delta_n$  και ισούται με την αύξηση της ενέργειας παραμόρφωσης της κατασκευής  $dU$ . Αν αμελήσουμε την απειροστή συνεισφορά στην τιμή του εξωτερικού έργου που επιτελεί η δύναμη  $dP_n$ , το εξωτερικό έργο που επιτελείται πάνω στην κατασκευή θα έχει τιμή  $W_E'$  ως αποτέλεσμα της εισαγωγής της πρόσθετης μετακίνησης  $d\delta_n$  όπου

$$W_E' = W_E + P_n d\delta_n$$

Επειδή  $U' = W_E'$  εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη των 2 παραπάνω εξισώσεων και έχουμε

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_n} = P_n$$

Η σχέση αυτή καλείται συνήθως πρώτο θεώρημα του Castigliano και δηλώνει ότι η μερική παράγωγος της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς οποιασδήποτε μετακίνησης  $\delta_n$  ισούται με την αντίστοιχη γενικευμένη δύναμη  $P_n$ . Το θεώρημα αυτό αποτελεί τη βάση μιας μεθόδου μελέτης κατασκευών που κάνει χρήση της ενέργειας παραμόρφωσης. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου παρατίθεται σχετικό παράδειγμα.

Έστω μια μη-γραμμική κατασκευή που έχει  $n$  άγνωστες κομβικές μετακινήσεις  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Οι μετακινήσεις  $\delta_n$  αποτελούν υποσύνολο του συνόλου των μετακινήσεων της κατασκευής ενώ τα φορτία  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ασκούνται μόνο σε κόμβους της κατασκευής. Κάθε μετακίνηση αντιστοιχεί σε μία φόρτιση. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άγνωστων μετακινήσεων  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Εάν εφαρμόσουμε το πρώτο θεώρημα του Castigliano ως προς κάθε μετακίνηση θα έχουμε  $n$  αριθμό εξισώσεων

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial \delta_1} \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial \delta_2} \quad \dots \quad P_n = \frac{\partial U}{\partial \delta_n}$$

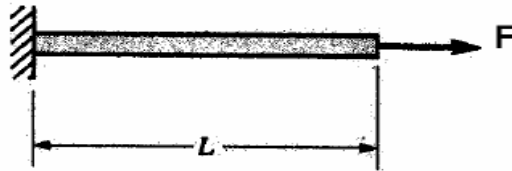
Αν εξετάσουμε μια από τις παραπάνω εξισώσεις, παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της περιέχει όρους που περιλαμβάνουν τις  $n$  κομβικές μετακινήσεις ως άγνωστες ποσότητες. Το άθροισμα όλων αυτών των όρων ισούται με το εξωτερικό φορτίο και άρα παρατηρούμε ότι η εξίσωση εκφράζει την ισορροπία της κατασκευής για τη δύναμη  $P_n$ . Συνεπώς αφού έχουμε υπολογίσει τις κομβικές μετακινήσεις είναι δυνατό να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις και τις τάσεις της κατασκευής. Άρα η κατασκευή έχει επιλυθεί πλήρως.

Η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω βασίζεται στην επίλυση των κομβικών μετατοπίσεων μέσω εξισώσεων ισορροπίας και ονομάζεται μέθοδος των μετατοπίσεων (displacement method) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών αλλά και μη-γραμμικών κατασκευών (στην περίπτωση των γραμμικών κατασκευών ονομάζεται μέθοδος των ακαμψιών – stiffness method).

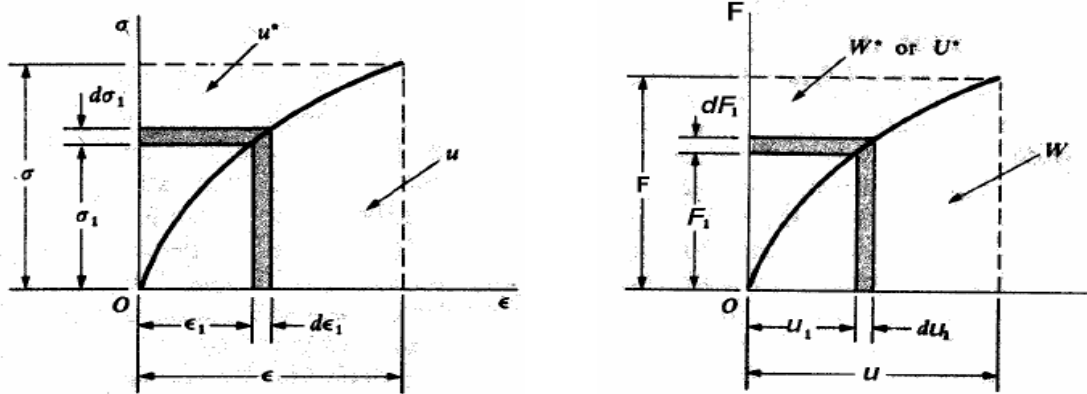
#### *Ενέργεια παραμόρφωσης και Συμπληρωματική ενέργεια*

Οι έννοιες της ενέργειας παραμόρφωσης και της συμπληρωματικής ενέργειας αποτελούν τη βάση μιας σειράς ισχυρών μεθόδων μελέτης και επίλυσης κατασκευών. Οι μέθοδοι αυτές ισχύουν στη γραμμική αλλά και στη μη-γραμμική περιοχή. Μη-γραμμική συμπεριφορά προκύπτει λόγω μη-γραμμικής απόκρισης του υλικού είτε λόγω γεωμετρικής μη-γραμμικότητας (μεγάλες μετατοπίσεις). Κατά τη μη-γραμμική περιοχή, η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει παρά μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Αντίθετα με την ελαστική ενέργεια, η συμπληρωματική ενέργεια δεν έχει φυσική σημασία και σ' αυτόν ακριβώς το λόγο έγκειται η χρησιμότητα της.

Αρχικά θα τις εξετάσουμε στη γενική τους μορφή και ύστερα στις γραμμικές κατασκευές. Έστω ότι έχουμε μια ράβδο που φέρει αξονικό εφελκυστικό φορτίο  $F$  (3.2α) που έχει ως αποτέλεσμα ένα πεδίο σταθερών τάσεων  $\sigma = F/A$ . Η παραμόρφωση της ράβδου ισούται με  $\epsilon = u/L$  όπου  $u$  η επιμήκυνση και  $L$  το μήκος της. Το υλικό της ράβδου παρουσιάζει μη-γραμμική συμπεριφορά όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2β.



(α) Ράβδος υπό αξονικό φορτίο  $F$



(β) Διάγραμμα  $\sigma$ - $\epsilon$

(γ) Διάγραμμα  $F$ - $u$

σχήμα 3.2

Το διάγραμμα φορτίου- μετατόπισης (3.2γ) έχει την ίδια μορφή με το διάγραμμα τάσεων- παραμορφώσεων (3.2β). Το έργο που επιτελείται κατά την επίδραση του φορτίου  $F$  δίνεται από τη σχέση

$$W = \int_0^u F_1 du_1$$

Όπου  $F > F_1 > 0$ ,  $u_1$  η αντίστοιχη επιμήκυνση και  $u$  η μέγιστη επιμήκυνση. Αφού η συμπεριφορά είναι ελαστική, και επειδή δεν λαμβάνουμε υπόψη τυχόν απώλειες ενέργειας κατά την άσκηση του φορτίου καθώς και κατά την αποφόρτιση, όλο το έργο που παράγεται από το εξωτερικό φορτίο αποθηκεύεται στη ράβδο ως ενέργεια παραμόρφωσης που μπορεί να ανακτηθεί κατά την αποφόρτιση. Άρα η ενέργεια παραμόρφωσης ισούται αριθμητικά με το έργο των εξωτερικών:

$$U = W = \int_0^u F_1 du_1$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα παριστάνεται από το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα  $Ox$  στο σχήμα 3.2β. Η ενέργεια



παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου ή αλλιώς η *πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης*  $U'$  υπολογίζεται θεωρώντας ένα στοιχείο όγκου του σώματος στο οποίο αναπτύσσεται τάση  $\sigma_1$  και παραμόρφωση  $\epsilon_1$ . Άρα

$$U' = \int_0^\epsilon \sigma_1 d\epsilon_1$$

Όπου  $\epsilon$  η μέγιστη παραμόρφωση. Το παραπάνω ολοκλήρωμα αντιστοιχίζεται με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα  $Ox$  του σχήματος 3.2β. Μια άλλη μορφή έργου που περιέχεται στο σχήμα 3.2β είναι το συμπληρωματικό έργο  $W^*$  (complementary work) και ορίζεται ως

$$W^* = \int_0^F u_1 dF_1$$

Το συμπληρωματικό έργο παριστάνεται από το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ της καμπύλης και του άξονα  $Oy$  στο σχήμα 3.2γ. Επίσης ισχύει

$$W + W^* = Fu$$

Συνεπώς γεωμετρικά, το συμπληρωματικό έργο αποτελεί συμπλήρωμα του έργου  $W$  καθότι συμπληρώνει το ορθογώνιο του σχήματος 3.2γ. Η συμπληρωματική ενέργεια  $U^*$  τότε είναι ίση με το συμπληρωματικό έργο του ασκούμενου φορτίου ώστε

$$U^* = W^* = \int_0^F u_1 dF_1$$

Η πυκνότητα της συμπληρωματικής ενέργειας  $U^{*'} ($ ή συμπληρωματική ενέργεια ανά μονάδα όγκου) λαμβάνεται θεωρώντας στοιχείο όγκου του σώματος στο οποίο αναπτύσσονται τάσεις  $\sigma_1$  και παραμορφώσεις  $\epsilon_1$  όπως και στην περίπτωση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης

$$U^{*' } = \int_0^\sigma \epsilon_1 d\sigma_1$$

Όταν σε ένα σώμα ασκούνται περισσότερες από μια εξωτερικές φορτίσεις, το συνολικό έργο υπολογίζεται με πρόθεση των επιμέρους έργων. Οι φορτίσεις πρέπει να ασκούνται ταυτοχρόνως και να αυξάνονται αναλογικά και ισχύουν

$$W = \sum_{i=1}^n \int_0^{u_i} F_i du_i \quad W^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{F_i} u_i dF_i$$

Όπου  $F_i$  και  $u_i$  οι μέγιστες τιμές της  $i$ -οστής φόρτισης και της αντίστοιχης μετατόπισης ενώ  $F$  και  $u$  είναι οι αντίστοιχες ενδιάμεσες τιμές και  $n$  ο αριθμός των εξωτερικών φορτίσεων.

Πρωτίτερα δείξαμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης εκφράζεται ως συνάρτηση μετατοπίσεων ενώ η συμπληρωματική ενέργεια ως συνάρτηση δυνάμεων. Τώρα θα αποδείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα που δείχνει τη χρησιμότητας της συμπληρωματικής ενέργειας κατά την επίλυση των κατασκευών.

Έστω μια μη-γραμμική κατασκευή που φέρει  $n$  εξωτερικά φορτία  $F_1, F_2, \dots, F_n$  που προκαλούν αντίστοιχες μετατοπίσεις  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Η συμπληρωματική ενέργεια  $U^*$  είναι ίση με το συμπληρωματικό έργο  $W^*$  των φορτίων. Για να υπολογίσουμε αυτό το έργο, εκφράζουμε τις μετατοπίσεις συναρτήσει των φορτίων και ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ( $W^*$ ). Συνεπώς η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  εκφράζεται ως συνάρτηση των φορτίων  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Εάν ένα φορτίο  $F_i$  αυξηθεί κατά  $dF_i$  ενώ τα υπόλοιπα φορτία παραμείνουν αμετάβλητα, η συμπληρωματική ενέργεια αυξάνεται κατά  $dU^*$  σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση η μεταβολή της συμπληρωματικής ενέργειας ισούται με το ρυθμό μεταβολής της επί τη μεταβολή του φορτίου.

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial F_i} dF_i$$

Διαφορετικά, η συμπληρωματική ενέργεια μπορεί να αυξηθεί αν θεωρήσουμε το συμπληρωματικό έργο των δυνάμεων όταν το φορτίο  $F_i$  αυξηθεί κατά  $dF_i$ . Τότε αυτό το συμπληρωματικό έργο ισούται με τη συμπληρωματική ενέργεια της κατασκευής. Το μόνο φορτίο που μεταβάλλεται και επιτελεί συμπληρωματικό έργο είναι το  $F_i$ . Άρα  $dU^* = u_i dF_i$  δηλαδή η αύξηση της συμπληρωματικής ενέργειας είναι το γινόμενο της μετατόπισης  $u_i$  και της επαύξησης του φορτίου  $dF_i$ .

Αν εξισώσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$u_i = \frac{\partial U^*}{\partial F_i}$$

Σύμφωνα με αυτή τη σχέση, η μετατόπιση ενός σημείου κατασκευής ισούται με τη μερική παράγωγο της συμπληρωματικής ενέργειας ως προς την εξωτερική δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο σημείο. Η σχέση αυτή ονομάζεται θεώρημα Crotti-Engesser και αντιστοιχεί στο πρώτο θεώρημα του Castigliano.

## **2ο θεώρημα του Castigliano**

Όταν μια κατασκευή φορτίζεται στη γραμμική ελαστική περιοχή, ισχύει η αρχή της επαλληλίας και η συμπληρωματική ενέργεια είναι ίση με την ενέργεια παραμόρφωσης. Έστω ότι έχουμε μια κατασκευή από γραμμικά ελαστικό υλικό που ακολουθεί το νόμο του Hooke, η θερμοκρασία της παραμένει σταθερή και οι στηρίξεις της δεν υποχωρούν και δέχεται φορτία  $F_1, F_2, \dots, F_n$  και ότι τα φορτία αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Τότε οι ποσότητες  $U$  και  $U^*$  μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις δεύτερης τάξης των φορτίων. Επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $U^*$  με  $U$  στο θεώρημα Crotti-Engesser και τότε έχουμε

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται δεύτερο θεώρημα του Castigliano και διατυπώνεται ως εξής:

*Σε μια γραμμική κατασκευή, η μερική παράγωγος της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς οποιοδήποτε φορτίο  $F_i$  ισούται με την αντίστοιχη μετατόπιση  $u_i$  εφόσον η ενέργεια παραμόρφωσης εκφράζεται συναρτήσει των φορτίων.*

Το 2<sup>ο</sup> θεώρημα του Castigliano σε αντίθεση με την αρχή των Δυνατών έργων εφαρμόζεται μόνο σε γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά υλικού και όταν δεν υπάρχουν θερμοκρασιακές μεταβολές ή υποχωρήσεις στηρίξεων.

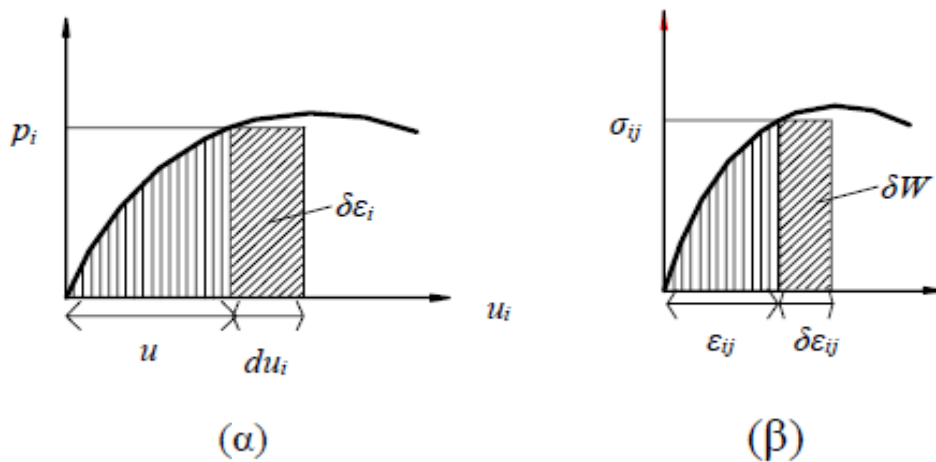
### 3.8 Αρχή των δυνατών έργων

Στη Μηχανική μια από τις απλούστερες μεθόδους επίλυσης των υπερστατικών φορέων είναι η αρχή των δυνατών έργων. Αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των μετακινήσεων και τη συστηματική ανάλυση οποιαδήποτε κατασκευής. Η αρχή αυτή εκφράζει την ισορροπία του σώματος και προκύπτει ύστερα από αλγεβρικές πράξεις των εξισώσεων ισορροπίας του σώματος. Η αρχή των δυνατών έργων λέει ότι *το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων*. Πρέπει να αναφερθεί ότι τα δυνατά έργα δεν είναι πραγματικά έργα. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων  $\delta E$  είναι το γινόμενο των πραγματικών δυνάμεων επί δυνατές (δηλαδή φανταστικές) μετατοπίσεις που σέβονται τις συνθήκες στήριξης. Έτσι, οι δυνατές μετατοπίσεις μηδενίζονται στις στηρίξεις.

Το στοιχειώδες έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το γινόμενο των πραγματικών τάσεων επί τις δυνατές παραμορφώσεις (οι οποίες προκύπτουν από τις δυνατές μετατοπίσεις με παραγωγή) και επί τον στοιχειώδη όγκο  $dV$  στον οποίο ενεργούν. Συνεπώς, όλο το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων  $\delta U$  είναι το ολοκλήρωμα του  $\delta W$  σε όλο τον όγκο του σώματος:

$$\delta U = \int_V \delta W \, dV$$

Αν επιβάλλουμε στον φορέα μια κινηματικά αποδεκτή μεταβολή των μετατοπίσεων  $u(x)$ , το πεδίο αυτό που είναι απολύτως φανταστικό, σέβεται τη συνέχεια του φορέα όπως και τις συνθήκες στήριξης. Θεωρούμε ότι αυτή η μετατόπιση  $du(x)$  δεν προκαλεί μεταβολή των τάσεων  $\sigma_{ij}$ . Η  $du(x)$  που ονομάζεται δυνατή μετατόπιση, προκαλεί τις δυνατές παραμορφώσεις ( $\delta \epsilon_{ij}$ ).



Σχήμα 3.3

Στο παραπάνω σχήμα (σχήμα 3.3α) απεικονίζεται το διάγραμμα των  $p_i$  και  $u_i$  ενώ και η δυνατή μετατόπιση  $du_i$ . Το γραμμοσκιασμένο τμήμα με εμβαδό  $du_i$  απεικονίζει το δυνατό έργο  $\delta E_i$  που παράγει το φορτίο  $p_i$  κατά τη δυνατή μετατόπιση  $du_i$ . Οπότε το συνολικό δυνατό έργο  $\delta E$  θα είναι

$$\delta E = \int_{s\sigma} p \, du \, dS \quad (1)$$

Το δυνατό έργο  $\delta E$  ξεχωρίζει από το πραγματικό  $E$  επειδή το πρώτο είναι ένα φανταστικό μαθηματικό εύρημα.

Στο σχήμα 3.3β απεικονίζει το διάγραμμα των  $\sigma_{ij} - \epsilon_{ij}$  καθώς και τη δυνατή παραμόρφωση  $\delta \epsilon_{ij}$ . Το γραμμοσκιασμένο τμήμα με εμβαδόν  $\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}$  παριστάνει τη δυνατή πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας  $\delta W$

$$\delta U = \int_V \delta W dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2)$$

παριστάνει την δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης. Η δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης είναι επίσης ένα φανταστικό μαθηματικό εύρημα.

Το δυνατό έργο  $\delta E$  πρέπει να είναι ίσο με την δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης

$$\delta E = \delta U \quad , \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{s\sigma} p \, du \, dS \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση παριστάνει την αρχή των δυνατών έργων όταν στο σώμα επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις. Για να αποδείξουμε τη σχέση είχαμε ως δεδομένο ότι ο φορέας ισορροπεί. Όμως αποδεικνύεται και το αντίστροφο, δηλαδή ότι όταν ισχύει η αρχή των δυνατών έργων ο φορέας βρίσκεται σε ισορροπία. Έτσι θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την ΑΔΕ και ως εξής: *Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένας φορέας να βρίσκεται σε ισορροπία, είναι το έργο που εκτελούν τα εξωτερικά*

*φορτία αν επιβληθεί στο φορέα ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, κινηματικά παραδεκτών, να ισούται με την δυνατή παραμορφωσική ενέργεια.*

Έχουμε ένα κινητό σύστημα στερεών σωμάτων. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές στις διάφορες αρθρώσεις, έδρανα, τριβείς κ.α. των αξόνων και ούτε στις διάφορες ολισθήσεις μεταξύ επιφανειών. Επίσης αν δεχθούμε και ότι τα διάφορα μέρη από τα οποία αποτελείται το σύστημα είναι απόλυτα στερεά σώματα τότε ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται *ιδεώδες σύστημα*. Σε αυτά τα συστήματα μόνο οι δυνάμεις που παράγουν έργο κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης του συστήματος. Όντως οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του σώματος δεν παράγουν έργο, αφού πάντα εμφανίζονται σε ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων και άρα το ολικό έργο τους σε κάθε μετατόπιση ισούται με μηδέν.

Για τα ιδεώδη αυτά συστήματα δεχόμαστε ότι ισχύει η παρακάτω διατύπωση της αρχής των δυνατών έργων: *Αν για κάθε δυνατή μετατόπιση ενός ιδεώδους συστήματος, το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις είναι μηδέν, το σύστημα ισορροπεί.*

Η αρχή των δυνατών έργων έχει τρία σημαντικά πλεονεκτήματα. Ένα από αυτά είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος όπου έχουμε ένα σύστημα σωμάτων όπου δεν εμφανίζεται τριβή, δεν είναι απαραίτητος ο διαχωρισμός του συστήματος σε μικρότερα επιμέρους τμήματα για τον υπολογισμό των αντιδράσεων ή εσωτερικών δυνάμεων ώστε στη συνέχεια να μπορούν να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας. Δεύτερον, οι σχέσεις μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, για να διασφαλιστεί η ισορροπία του συστήματος, μπορούν να προσδιοριστούν απευθείας χωρίς την παρεμβολή των αντιδράσεων. Επίσης, είναι η πιο σημαντική διαδικασία υπολογισμού των μετακινήσεων ενός συγκεκριμένου σημείου ενός φορέα αφού εφαρμόζεται σε διάφορα είδη κατασκευών και έχει δυνατότητες συμπερίληψης, πέρα από τα συνηθισμένα φορτία, άλλων δράσεων όπως υποχωρήσεις στηρίξεων, θερμοκρασιακές μεταβολές και κατασκευαστικές ατέλειες.

Αυτά τα πλεονεκτήματα καθιστούν την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων χρήσιμη για την εύρεση της θέσης ισορροπίας οποιουδήποτε κινητού συστήματος στερεών σωμάτων (ιδεώδους) όπου επιδρούν εξωτερικά φορτία.

Η αρχή των δυνατών έργων έχει μεγάλη σημασία επειδή ισχύει για οποιοδήποτε νόμο συμπεριφοράς του υλικού της κατασκευής. Η ΑΔΕ δεν αποτελεί μία πρόσθετη σχέση της θεωρίας των παραμορφωσίμων σωμάτων αλλά την ολοκληρωτική έκφραση των εξισώσεων ισορροπίας. Όμως διαφέρει από τις ΕΣΙ γιατί αυτές εκφράζουν την ισορροπία σε κάθε σημείο του σώματος ξεχωριστά, ενώ η αρχή των δυνατών έργων σε ολόκληρο το σώμα. Αυτήν την διαφορά μπορούμε να την αξιοποιήσουμε με την ανάπτυξη άλλων απλούστερων υπολογιστικών μεθόδων αντί να χρησιμοποιήσουμε τις κλασικές ΕΣΙ. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων αναπτύχθηκε η μητρική ανάλυση των κατασκευών για τον υπολογισμό οποιασδήποτε κατασκευής.

### 3.8.1 Αναλυτική απόδειξη της αρχής των δυνατών έργων

Θα επανεξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα οριακής τιμής που περιγράψαμε στην παραπάνω παράγραφο με την διαφορά ότι όλα τα μεγέθη (εξωτερικές δυνάμεις, μετατοπίσεις, τάσεις, παραμορφώσεις) είναι ανεξάρτητα από το χρόνο  $t$ .

Ονομάζουμε στατικά παραδεκτό ένα πεδίο τάσεων  $\sigma_{ij}$  που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- ◆ Τις συνθήκες ισοροπίας σε κάθε σημείο του σώματος

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (4)$$

- ◆ Τις επιφανειακές συνθήκες στο τμήμα της επιφάνειας  $S_\sigma$  του σώματος

$$t_i - \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (5)$$

Ονομάζουμε κινηματικά παραδεκτό ένα πεδίο μετατοπίσεων  $u(x)$ , δύο φορές παραγωγίσιμο, όπου οι παραμορφώσεις  $\varepsilon_{ij}$  προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

ενώ στο τμήμα της επιφάνειας  $S_u$  του σώματος ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες

$$u_i(x) - g_i(x) = 0, \quad x \in S_u \quad (7)$$

Εννοείται ότι τότε θα ικανοποιούνται και οι συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Από τη στατικά παραδεκτή κατανομή τάσεων ( $\sigma_{ij}$ ) με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων προκύπτει ένα πεδίο παραμορφώσεων. Αν το πεδίο αυτό είναι κινηματικά παραδεκτό, τότε η λύση του προβλήματος είναι το πεδίο  $\sigma_{ij}$ . Αντιθέτως, από ένα κινηματικά παραδεκτό πεδίο μετατοπίσεων  $u$  προκύπτουν οι παραμορφώσεις και ύστερα οι τάσεις. Αν το πεδίο των τάσεων είναι στατικά παραδεκτό, το πεδίο  $u$  αποτελεί την πραγματική λύση του προβλήματος. Το κινηματικό παραδεκτό πεδίο είναι τελείως αυθαίρετο. Ο μοναδικός περιορισμός είναι να μην επιβάλλεται μετακίνηση που να παραβιάζει το σύνδεσμο (για παράδειγμα σε μια κύλιση να επιβάλλουμε μετακίνηση κάθετη στο επίπεδο κύλισης κ.ο.κ. ).

Πιο αναλυτικά, έστω  $\sigma_{ij}$  το πεδίο των πραγματικών τάσεων (στη πράξη το πεδίο των τάσεων  $\sigma_{ij}$  δεν χρειάζεται να είναι πραγματικό αλλά μόνο στατικά παραδεκτό),  $u_i$  το πεδίο των μετατοπίσεων και  $\varepsilon_{ij}$  το πεδίο των παραμορφώσεων. Θεωρούμε τώρα ένα πεδίο κινηματικά παραδεκτών μετατοπίσεων  $du_i$  πάνω στο τμήμα της επιφάνειας  $S_u$  ικανοποιούν τις ομογενείς οριακές συνθήκες

$$\delta u_i(x) = 0, x \in S_u \quad (8)$$

τέτοιου είδους μετατοπίσεις ονομάζονται δυνατές μετατοπίσεις.

Έστω ότι επιβάλλουμε σε ένα σώμα B να εκτελέσει τις μετατοπίσεις  $\delta u_i$ , χωρίς να μεταβληθούν τα πεδία  $\sigma_{ij}$ ,  $u_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  και τα πεδία των φορτίσεων  $F_i$  και  $t_i$ , και φυσικά να υποστεί τις παραμορφώσεις  $\delta \varepsilon_{ij}$ . Όπως κάναμε για το απόλυτο στερεό, πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις (4) και (5) με  $\delta u_i$ . Ύστερα, θα πάρουμε το άθροισμα των ολοκληρωμάτων τους πάνω στον όγκο V του σώματος και πάνω στην επιφάνεια  $S_\sigma$  αντίστοιχα

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} (t_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0 \quad (9)$$

Επειδή όμως ισχύει η σχέση (8) μπορούμε από την παραπάνω σχέση να αφαιρέσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στην  $S_u$  της ποσότητας  $\sigma_{ij} n_j \delta u_i$ , άρα λαμβάνοντας υπόψη ότι  $S_u \cup S_\sigma = S$ , έχουμε

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S t_i n_j \delta u_i dS = 0 \quad (10)$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Green- Gauss στο δεύτερο όρο της (10) και έχουμε

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV + \int_V F_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} (t_i - \delta u_i dS) = 0 \quad (11)$$

Έχοντας υπόψη τη συμμετρία του τανυστή τάσεων, προκύπτει

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (12)$$

Επομένως, η (11) λόγω της (12) γράφεται

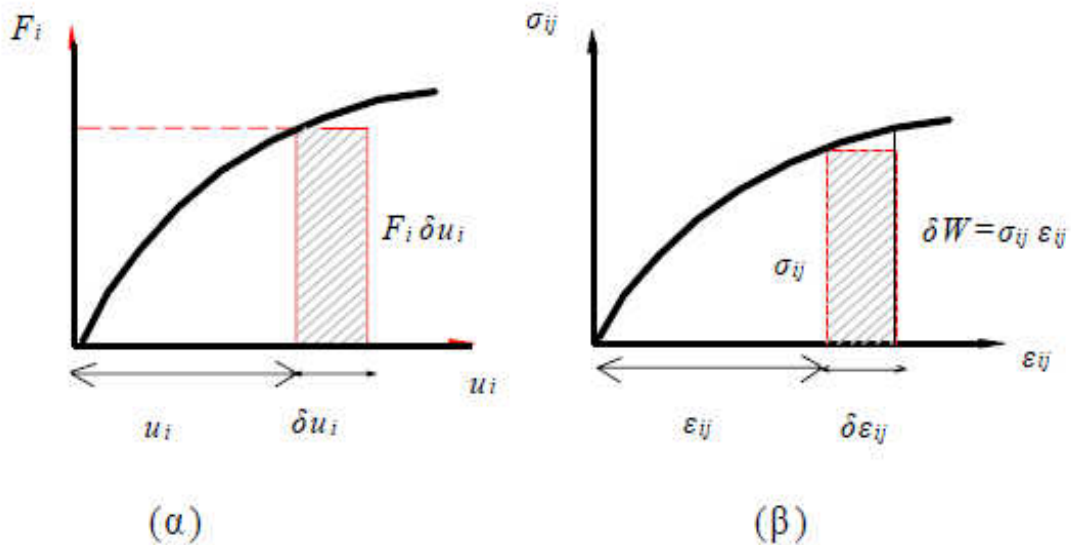
$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (13)$$

Το δεύτερο μέλος της (13) παριστάνει το δυνατό έργο  $\delta E$  των δυνάμεων  $F_i$  και  $t_i$  δηλαδή το έργο που παράγεται όταν οι δυνάμεις  $F_i$  και  $t_i$  μένουν σταθερές και

μεταβληθεί η μετατόπιση  $u_i$  κατά  $\delta u_i$ . Στο παρακάτω σχήμα (3.4α) απεικονίζεται ενδεικτικά το διάγραμμα των δυνάμεων  $F_i$  και χαράσσουμε το δυνατό έργο  $F_i \delta u_i$ . Το πρώτο μέλος παριστάνει τη δυνατή παραμορφωτική ενέργεια  $\delta U$

$$\delta U = \int_V \delta W dV \quad , \quad \delta W = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (14)$$

Όπου  $\delta W$  η πυκνότητα δυνατής παραμορφωτικής ενέργειας.



Σχήμα 3.4

Στο σχήμα 3.4β, η  $\delta W$  είναι η αύξηση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης όταν η  $\sigma_{ij}$  διατηρείται σταθερή και μεταβληθεί κατά  $\epsilon_{ij}$  η παραμόρφωση από τη θέση ισορροπίας. Είναι αξιοσημείωτο ότι η απειροστή μεταβολή  $du_i$  του πεδίου των πραγματικών μετατοπίσεων  $u_i$  είναι ένα κινηματικά παραδεκτό πεδίο το οποίο ικανοποιεί και την ομογενή συνθήκη (8) στο όριο  $S_u$ . Έτσι, αν πάρουμε σαν δυνατό πεδίο το πεδίο των απειροστών μεταβολών ( $\delta u_i = du_i$ ,  $\delta \epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}$ ) και περιοριστούμε στα ελαστικά (γραμμικά μη-γραμμικά) υλικά, τότε η πυκνότητα της δυνατής ενέργειας παραμόρφωσης  $\delta W$ , έχοντας υπόψη και την (13)

$$\delta W = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} = dW \quad (15)$$

Δηλαδή σ' αυτήν την περίπτωση, η  $\delta W$  παριστάνει την απειροστή μεταβολή  $dw$  της πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ . Επιπλέον, η  $\delta U$  παριστάνει την απειροστή μεταβολή  $dU$  της ενέργειας παραμόρφωσης  $U$ .

Η σχέση (13) εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων όταν στο σώμα επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις (το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων, δηλαδή η δυνατή



ενέργεια, είναι ίση με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων). Με την παραπάνω διαδικασία αποδείξαμε ότι όταν ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας (14) και (15) τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει και η (13). Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε την αρχή των δυνατών έργων ως εξής: *η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα παραμορφώσιμο σώμα να βρίσκεται σε ισορροπία, είναι το έργο που εκτελούν τα εξωτερικά φορτία αν επιβληθεί στο σώμα ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, κινηματικά παραδεκτών, να ισούται με τη δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης.* Η αρχή των δυνατών έργων έχει μεγάλη σημασία επειδή ισχύει για οποιοδήποτε νόμο συμπεριφοράς του υλικού.

### 3.8.2 Η αρχή των Δυνατών Έργων για τα Δικτυώματα

Η αρχή των δυνατών έργων χρησιμοποιείται επίσης για να υπολογίσουμε την μετακίνηση οποιουδήποτε σημείου του φορέα σε οποιαδήποτε διεύθυνση και για τυχαία φόρτιση. Μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την μέθοδο σε ελαστικά ή ανελαστικά προβλήματα και σε περιπτώσεις υποχωρήσεων στηρίξεων και θερμοκρασιακών μεταβολών. Η μέθοδος συνίσταται όταν εφαρμόζουμε ένα δυνατό δηλαδή νοητό φορτίο στο σημείο και κατά τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης. Καθώς ο φορέας παραμορφώνεται υπό την δράση πραγματικών φορτίων, παράγεται εξωτερικό δυνατό έργο  $\bar{W}$  από το δυνατό έργο ενόσω διανύει την πραγματική μετακίνηση του φορέα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας, ισοδύναμη ποσότητα δυνατής ενέργειας παραμόρφωσης  $\bar{U}$  αποθηκεύεται στο φορέα

$$\bar{W} = \bar{U}$$

Η δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης  $\bar{U}$  που αποθηκεύεται στο φορέα ισούται με το γινόμενο των εσωτερικών δυνάμεων  $\bar{N}$  που αναπτύσσονται στα μέλη του δικτυώματος λόγω του δυνατού φορτίου επί τις παραμορφώσεις  $\Delta L$  (βραχύνσεις ή επιμηκύνσεις) των μελών που προκαλούνται από τα πραγματικά φορτία

$$\bar{T} \cdot \delta = \sum \bar{N} \Delta L \quad (1)$$

*Παραμορφώσεις ράβδων από εξωτερικό φορτίο P*

Οι παραμορφώσεις των ράβδων που οφείλονται σε εξωτερικό φορτίο μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$\Delta L = \frac{N}{K} = \frac{NL}{EA}$$

Άρα η ΑΔΕ (1) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

$$\bar{T} \cdot \delta = \sum \bar{N} \cdot \Delta L = \sum \frac{\bar{N}NL}{EA}$$

*Παραμορφώσεις ράβδων από θερμοκρασιακή μεταβολή  $\Delta T$*

Καθώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία του μέλους ενός δικτυώματος, μεταβάλλεται και το μήκος του. Συγκεκριμένα η αύξηση της θερμοκρασίας ( $\Delta T > 0$ ) προκαλεί επιμήκυνση του μέλους ενώ η μείωση της θερμοκρασίας ( $\Delta T < 0$ ) προκαλεί βράχυνση του μέλους. Έτσι, η μεταβολή του μήκους του μέλους σε κάθε περίπτωση δίνεται από

$$\Delta L_{\text{θερμ}} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

Όπου  $\alpha$  = συντελεστής θερμικής διαστολής μέλους

$\Delta T$  = μεταβολή θερμοκρασίας

$L$  = μήκος μέλους

Τότε, η διατύπωση της ΑΔΕ (1) γίνεται

$$\bar{T} \cdot \delta = \sum \bar{N} \cdot \Delta L = \sum \bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

*Παραμορφώσεις ράβδων από κατασκευαστική ατέλεια  $\Delta L_{\text{κατ}}$*

Κάποιες φορές το μήκος ενός μέλους ενός δικτυώματος είναι πιθανό να διαφέρει από το επιθυμητό λόγω κατασκευαστικής ατέλειας. Σε αυτή την περίπτωση, η μετακίνηση ενός κόμβου του δικτυώματος από την αναμενόμενη θέση του μπορεί να υπολογισθεί από την (1):

$$\bar{T} \cdot \delta = \sum \bar{N} \cdot \Delta L_{\text{κατ}}$$

*Παραμορφώσεις ράβδων από υποχώρηση στηρίξεων  $\Delta$*

Οι κατασκευές που θεμελιώνονται σε χαλαρά εδάφη είναι πιθανό να παρατηρηθεί υποχώρηση των στηρίξεων τους. Η υποχώρηση αυτή, όταν είναι διαφορική, συνοδεύεται από περιστροφή των μελών και μετακίνηση των κόμβων του φορέα. Αν ο φορέας είναι ισοστατικός, δεν αναπτύσσεται εσωτερική ένταση επειδή η κατασκευή μπορεί να αναπροσαρμοστεί στη νέα θέση στηρίξεων. Ενώ αν ο φορέας είναι υπερστατικός, η υποχώρηση των στηρίξεων μπορεί να συνοδευθεί από ανάπτυξη μεγάλων εσωτερικών δυνάμεων. Το μέγεθος των δυνάμεων αυτών είναι συνάρτηση της ακαμψίας των μελών του δικτυώματος. Καθώς ο φορέας υπόκειται σε υποχώρηση  $\Delta$  των στηρίξεων του, εκτός από το δυνατό φορτίο, οι αντιδράσεις  $\bar{R}$  στις μετατοπισμένες στηρίξεις παράγουν εξωτερικό έργο. Άρα η εξίσωση (1) διατυπώνεται ως

$$\bar{T} \cdot \delta + \sum \bar{R} \Delta = \sum \bar{N} \cdot \Delta L$$

Μεθοδολογία για τον προσδιορισμό των μετακινήσεων των κόμβων ενός δικτυώματος με βάση την ΑΔΕ:

*Πραγματική ένταση  $N$*

Για τη πραγματική φόρτιση, υπολογίζουμε τις αξονικές δυνάμεις  $N$  στις ράβδους του δικτυώματος (με τη μέθοδο των κόμβων ή τη μέθοδο των τομών).

*Δυνατή ένταση  $\bar{N}$*

Στον κόμβο που γίνεται η μετακίνηση, εφαρμόζουμε μια μοναδιαία δύναμη κατά τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης. Για τη φόρτιση αυτή, όπου δεν συμπεριλαμβάνει τα πραγματικά φορτία του φορέα, υπολογίζουμε τις αξονικές δυνάμεις  $\bar{N}$  στις ράβδους του δικτύωματος (με τη μέθοδο των κόμβων ή τη μέθοδο των τομών) και τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.

Άρα η διατύπωση της ΑΔΕ και ο προσδιορισμός της ζητούμενης μετακίνησης  $\delta$  είναι ως εξής:

$$\bar{T} \cdot \delta + \sum \bar{R} \Delta = \sum \bar{N} \cdot \Delta L = \sum \bar{N} \left( \frac{N}{EA} L + \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \Delta L_{\text{κατ}} \right)$$

Όπου  $\bar{T}$  = δυνατό εξωτερικό μοναδιαίο φορτίο, ασκούμενο σε κόμβο του δικτύωματος κατά τη διεύθυνση της μετακίνησης

$\delta$  = πραγματική μετακίνηση του θεωρούμενου κόμβου προκαλούμενη από πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{R}$  = οι αντιδράσεις στις μετατοπισμένες στηρίξεις λόγω του δυνατού εξωτερικού μοναδιαίου φορτίου

$\Delta$  = πραγματική υποχώρηση στηρίξεων

$\Delta L_{\text{κατ}}$  = κατασκευαστική ατέλεια

$N$  = εσωτερική αξονική δύναμη στη ράβδο του δικτύωματος προκαλούμενη από τα πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{N}$  = εσωτερική αξονική δύναμη στη ράβδο του δικτύωματος προκαλούμενη από το δυνατό εξωτερικό μοναδιαίο φορτίο

$L$  = μήκος,  $E$  = μέτρο ελαστικότητας,  $A$  = εμβαδόν διατομής,  $\alpha$  = συντελεστής θερμικής διαστολής.  $\Delta T$  = μεταβολή θερμοκρασίας

Αν η τιμή του  $\delta$  που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση είναι θετική, η μετακίνηση έχει την ίδια φορά με το επιβαλλόμενο μοναδιαίο φορτίο. Αντίθετα αν η τιμή είναι αρνητική, η μετακίνηση έχει αντίθετη φορά από τη φορά του επιβαλλόμενου μοναδιαίου φορτίου.

### 3.8.3 Η αρχή των Δυνατών Έργων για τις δοκούς και τα πλαίσια

Οι παραμορφώσεις στις δοκούς προκαλούνται από τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές. Οι παραμορφώσεις που προκαλούνται από τέμνουσες δυνάμεις σε δοκούς με κανονικές διαστάσεις είναι πολύ μικρές και συνήθως δεν λαμβάνονται υπόψη. Οι αξονικές παραμορφώσεις σε συνήθεις δοκούς είναι επίσης πολύ μικρές. Άρα αν δεν ορίζεται διαφορετικά, θα θεωρούμε μόνο παραμορφώσεις λόγω

καμπτικών ροπών. Η αρχή των δυνατών έργων σε δοκούς είναι αντίστοιχη με αυτή για δικτυώματα. Η μέθοδος συνίστανται στην εφαρμογή ενός δυνατού μοναδιαίου φορτίου για υπολογισμό μετατοπίσεων και μιας δυνατής μοναδιαίας ροπής για υπολογισμό στροφών. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\bar{W} = \bar{U}$$

*Παραμόρφωση δοκού λόγω καμπτικών ροπών M*

Οι παραμορφώσεις σε δοκούς και πλαίσια οφείλονται κυρίως σε καμπτικές ροπές. Η διατύπωση της ΑΔΕ έχει τη μορφή

$$\bar{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{M\bar{M}}{EI} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\bar{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{M\bar{M}}{EI} dx \quad \text{για στροφή}$$

Όπου  $\bar{T}$  = δυνατή εξωτερική μοναδιαία δύναμη ή ροπή

$\delta$  ή  $\theta$  = πραγματική μετακίνηση (μετατόπιση ή στροφή)

$M$  = ροπή που προκαλείται από τα πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{M}$  = ροπή που προκαλείται από τη δυνατή εξωτερική μοναδιαία φόρτιση

$E$  = μέτρο ελαστικότητας

$I$  = ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο βάρους

*Παραμόρφωση δοκού λόγω τεμνουσών δυνάμεων V*

Οι διατμητικές παραμορφώσεις σε συνήθεις δοκούς είναι εν γένει πολύ μικρές και η διατύπωση της ΑΔΕ έχει τη μορφή

$$\bar{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} K \frac{V\bar{V}}{GA} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\bar{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} K \frac{V\bar{V}}{GA} dx \quad \text{για στροφή}$$

Όπου

$K$  = συντελεστής που εξαρτάται από το σχήμα της διατομής

$K = 1.2$  για ορθογωνική διατομή

$K = 10/9$  για κυκλική διατομή

$V$  = τέμνουσα που προκαλείται από τα πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{V}$  = τέμνουσα που προκαλείται από τη δυνατή εξωτερική μοναδιαία φόρτιση

$G$  = μέτρο διάτμησης

$A$  = εμβαδόν διατομής

*Παραμόρφωση δοκού λόγω αξονικών δυνάμεων  $N$*

Οι αξονικές παραμορφώσεις σε συνήθεις δοκούς είναι γενικά πολύ μικρές και λαμβάνοντας τες υπόψη διατυπώνουμε την ΑΔΕ ως εξής:

$$\bar{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{\bar{N}N}{EA} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\bar{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{\bar{N}N}{EA} dx \quad \text{για στροφή}$$

Όπου

$N$  = αξονική δύναμη που προκαλείται από τα πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{N}$  = αξονική δύναμη που προκαλείται από τη δυνατή εξωτερική μοναδιαία φόρτιση

$E$  = μέτρο ελαστικότητας

$A$  = εμβαδόν διατομής

*Παραμόρφωση δοκού λόγω στρέψης  $T$*

Σε τρισδιάστατους φορείς συνήθως επιδρούν στρεπτικά φορτία. Λαμβάνοντας υπόψη τις στρεπτικές ροπές, η διατύπωση της ΑΔΕ έχει τη μορφή:

$$\bar{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{\bar{T}T}{GJ} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\bar{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{\bar{T}T}{GJ} dx \quad \text{για στροφή}$$

Όπου

$T$  = ροπή στρέψης που προκαλείται από τα πραγματικά φορτία του φορέα

$\bar{T}$  = ροπή στρέψης που προκαλείται από τη δυνατή εξωτερική μοναδιαία φόρτιση

$G$  = μέτρο διάτμησης

$J$  = πολική ροπή αδράνειας της διατομής ( $J = \pi^4/2$  για κυκλική διατομή)

Παραμόρφωση δοκού λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής  $\Delta T_m$

Όταν έχουμε θερμοκρασιακή μεταβολή η διατύπωση της ΑΔΕ παίρνει τη μορφή

$$\overline{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} \left( \frac{\alpha \Delta T_m}{c} \right) \overline{M} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\overline{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} \left( \frac{\alpha \Delta T_m}{c} \right) \overline{M} dx \quad \text{για στροφή}$$

Όπου

$\alpha$  = συντελεστής θερμικής διαστολής

$\Delta T_m$  = θερμοκρασιακή μεταβολή μεταξύ της μέσης θερμοκρασίας  $T_m = (T_1 + T_2)/2$  και της θερμοκρασιακής της πάνω ( $T_1$ ) ή της κάτω ίνας ( $T_2$ ).  $\Delta T_m = T_1 - T_m = T_m - T_2$

$c$  = (ύψος διατομής)/2

$\overline{M}$  = ροπή που προκαλείται από τη δυνατή εξωτερική μοναδιαία φόρτιση

Μεθοδολογία για προσδιορισμό της μετακίνησης (μετατόπισης ή στροφής) βάσει ΑΔΕ (θεωρώντας μόνο καμπτικές ροπές)

*Πραγματική ένταση  $M$*

Για τη πραγματική φόρτιση, υπολογίζουμε την καμπτική ροπή  $M$  που προκαλείται από τα πραγματικά φορτία

*Δυνατή ένταση  $\overline{M}$*

Στο σημείο που ζητείται η μετακίνηση, εφαρμόζουμε μια μοναδιαία δύναμη (ή ροπή) κατά τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης. Για τη φόρτιση αυτή, που δεν περιλαμβάνει τα πραγματικά δοσμένα φορτία του φορέα, υπολογίζουμε την καμπτική ροπή  $\overline{M}$ .

Διατύπωση της ΑΔΕ και προσδιορισμός της ζητούμενης μετακίνησης (μετατόπισης  $\delta$  ή στροφής  $\theta$ )

$$\overline{T} \cdot \delta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{M \overline{M}}{EI} dx \quad \text{για μετακίνηση}$$

$$\overline{T} \cdot \theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{M \overline{M}}{EI} dx \quad \text{για στροφή}$$

Το ολοκλήρωμα  $\int_{x=0}^{x=L} \frac{M \overline{M}}{EI} dx$  μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους:

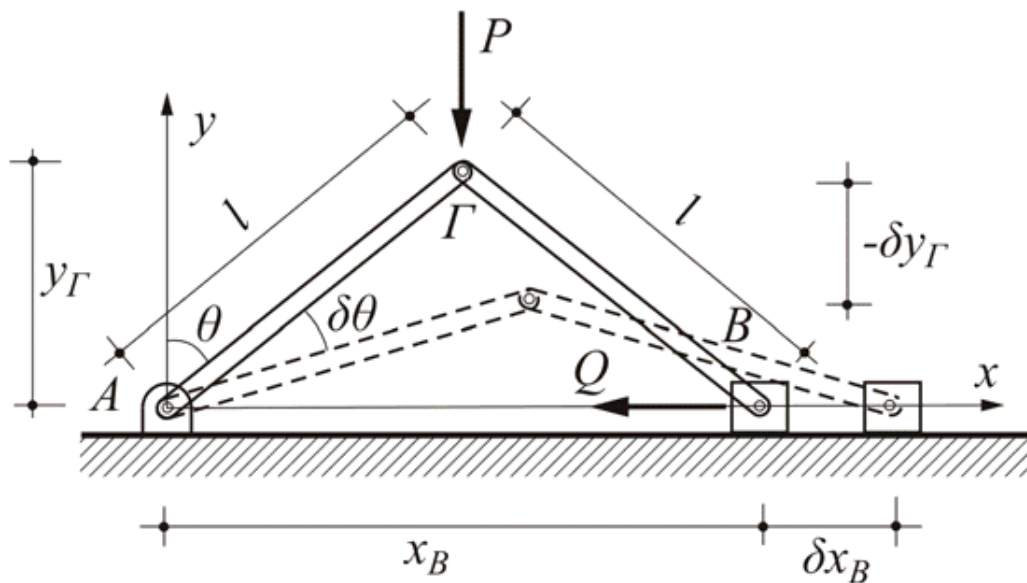
- Αναλυτικά εκφράζοντας τις ροπές  $M$  και  $\overline{M}$  συναρτήσει της απόστασης  $x$ .

- Από πίνακες αφού πρώτα σχεδιασθούν τα διαγράμματα  $[M]$  και  $[\bar{M}]$ .

Για τον υπολογισμό των ροπών  $M$  και  $\bar{M}$  χρησιμοποιούμε την κλασική σύμβαση πρόσημου δηλαδή η ροπή θεωρείται θετική όταν προκαλεί εφελκυσμό των κάτω ινών. Αν η τιμή του  $\delta$  ή  $\theta$  είναι θετική, η μετακίνηση (μετατόπιση ή στροφή) έχει την ίδια φορά με το επιβαλλόμενο φορτίο. Αντίστοιχα, αν η τιμή του  $\delta$  ή  $\theta$  είναι αρνητική, η μετακίνηση έχει αντίθετη φορά απ αυτήν του επιβαλλόμενου μοναδιαίου φορτίου.

### 3.8.4 Παράδειγμα εφαρμογής της ΑΔΕ

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα δύο ίσων ράβδων  $ΑΓ$  και  $ΓΒ$  όπως στο σχήμα 3.5, που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε με την κατακόρυφη δράση της  $P$ , η άρθρωση  $B$  να μετακινεί οριζόντια το σώμα με το οποίο συνδέεται με δύναμη  $Q$ . Να προσδιορισθεί η τιμή της δύναμης  $Q$  που πρέπει να ωθήσει το σώμα της κινητής άρθρωσης ώστε το σύστημα των ράβδων να ισορροπεί.



Σχήμα 3.5

Η διάταξη έχει ένα βαθμό ελευθερίας, τη στροφή της ράβδου  $ΑΓ$  γύρω από την άρθρωση  $A$ . Άρα η θέση της καθορίζεται από την τιμή της γωνίας  $\theta$ , η οποία είναι η παράμετρος του συστήματος. Για να υπολογίσουμε τις δυνατές μετατοπίσεις που εμφανίζονται στα διάφορα σημεία του συστήματος, η παράμετρος  $\theta$  παίρνει μια απειροστή αύξηση  $\delta\theta$ , με αποτέλεσμα το σημείο  $B$  να μετατοπιστεί οριζόντια κατά  $\delta x_B$  ενώ το  $\Gamma$  θα μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά  $\delta y_\Gamma$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις μετατοπίσεις από τις σχέσεις που εκφράζουν τις αποστάσεις των σημείων  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα από τους άξονες  $x$  και  $y$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ , διαφορίζοντας ως προς  $\theta$ .

Δηλαδή, από τις σχέσεις

$$x_B = 2l \eta\mu\theta \quad \text{και} \quad y_\Gamma = l \sigma\upsilon\nu\theta$$

και τις διαφορίσουμε ως προς την μεταβλητή γωνία  $\theta$ , έχουμε

$$\delta x_B = 2l \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \delta\theta \quad \text{και} \quad \delta y_\Gamma = -l \eta\mu\theta \cdot \delta\theta$$

χρησιμοποιούμε την σχέση της αρχής των δυνατών έργων μόνο για τις δυνάμεις  $P$  και  $Q$  αφού οι αντιδράσεις τόσο στην άρθρωση όσο και στην κύλιση δεν παράγουν έργο.

$$\sum \delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum P_i \sigma\upsilon\nu\alpha_i \delta s_i + \sum M_i \delta\theta_i = 0$$

Συνδυάζουμε την παραπάνω σχέση με τις σχέσεις των  $\delta x_B$  και  $\delta y_\Gamma$  και έχουμε:

$$\sum \delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad P \delta y_\Gamma - Q \delta x_B = 0$$

Το αρνητικό πρόσημο του  $\delta y_\Gamma$  εκφράζει τη μείωση της απόστασης του  $\Gamma$  με την αύξηση της γωνίας  $\theta$  και δεν συσχετίζεται με το πρόσημο του έργου που παράγει η  $P$  (επειδή αυτό είναι θετικό μόνον όταν η δύναμη είναι ομόφορη προς την μετατόπιση που πραγματοποιεί). Έτσι προέκυψε το αρνητικό πρόσημο του έργου της  $Q$  οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$P l \eta\mu\theta \cdot \delta\theta - Q 2l \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \delta\theta = 0$$

Και λύνοντας ως προς την ζητούμενη  $Q$  έχουμε

$$Q = \frac{P}{2} \varepsilon\varphi\theta$$

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε τα πλεονεκτήματα από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων διότι η δύναμη  $Q$  βρέθηκε χωρίς να ληφθούν υπόψη οι αντιδράσεις. Αν είχαμε υποθέσει αυθαίρετα ότι η φορά της  $Q$  είναι ομόφορη προς την μετατόπιση που προκαλεί, τότε το πρόσημο της θα προέκυπτε αρνητικό. Άρα αυτό θα σήμαινε ότι η σωστή φορά είναι αντίθετη από αυτή που είχαμε υποθέσει αρχικά.

### 3.9 Μέθοδος των Δυνάμεων

Η μέθοδος των υπεράριθμων δυνάμεων ή απλούστερα μέθοδος των δυνάμεων (ΜΔ) είναι μια από τις κλασικές μεθόδους ανάλυσης των υπερστατικών φορέων. Είναι μία από τις κλασικές μεθόδους που είναι κατάλληλη για υπολογισμούς «με το χέρι», στις μέρες μας όμως χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά μια πιο σύγχρονη μέθοδος, η μέθοδος Στιβαρότητας η οποία εκμεταλλεύεται πλήρως τις δυνατότητες του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Ωστόσο χρήζει μεγάλης σημασίας από διδακτικής πλευράς γιατί βοηθά α) να συνειδητοποιηθούν σε βάθος οι θεμελιώδεις προϋποθέσεις



και παραδοχές της Στατικής, β) να κατανοηθεί η βασική λογική της μεθοδολογίας επίλυσης υπερστατικών φορέων και γ) να αποσαφηνιστεί το γενικότερο οικοδόμημα αρχών και προτάσεων μέσα στο οποίο εντάσσονται οι επί μέρους μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών.

Ο υπολογισμός των υπερστατικών φορέων με τη μέθοδο των δυνάμεων βασίζεται στις αρχές της αποδέσμευσης και της επαλληλίας. Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με την αρχή της αποδέσμευσης η εντασιακή κατάσταση ενός δομικού φορέα δεν μεταβάλλεται λόγω κατάλυσης ενός συνδέσμου, αν στη θέση του καταλύομενου συνδέσμου προσαχθεί το αντίστοιχο εντασιακό μέγεθος. Η αρχή της επαλληλίας ισχύει μέσα στα πλαίσια της Γραμμικής Στατικής, όπου όλες οι σχέσεις μεταξύ μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης είναι γραμμικές, και επιτρέπει την αναγωγή πολύπλοκων προβλημάτων σε μία σειρά από απλούστερα προβλήματα, οι λύσεις των οποίων επαλληλιζόμενες (δηλαδή προστιθέμενες) συνθέτουν τη λύση του αρχικού προβλήματος. Στηριζόμενη σε αυτές τις αρχές, η επίλυση ενός υπερστατικού φορέα με τη ΜΔ βασίζεται στην αναγωγή του προβλήματος μέσω κατάλυσης επαρκούς πλήθους συνδέσμων ενός άλλου απλούστερου φορέα που ονομάζεται Στατικό Κύριο Σύστημα (ΣΚΣ), το οποίο είναι μικρότερης υπερστατικότητας από τον αρχικό φορέα και συνήθως είναι ένας ισοστατικός φορέας. Η κατάλυση των συνδέσμων έχει ως αποτέλεσμα (στο ΣΚΣ) το μηδενισμό των άγνωστων δυνάμεων που αυτές μεταβίβαζαν. Οι δυνάμεις αυτές λέγονται υπεράριθμες δυνάμεις και είναι οι άγνωστοι του προβλήματος. Επιπλέον με την κατάλυση των συνδέσμων επιτρέπονται στο ΣΚΣ οι μετακινήσεις που αυτές απαγόρευαν. Το ΣΚΣ επιλύεται με τις γνωστές στοιχειώδεις μεθόδους επίλυσης ισοστατικών φορέων για μια συγκεκριμένη σειρά φορτίσεων και στη συνέχεια με κατάλληλη επαλληλία ορισμένων μεγεθών που προκύπτουν από αυτές τις επιλύσεις καταστρώνονται οι επιλύουσες εξισώσεις του υπερστατικού φορέα. Όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί γίνονται στο παράγωγο ΣΚΣ και όχι στο δεδομένο υπερστατικό φορέα.

Οι επιλύουσες εξισώσεις της μεθόδου προκύπτουν από τις συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων με τους περιορισμούς που επιβάλλουν οι πραγματικοί σύνδεσμοι του προς επίλυση υπερστατικού φορέα. Η ικανοποίηση των εξισώσεων του συμβιβαστού των μετακινήσεων εξασφαλίζει τη συνέχεια της ελαστικής γραμμής του φορέα ή τη συμβατότητα των παραμορφώσεων με τη γεωμετρία που επιβάλλουν οι στηρίξεις. Σ' αυτές τις εξισώσεις, οι μετακινήσεις που πρέπει να συμβιβαστούν εκφράζονται συναρτήσει των άγνωστων υπεράριθμων δυνάμεων, οι οποίες προσδιορίζονται με την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που προκύπτει. Ύστερα από τον υπολογισμό των υπεράριθμων δυνάμεων η εντατική κατάσταση του πραγματικού φορέα προκύπτει με επίλυση του ΣΚΣ για το εξωτερικό αίτιο και ταυτόχρονη εφαρμογή στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων των γνωστών πλέον υπεράριθμων δυνάμεων που αυτοί μεταβιβάζουν στον πραγματικό υπερστατικό φορέα.

Αν και η μέθοδος των Δυνάμεων μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά είδη φορέων (δοκοί, δικτυώματα, πλαίσια, κελύφη κ.α.), ο υπολογιστικός φόρτος αυξάνεται εκθετικά με το βαθμό στατικής αοριστίας. Συνεπώς στην πράξη, η ΜΔ εφαρμόζεται σε φορείς με μικρό βαθμό στατικής αοριστίας.

### *Αναδιατύπωση των ορισμών στατικής και γεωμετρικής αοριστίας*

Για την καλύτερη κατανόηση τόσο της μεθόδου των δυνάμεων όσο και της μεθόδου των μετακινήσεων (αναλύεται παρακάτω) θα αναδιατυπώσουμε τους ορισμούς των «στατικά ορισμένου/αόριστου» και του «γεωμετρικά ορισμένου/αόριστου» φορέα.

#### *Ορισμός της στατικής αοριστίας*

Ονομάζουμε ένα φορέα στατικά ορισμένο ή ισοστατικό, αν η έντασή του (ροπές, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις, αντιδράσεις στηρίξεων κτλ.) μπορεί να υπολογισθεί με στοιχειώδη τρόπο, δηλαδή με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας. Αν αυτές δεν επαρκούν για τον υπολογισμό της έντασης του φορέα τότε ονομάζεται στατικά αόριστος ή υπερστατικός. Αν οι διαθέσιμες εξισώσεις ισορροπίας είναι περισσότερες από τα άγνωστα μεγέθη τότε ο φορέας χαρακτηρίζεται ως χαλαρός δηλ. κινηματική αλυσίδα (μηχανισμός).

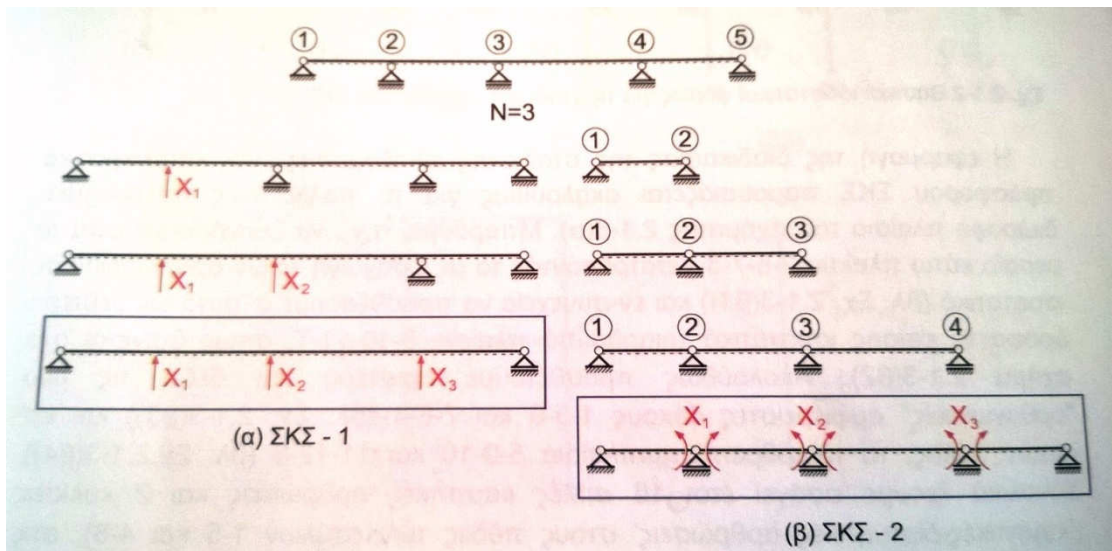
#### *Ορισμός της γεωμετρικής αοριστίας*

Ονομάζουμε ένα φορέα γεωμετρικά ορισμένο ή ισογεωμετρικό, αν η παραμόρφωση του (μετατοπίσεις, στροφές κτλ.) μπορεί να υπολογιστεί με στοιχειώδη τρόπο. Αν η παραμόρφωση του φορέα δεν μπορεί να υπολογισθεί με στοιχειώδη τρόπο, τότε ο φορέας χαρακτηρίζεται ως γεωμετρικά αόριστος ή υπεργεωμετρικός.

### **3.9.1 Στατικό κύριο σύστημα**

Για να προσδιορίσουμε το βαθμό υπερστατικότητας ενός φορέα συνήθως ακολουθούμε ένα από τους δύο τρόπους που ακολουθούν:

- ❖ Με τη σταδιακή αποδόμηση του δεδομένου φορέα, κατά την οποία καταλύονται σταδιακά δεσμικές ράβδοι (εσωτερικές ή/και εξωτερικές) του δεδομένου φορέα, δηλαδή εισάγονται καμπτικές, διατμητικές ή αξονικές αρθρώσεις μέχρι να θεωρηθεί ισοστατικός. Αυτός ο ισοστατικός παράγωγος φορέας ονομάζεται στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ).
- ❖ Με τη σταδιακή οικοδόμηση του ΣΚΣ, σύμφωνα με την οποία ξεκινάς από ένα κατάλληλο ισοστατικό φορέα και προσθέτεις (συνδέεις) σ' αυτόν σταδιακά γνωστούς ισοστατικούς φορείς δημιουργώντας έτσι ένα σύνθετο ισοστατικό φορέα που έχει την ίδια δομή (γεωμετρία και ελαστικές ιδιότητες των δομικών στοιχείων) με τον δεδομένο υπερστατικό φορέα. Έτσι ο ισοστατικός φορέας που δημιουργήσαμε ονομάζεται στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ).



Σχήμα 3.6

Προσδιορισμός ενός ΣΚΣ με σταδιακή αποδόμηση (α) και με σταδιακή οικοδόμηση (β)

Ας αναλύσουμε τους δύο παραπάνω τρόπους με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Έστω ότι έχουμε την τρεις φορές υπερστατική δοκό του σχήματος 3.6. Αποδομώντας τη συνεχή δοκό με σταδιακή αφαίρεση των στηρίξεων 2, 3 και 4 (δηλαδή με τον πρώτο τρόπο) καταλήγουμε στο ΣΚΣ-1 του σχήματος. Εναλλακτικά αν χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο τρόπο, μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα ΣΚΣ ξεκινώντας από την ισοστατική αμφιέρειστη δοκό 1-2 και προσθέτοντας σ' αυτήν σταδιακά τις ισοστατικές δοκούς 2-3, 3-4 και 4-5, οικοδομώντας έτσι το ΣΚΣ-2 από επί μέρους ισοστατικούς υποφορείς. Επειδή το ζητούμενο είναι όσο πιο λίγες αριθμητικές πράξεις για την επίλυση ενός φορέα όταν αυτή γίνεται «χειρονακτικά», ως καταλληλότερη επιλογή του ΣΚΣ μπορεί να θεωρηθεί κατ' αρχάς εκείνη που ελαχιστοποιεί την αλληλεπίδραση μεταξύ των υπεραρίθμων μεγεθών. Έτσι, το ΣΚΣ-2 υπερτερεί υπολογιστικά του ΣΚΣ-1. Κατά κανόνα, ο καθορισμός του ΣΚΣ γίνεται αποτελεσματικότερα με τη σταδιακή οικοδόμηση και όχι με την σταδιακή αποδόμηση του δεδομένου υπερστατικού φορέα, παρόλο που τα ΣΚΣ που προκύπτουν θεωρούνται σε κάθε περίπτωση επί της ουσίας ισότιμα. Βασικοί ισοστατικοί φορείς που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά την σταδιακή οικοδόμηση ενός ΣΚΣ είναι ο πρόβολος, η αμφιέρειστη δοκός και διάφορες παραλλαγές της καθώς και το τριαρθρωτό πλαίσιο ή ημιπλαίσιο σε διάφορες μορφές.

### Υπεράριθμα μεγέθη

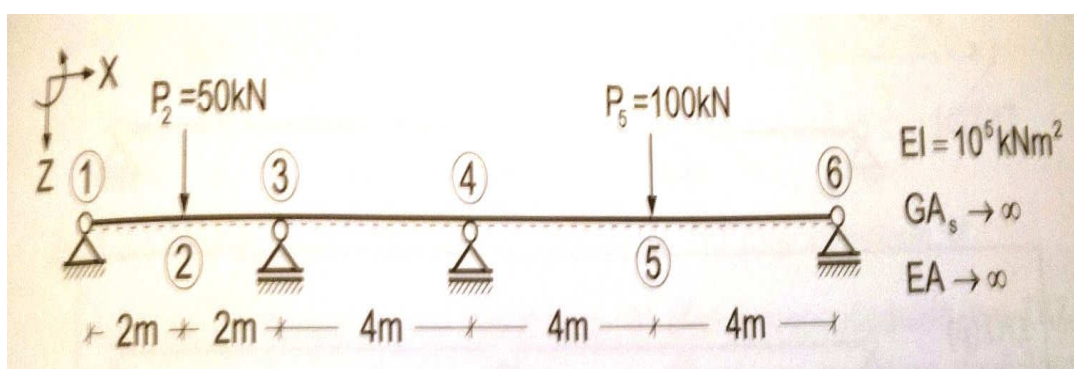
Το πλήθος  $N$  των συνδέσμων, δηλαδή των δρομικών και στροφικών δεσμικών ράβδων που καταλύθηκαν προκειμένου να προκύψει το ΣΚΣ του δεδομένου φορέα ισούται με το πλήθος των υπεράριθμων στατικών μεγεθών της ΜΔ. Τα υπεράριθμα μεγέθη της ΜΔ είναι εντασιακά μεγέθη, δηλαδή δυνάμεις (αντιδράσεις στηρίξεων,

τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις) ή/και ροπές (ροπές πακτώσεων, ροπές κάμψης και σε χωρικούς φορείς, ροπές στρέψης). Επομένως πρόκειται για διαφορετικά φυσικά μεγέθη που μετριοούνται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης ([kN] ή [kNm]). Η σειρά αρίθμησης των αγνώστων (υπεράριθμων) μεγεθών έντασης είναι προφανώς στη διακριτική ευχέρεια του μελετητή. Ακόμα, είναι αυτονόητο ότι η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μεγεθών έχει συμβατικό χαρακτήρα και ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της επίλυσης. Όμως η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μεγεθών επηρεάζει τη δομή των επιλυσιών εξισώσεων (πιο συγκεκριμένα τη δομή του μητρώου ενδοσιμότητας) και κατά συνέπεια τον όγκο των αριθμητικών πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση τους. Επομένως, η σειρά αρίθμησης μπορεί να διευκολύνει ή να δυσχεράνει τη διαδικασία επίλυσης, χωρίς όμως αυτό να επηρεάζει τις αριθμητικές τιμές των αποτελεσμάτων.

Επομένως εκτός από την «έξυπνη» επιλογή του ΣΚΣ πρέπει να γίνει και «έξυπνη» αρίθμηση των υπεράριθμων μεγεθών προκειμένου να μειωθεί ο υπολογιστικός όγκος κατά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων της ΜΔ.

### 3.9.2 Βήματα επίλυσης με την μέθοδο των δυνάμεων

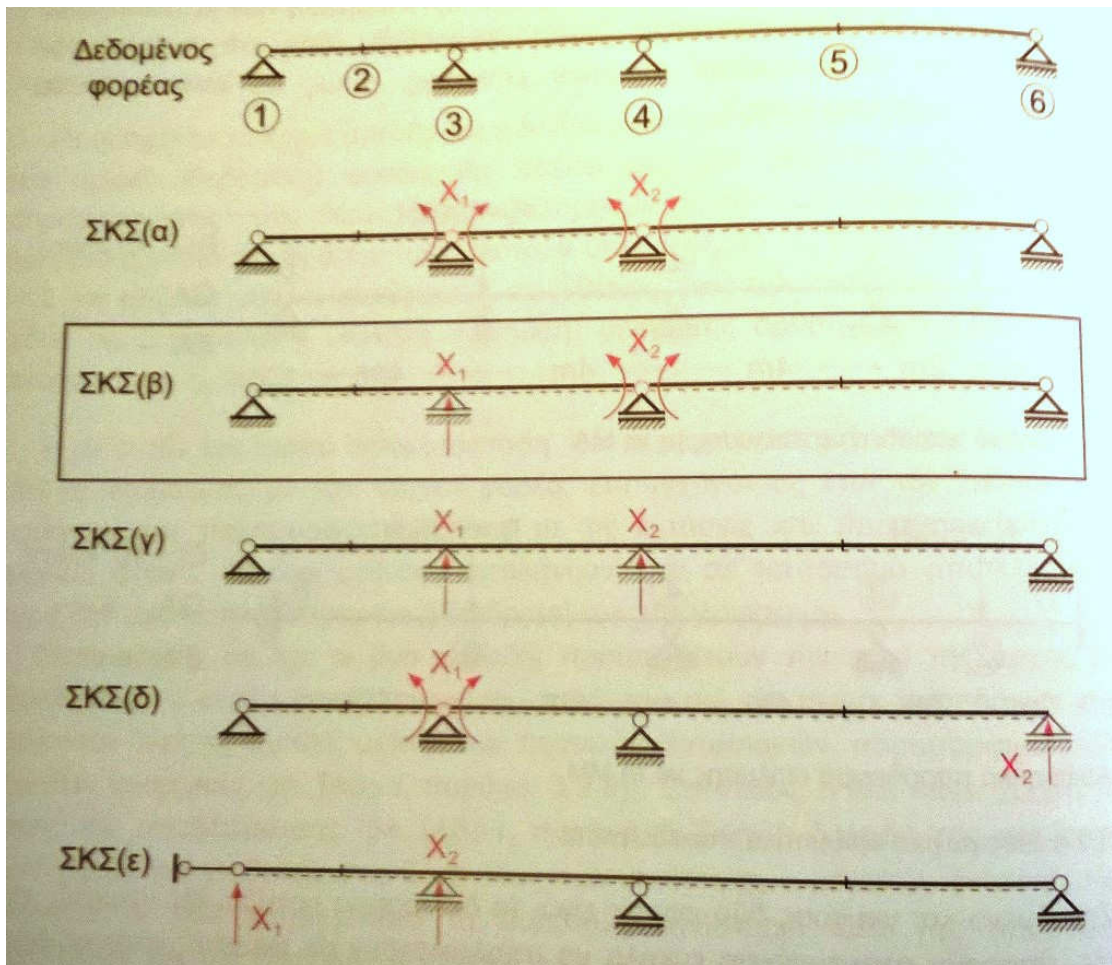
Έστω ότι έχουμε μια συνεχή δοκό τριών ανοιγμάτων (σχήμα 3.7). Είναι (με δεδομένη την ατένεια της) τέσσερις φορές γεωμετρικά αόριστη (τέσσερις άγνωστες στροφές κόμβων), ενώ δύο μόνο φορές στατικά αόριστη. Θεωρείται άτμητη ( $GA_s \rightarrow \infty$ ) και ( $EA \rightarrow \infty$ ) και άρα υφίσταται μόνο καμπτικές παραμορφώσεις υπό την επίδραση των κατακόρυφων φορτίων του. Το ζητούμενο είναι το διάγραμμα ροπών. Ύστερα με γνωστές ροπές, μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με γνωστές στοιχειώδεις μεθόδους όλα τα υπόλοιπα στατικά μεγέθη (π.χ. τέμνουσες δυνάμεις, μετατοπίσεις, στροφές, κτλ). Παρακάτω περιγράφονται τα βήματα επίλυσης του φορέα με την ΜΔ.



Σχήμα 3.7

*Βήμα 1<sup>ο</sup> : Καθορισμός του ΣΚΣ – Κατάλυση συνδέσμων*

Τα πιθανά ΣΚΣ για την επίλυση του δεδομένου φορέα είναι άπειρα σε αριθμό ενώ η επιλογή του ΣΚΣ που θα χρησιμοποιηθεί τελικά δεν έχει καμία επίπτωση στα αποτελέσματα. Έτσι, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα παρακάτω ΣΚΣ του σχήματος 3.8. Γενικά, από υπολογιστικής πλευράς μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε τα υπεράριθμα μεγέθη έτσι ώστε η μεταξύ τους αλληλεπίδραση να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

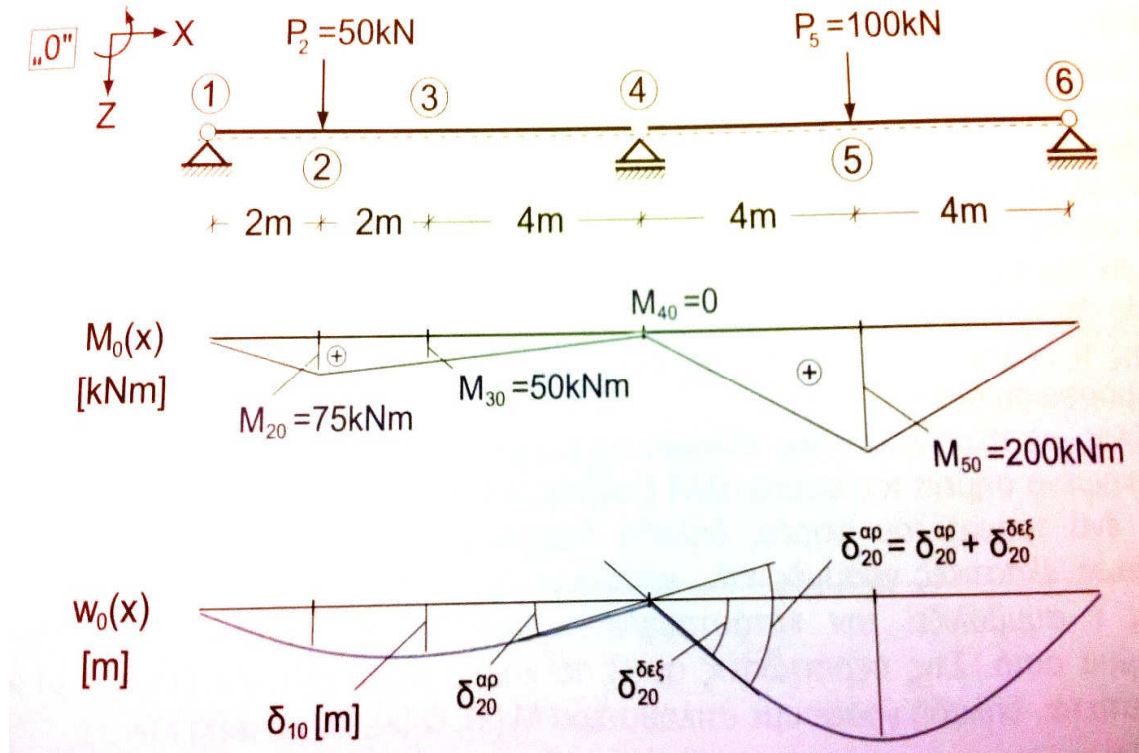


Σχήμα 3.8

Το ΣΚΣ (α) αποτελεί την βέλτιστη επιλογή αλλά για διδακτικούς λόγους επιλέγουμε το ΣΚΣ (β) το οποίο προκύπτει με κατάλυση της στήριξης στο σημείο 3 και κατάλυση του εσωτερικού συνδέσμου που μεταφέρει ροπές κάμψης στο σημείο 4. Η αρίθμηση των υπεράριθμων εντασιακών μεγεθών  $X_m$  γενικώς δεν συμπίπτει (και δεν είναι αναγκαίο να συμπίπτει) με την αρίθμηση των διαφόρων σημείων κόμβων του φορέα.

*Βήμα 2<sup>ο</sup> : Εξωτερικές δράσεις στο ΣΚΣ (κατάσταση «0»)*

Η κατάσταση έντασης και παραμόρφωσης του φορέα υπό την επίδραση της εξωτερικής φόρτισης χαρακτηρίζεται ως κατάσταση «0». Τα εντασιακά και παραμορφωσιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στο ΣΚΣ στην κατάσταση «0» χαρακτηρίζονται με τον δείκτη 0 (δείκτης αίτιου).



Σχήμα 3.9

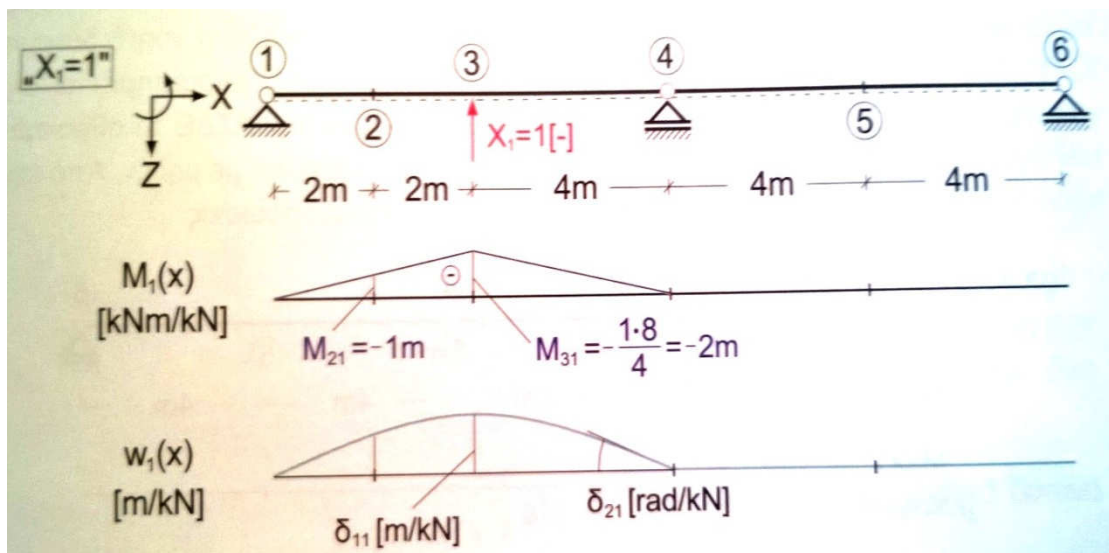
Αυτό που μας ενδιαφέρει στην κατάσταση «0» είναι η παραμόρφωση, η οποία στα σημεία κατάλυσης συνδέσμων τραυματίζει τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων (δηλαδή το ακλόνητο της στήριξης στο σημείο 3 και τη συνέχεια των στροφών στο σημείο 4) που ισχύουν στον πραγματικό φορέα. Διότι οι παραμορφώσεις  $\delta_{10}$  και  $\delta_{20}$  δεν υπάρχουν στο πραγματικό φορέα και για τον υπολογισμό αυτών των παραμορφώσεων, όπου θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ ή αρχή των νοητών ή βοηθητικών δυνάμεων), χρειαζόμαστε τα εντασιακά μεγέθη (N,Q,M) που αναπτύσσονται στην κατάσταση «0». Το διάγραμμα ροπών και η ελαστική γραμμή του ΣΚΣ στην κατάσταση «0» απεικονίζονται στο σχήμα 3.9. Παρατηρούμε ότι λόγω της κατάλυσης της στήριξης στον κόμβο 3 και λόγω της άρθρωσης στον κόμβο 4 αναπτύσσονται εκεί μετατόπιση  $\delta_{10}$  και άλμα στροφής  $\delta_{20}$  και άρα το συμβιβαστό των παραμορφώσεων τραυματίζεται σε σχέση με τον δεδομένο φορέα.

*Βήμα 3<sup>ο</sup> : Μοναδιαίες καταστάσεις στο ΣΚΣ (“ $X_n=1$ ”)*

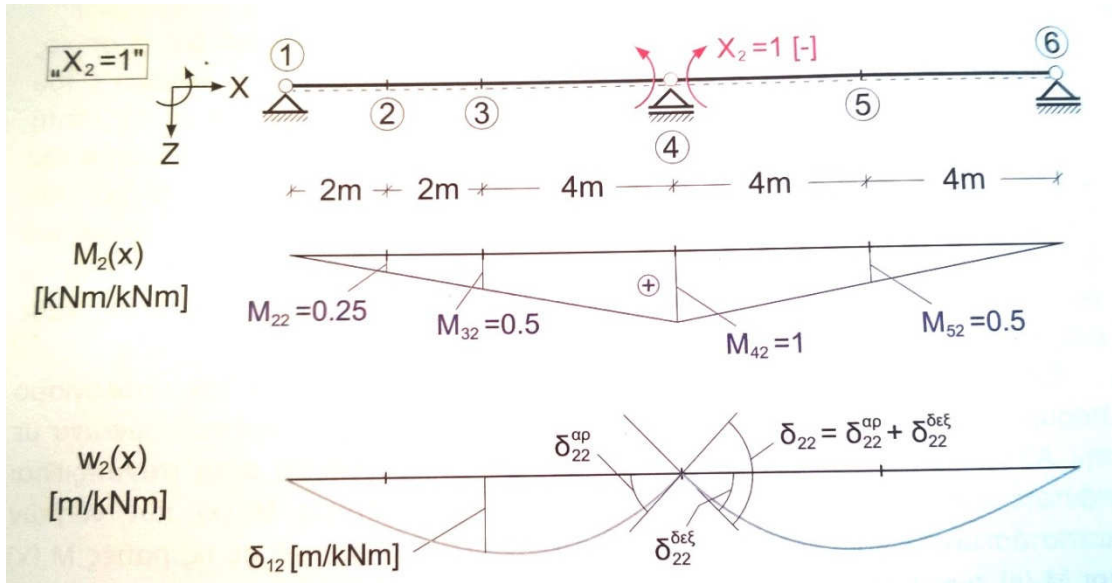
Τα στατικά (εντασιακά και παραμορφωσιακά) μεγέθη που αναπτύσσονται στο ΣΚΣ στις καταστάσεις μοναδιαίας έντασης “ $X_n=1$ ” χαρακτηρίζονται με τον δείκτη αίτιου n. Επειδή η υπερστατική δοκός του παραδείγματος μας είναι δύο φορές υπερστατική ο δείκτης n παίρνει τις τιμές 1 και 2. Παρόλο που οι υπεράριθμες  $X_1$

είναι δύναμη και μετριέται σε [kN] και η  $X_2$  είναι ροπή που μετριέται σε [kNm], οι μοναδιαίες φορτίσεις εισάγονται ως αδιάστατες. Αυτό δηλώνεται με την παύλα στις αγκύλες που ακολουθούν τη μονάδα  $X_n=1[-]$  αν και συνήθως γράφουμε απλά  $X_n=1$ . Η αδιάστατη εισαγωγή των μοναδιαίων φορτίσεων γίνεται σκόπιμα γιατί, όπως θα δούμε παρακάτω στο βήμα 5, με τον τρόπο αυτό οι τελικές υπεράριθμες προκύπτουν με διαστάσεις που αντιστοιχούν στην φυσική τους σημασία. Όμως, στις μοναδιαίες καταστάσεις επιβάλλονται μια αδιάστατη δύναμη και μια αδιάστατη ροπή αντίστοιχα, δηλαδή δύναμη ίση με 1 και όχι 1kN και ροπή ίση με 1 και όχι 1kNm.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι και πάλι η παραμόρφωση του ΣΚΣ, η οποία τραυματίζει τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων στα σημεία 3 και 4, οι οποίες ισχύουν στον πραγματικό φορέα. Για να υπολογίσουμε αυτές τις παραμορφώσεις χρειάζονται οι ροπές που αναπτύσσονται στις καταστάσεις " $X_1=1$ " και " $X_2=1$ " οι οποίες υπολογίζονται με τις γνωστές μεθόδους για ισοστατικούς φορείς. Τα διαγράμματα ροπών και οι ελαστικές γραμμές του ΣΚΣ για τις καταστάσεις " $X_1=1$ " και " $X_2=1$ " απεικονίζονται στα σχήματα 3.10 και 3.11 αντίστοιχα.



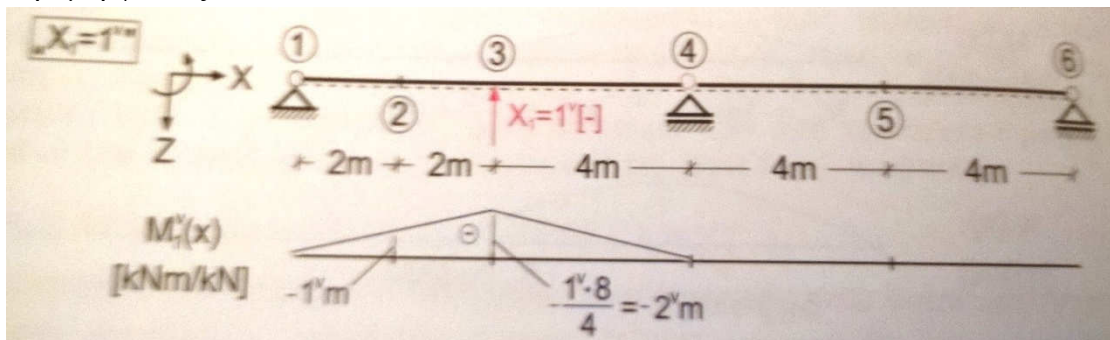
Σχήμα 3.10



Σχήμα 3.11

Βήμα 4<sup>ο</sup> : Υπολογισμός των παραμορφώσεων στους καταλυθέντες συνδέσμους

Όπως προαναφέραμε, ο υπολογισμός των παραμορφώσεων  $\delta_{m0}$  και  $\delta_{mn}$  ( $n, m = 1, 2$ ) στους καταλυθέντες συνδέσμους θα γίνει με τη βοήθεια της ΑΣΔΕ η οποία ως γνωστόν ισοδυναμεί με τις συνθήκες συμβιβαστού. Έτσι, για να υπολογισθούν οι παραμορφώσεις  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{11}$  και  $\delta_{12}$ , οι οποίες εμφανίζονται στο σημείο εισαγωγής του υπεράριθμου μεγέθους  $X_1$  (σημείο 3 του φορέα), προσάγουμε στο σημείο 3 του ΣΚΣ μια μοναδιαία νοητή δύναμη  $X_1=1^V$  και καταγράφουμε τα συμπληρωματικά δυνατά έργα που παράγει η προκαλούμενη ένταση (εδώ: οι ροπές) επί των παραμορφώσεων (εδώ: στροφών και καμπυλοτήτων) των καταστάσεων “0”, “ $X_1=1$ ” και “ $X_2=1$ ” ξεχωριστά. Ακόμα χρειάζεται να υπολογισθούν οι ροπές  $M_1^V(x)$  που προκαλεί η νοητή δύναμη  $X_1=1^V$  στο ΣΚΣ. Η κατάσταση έντασης στο ΣΚΣ λόγω  $X_1=1^V$  χαρακτηρίζεται ως νοητή μοναδιαία κατάσταση έντασης “ $X_1=1^V$ ”. Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ το άθροισμα των συμπληρωματικών δυνατών έργων που παράγονται ισούται με το μηδέν. Από την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζονται οι ζητούμενες παραμορφώσεις.



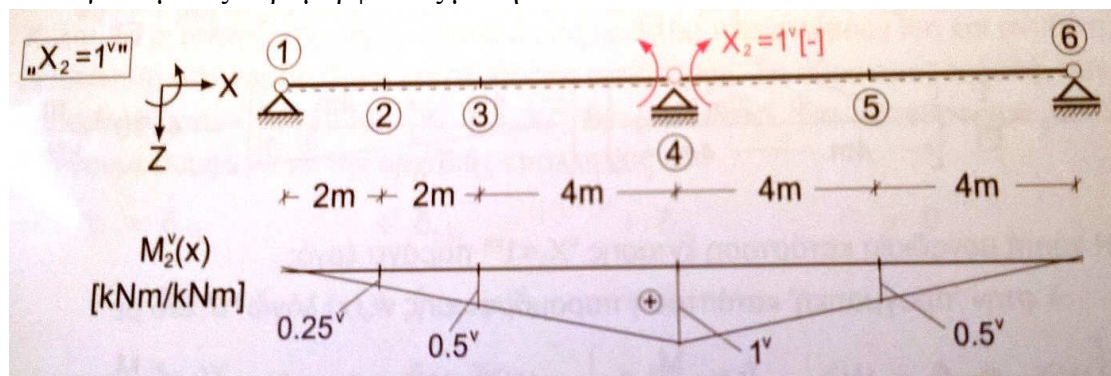
Σχήμα 3.12



Αντίστοιχα, για να υπολογισθούν οι παραμορφώσεις  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{21}$  και  $\delta_{22}$  οι οποίες εμφανίζονται στο σημείο εισαγωγής του υπεράριθμου μεγέθους  $X_2$  (σημείο 4 του φορέα) κάνουμε τις εξής ενέργειες

- Θεωρούμε την νοητή μοναδιαία κατάσταση έντασης “ $X_2=1^v$ ”, δηλαδή προσάγουμε στην άρθρωση 4 του ΣΚΣ τη μοναδιαία νοητή ροπή  $X_2=1^v$
- Υπολογίζουμε τις ροπές  $M_2^v(x)$  που προκαλεί η νοητή ροπή  $X_2=1^v$  στο ΣΚΣ και
- Μηδενίζουμε τα συμπληρωματικά δυνατά έργα που παράγει η προκαλούμενη λόγω  $X_2=1^v$  νοητή ένταση επί των παραμορφώσεων κάθε μιας των καταστάσεων “0”, “ $X_1=1$ ” και “ $X_2=1$ ”.

Οι νοητές μοναδιαίες καταστάσεις που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό παραμορφώσεων στα σημεία των καταλυθέντων συνδέσμων πρέπει σύμφωνα με την ΑΣΔΕ να είναι καταστάσεις ισορροπίας. Η προϋπόθεση αυτή ικανοποιείται πάντοτε στο ΣΚΣ. Παρατηρούμε ότι οι ροπές  $M_1^v(x)$  και  $M_2^v(x)$  των νοητών καταστάσεων “ $X_1=1^v$ ” και “ $X_2=1^v$ ” αντίστοιχα. Γι’ αυτό, καθαρά αριθμητικά, αντί των νοητών ροπών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές ροπές προκειμένου να υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις με την ΑΣΔΕ.



Σχήμα 3.13

*Βήμα 5<sup>ο</sup>: Ικανοποίηση των συνθηκών συμβιβαστού – Αποκατάσταση της συνέχειας των καταλυθέντων συνδέσμων*

Η μετατόπιση  $\delta_{10}$  που εμφανίζεται στο σημείο 3 του ΣΚΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης δεν υφίσταται στον πραγματικό (υπερστατικό) φορέα. Στο σημείο 3 του πραγματικού φορέα υπάρχει στήριξη και άρα δεν μπορεί να αναπτυχθεί εκεί καμία μετατόπιση, δηλαδή ισχύει  $\delta_1=0$ . Προκειμένου να ικανοποιηθεί η τραυματισμένη συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων, θα πρέπει να αρθεί η ασυμβατότητα αυτή. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δράση στο ΣΚΣ των υπεράριθμων  $X_1$  και  $X_2$ , οι οποίες εάν λάβουν κατάλληλες τιμές θα προκαλέσουν ίση και αντίθετη μετατόπιση στο 3 του καταλυθέντος συνδέσμου. Το άθροισμα, δηλαδή, των παραμορφώσεων λόγω “0”, “ $X_1=1$ ” και “ $X_2=1$ ” θα μηδενιστεί. Για το άθροισμα αυτό έχουμε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας:

$$\begin{aligned}
\delta_1 = & \delta_{1,X_1} & + \delta_{1,X_2} & + \delta_{10} & = 0 \\
& \delta_{1,X_1=1} \cdot X_1 & + \delta_{1,X_2=1} \cdot X_2 & + \delta_{10} & = 0 \\
& \delta_{11} \cdot X_1 & + \delta_{12} \cdot X_2 & + \delta_{10} & = 0 \\
& \left(\frac{32}{3} \cdot 10^{-5}\right) \cdot X_1 + (-4 \cdot 10^{-5}) \cdot X_2 & + \left(-\frac{1100}{3} \cdot 10^{-5}\right) & = 0
\end{aligned}$$

Για το άλμα στροφής (γόνατο)  $\delta_{20}$  που εμφανίζεται στο σημείο 4 του ΣΚΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης παίρνουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \delta_{2,X_1} & + \delta_{2,X_2} & + \delta_{20} & = 0 \\
& \delta_{2,X_1=1} \cdot X_1 & + \delta_{2,X_2=1} \cdot X_2 & + \delta_{20} & = 0 \\
& \delta_{21} \cdot X_1 & + \delta_{22} \cdot X_2 & + \delta_{20} & = 0 \\
& (-4 \cdot 10^{-5}) \cdot X_1 + \left(\frac{16}{3} \cdot 10^{-5}\right) \cdot X_2 & + (525 \cdot 10^{-5}) & = 0
\end{aligned}$$

Η επίλυση του συστήματος που σχηματίζεται από τις παραπάνω εξισώσεις (για  $\delta_1$  και  $\delta_2$ ) μας δίνει εκείνες ακριβώς τις τιμές των υπεράριθμων  $X_1$  και  $X_2$  για τις οποίες οι ασυμβατότητες (μετατόπιση στο σημείο 3 και άλμα στροφής στο σημείο 4) του ΣΚΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης αίρονται, εφόσον αυτό φορτιστεί ταυτόχρονα με τα εξωτερικά φορτία και με τις  $X_1$  και  $X_2$ . Δηλαδή οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες αίρεται η ασυνέχεια στα σημεία των καταλυθέντων συνδέσμων. Άρα πρόκειται για εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Από την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων έχουμε

$$\delta_1 = -3,53 \text{ kN}, \quad \delta_2 = -101,09 \text{ kNm}$$

*Βήμα 6<sup>ο</sup> : Υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών*

Για τον υπολογισμό των τελικών εντασιακών μεγεθών του δεδομένου υπερστατικού φορέα χρησιμοποιούμε για μια ακόμη φορά την αρχή της επαλληλίας. Για τις ροπές στα σημεία 2,3,4 και 5 του φορέα έχουμε:

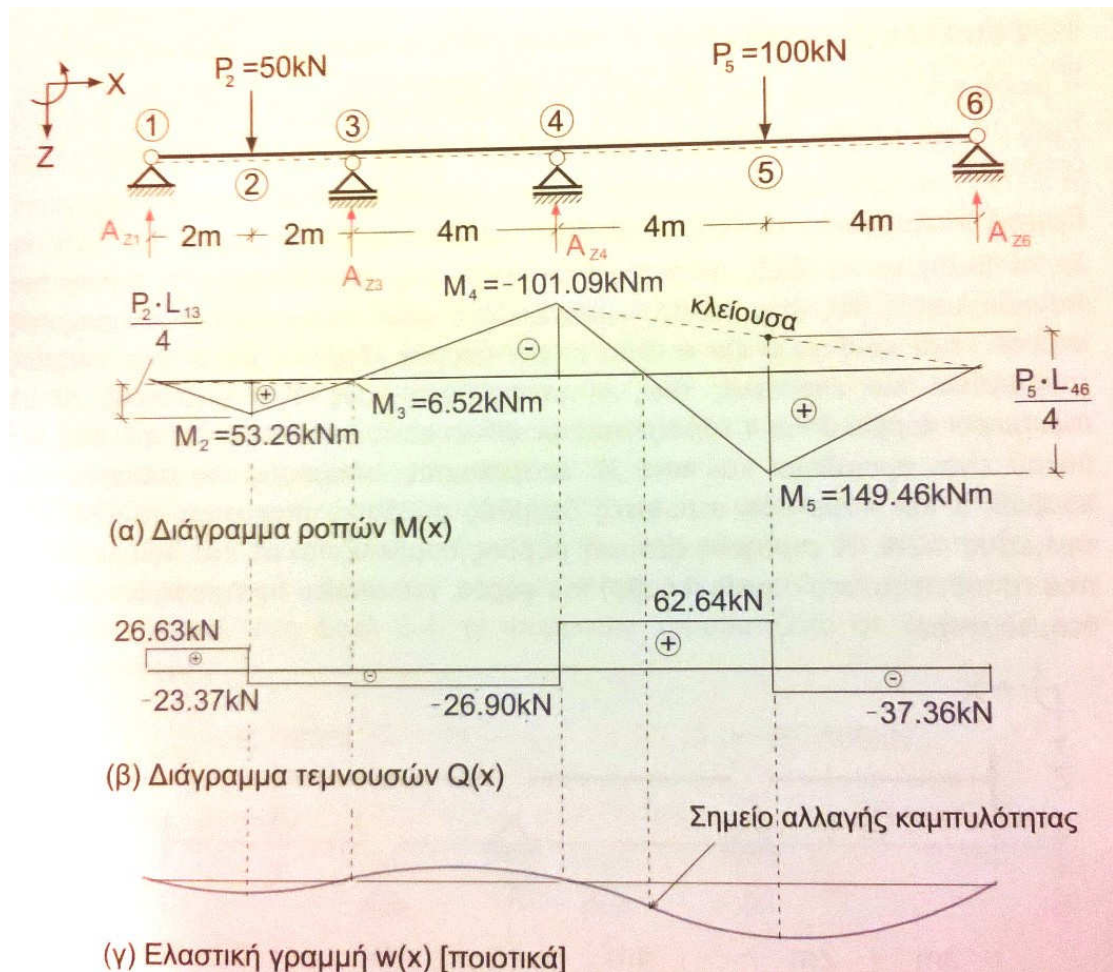
$$M_2 = M_{20} + M_{21} \cdot X_1 + M_{22} \cdot X_2 = 53,26 \text{ kNm}$$

$$M_3 = M_{30} + M_{31} \cdot X_1 + M_{32} \cdot X_2 = 6,52 \text{ kNm}$$

$$M_4 = M_{40} + M_{41} \cdot X_1 + M_{42} \cdot X_2 = -101,09 \text{ kNm}$$

$$M_5 = M_{50} + M_{51} \cdot X_1 + M_{52} \cdot X_2 = 149,46 \text{ kNm}$$

Από τις ροπές  $M(x)$  υπολογίζονται οι τέμνουσες  $Q(x)$  είτε βάσει των συνθηκών ισορροπίας είτε χρησιμοποιώντας άμεσα τη γνωστή διαφορική εξίσωση  $Q(x) = -M'(x)$ . Τα διαγράμματα ροπών και τεμνουσών δίνονται στο σχήμα 3.14 μαζί με την ποιοτική εικόνα της ελαστικής γραμμής  $w(x)$ .



Σχήμα 3.14

Βήμα 7<sup>ο</sup> : Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Οι έλεγχοι αποτελεσμάτων είναι σημαντικό και αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας επίλυσης. Οι έλεγχοι ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα κάνοντας χρήση των τελικών αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα απλοί. Έτσι, για να ελέγξουμε την ικανοποίηση της συνθήκης ισορροπίας  $\sum P_Z = 0$  υπολογίζουμε πρώτα τις κατακόρυφες αντιδράσεις στηρίξεων

$$A_{Z1} = Q_{13} = 26.63\text{kN}$$

$$A_{Z3} = Q_{34} - Q_{31} = -26.90 - (-23.37) = -3.53\text{kN}$$

$$A_{Z4} = Q_{46} - Q_{43} = 62.64 - (-26.90) = 89.54\text{kN}$$

$$A_{Z6} = -Q_{64} = -(-37.36) = 37.36\text{kN}$$

Με τις οποίες παίρνουμε

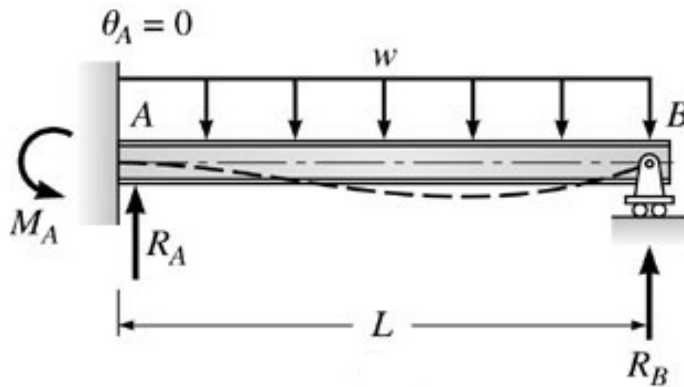
$$\sum P_Z = P_2 + P_5 - A_{Z1} - A_{Z3} - A_{Z4} - A_{Z6} =$$

$$50 + 100 - 26,63 - (-3,53) - 89,54 - 37,36 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η ισορροπία κατά  $Z$  ικανοποιείται.

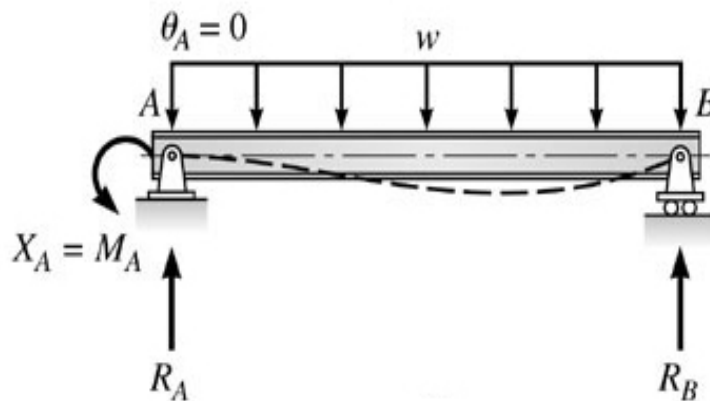
### 3.9.3 Παράδειγμα επίλυσης φορέα της μεθόδου των Δυνάμεων

Να επιλυθεί η δοκός του σχήματος 3.15 με τη Μέθοδο των Δυνάμεων αφού αφαιρεθεί η δέσμευση  $M_A$  από την πάκτωση στο σημείο  $A$ .



Σχήμα 3.15

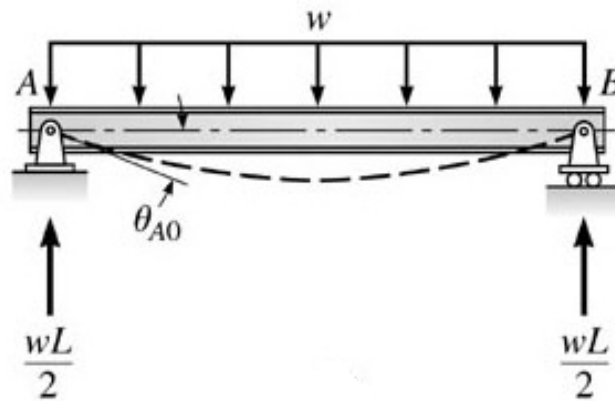
Παρατηρούμε ότι ο φορέας είναι μια φορά υπερστατικός. Αφαιρώντας τη δέσμευση  $M_A$ , η πάκτωση μετατρέπεται σε άρθρωση. Στο επόμενο σχήμα (3.16) φαίνεται το ΣΚΣ με την αρχική φόρτιση  $w$  και την άγνωστη δύναμη  $X_A$  στο σημείο που αφαιρέσαμε την δέσμευση.



Σχήμα 3.16

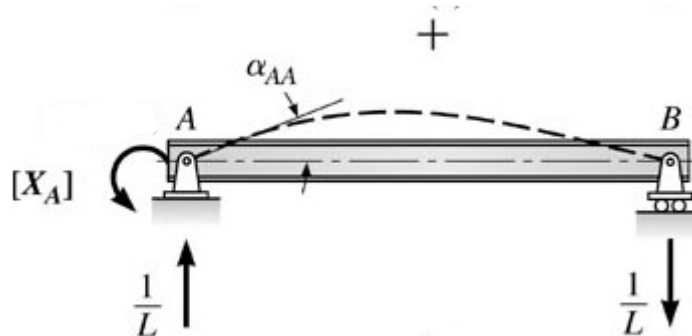
Η ανάλυση του ΣΚΣ ανάγεται σε επαλληλία δύο αναλύσεων:

- Λόγω της δοσμένης εξωτερικής φόρτισης (σχήμα 3.17)



Σχήμα 3.17

- Και λόγω του υπερστατικού μεγέθους  $X_A$  (σχήμα 3.18)



Σχήμα 3.18

Η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων σ αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\theta_A = 0$$

Επομένως, το άθροισμα της μετακίνησης λόγω της δοσμένης εξωτερικής φόρτισης  $\theta_{A0}$  και της μετακίνησης λόγω της δέσμευσης που αφαιρέθηκε  $\theta_{AA}X_A$  πρέπει να ισούται με μηδέν

$$\theta_{A0} + \theta_{AA}X_A = 0$$

όπου  $\theta_{A0}$  = στροφή λόγω ομοιόμορφου κατανεμημένου φορτίου  $w$

$\theta_{AA}$  = στροφή λόγω μοναδιαίου φορτίου στο σημείο A όπου αφαιρέθηκε η  $M_A$

$X_A$  = υπερστατικό μέγεθος (άγνωστη δέσμευση που αφαιρέθηκε) στο σημείο A

### 3.9.4 Θεώρημα Betti –Maxwell

Το θεώρημα Betti –Maxwell διατυπώνεται ως εξής:

Σε ελαστικό σώμα, που ακολουθεί το νόμο του Hooke, έχει αμετάβλητη θερμοκρασία και στηρίζεται ακλόνητα και πάνω του ενεργούν εξωτερικά φορτία, το άθροισμα των δυνατών έργων των εξωτερικών δυνάμεων μιας φόρτισης  $P_m$ , για τις παραμορφώσεις που οφείλονται μόνο σε φόρτιση  $P_n$ , η οποία είναι ανεξάρτητη από τη φόρτιση  $P_m$ , ισούται με το άθροισμα των δυνατών έργων της φόρτισης  $P_n$  για τις παραμορφώσεις, που οφείλονται μόνο στη φόρτιση  $P_m$ , η οποία είναι ανεξάρτητη από τη φόρτιση  $P_n$  δηλαδή:

$$\sum P_m \cdot \delta_{mn} = \sum P_n \cdot \delta_{nm}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Αν τα  $P_m, P_n$  είναι μονάδες φόρτισης (μοναδιαία φορτία) τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$1 \cdot \delta_{mn} = 1 \cdot \delta_{nm} \quad \therefore \delta_{mn} = \delta_{nm}$$

Αυτό επίσης ονομάζεται και θεώρημα της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων.

2. Αν το  $P_m$  είναι ροπή, τότε το  $\delta$  θα είναι γωνία στροφής.
3. Αν το  $P_m$  είναι δύναμη, τότε το  $\delta$  θα είναι μετακίνηση.

Το θεώρημα Betti –Maxwell είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην ανάλυση υπερστατικών φορέων, καθώς η εφαρμογή του επιφέρει μείωση του υπολογιστικού φόρτου αφού κάποιοι δείκτες ευκαμψίας προκύπτουν κατευθείαν βάση αυτής της συμμετρίας.

### 3.10 Μέθοδος των Μετακινήσεων

Η μέθοδος των Μετακινήσεων (ΜΔ) είναι μία από τις κλασικές μεθόδους επίλυσης των υπερστατικών φορέων κατάλληλη για υπολογισμούς «με το χέρι». Η μέθοδος των Μετακινήσεων καθώς και η μέθοδος των Δυνάμεων διατηρούν αμείωτη τη διδακτική τους αξία παρόλο που στις μέρες γίνεται χρήση των σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων που είναι προσανατολισμένες στη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ενασχόληση με την ΜΜ βοηθάει στην ανάπτυξη μιας καλύτερης αντίληψης των παραμορφώσεων που υφίσταται ένας φορέας. Επίσης, αποτελεί τη βάση και το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την ευκολότερη εμπέδωση των σύγχρονων μητρικών μεθόδων.

Στη μέθοδο των Δυνάμεων (ή Ευκαμψίας), που αναλύσαμε παραπάνω, επιλέγουμε ως άγνωστα υπερστατικά μεγέθη αντιδράσεις ή εσωτερικές δράσεις. Ο αριθμός των άγνωστων υπερστατικών μεγεθών ισούται με τη στατική αοριστία του φορέα. Στη μέθοδο των Μετακινήσεων (ή ακαμψίας) επιλέγουμε ως άγνωστα μεγέθη τις μετακινήσεις των κόμβων του φορέα (μετατοπίσεις και στροφές). Ο αριθμός των

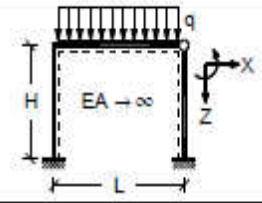
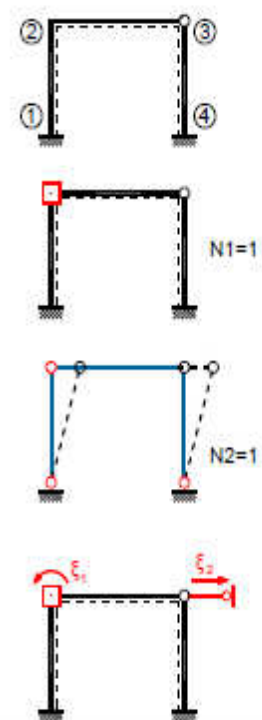
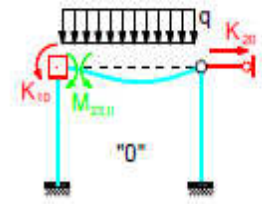
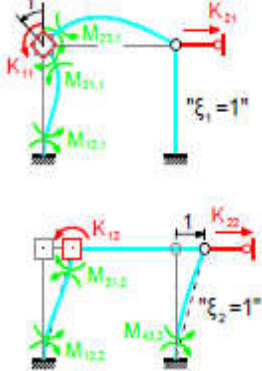
ανεξάρτητων αγνώστων μετακινήσεων ισούται με το βαθμό κινηματικής αοριστίας του φορέα. Κατά την επίλυση φορέων με την MM χρησιμοποιείται το γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ) το οποίο προκύπτει από τον αρχικό φορέα με τη δικινητή πάκτωση (δέσμευση των στροφών) και ταυτόχρονη παγίωση (δέσμευση των μετατοπίσεων) όλων των κόμβων του χρησιμοποιώντας φανταστικές «μέγγενες». Το ΓΚΣ είναι μεγαλύτερης υπερστατικότητας από τον αρχικό φορέα. Η αναγωγή αυτή γίνεται με την προσθήκη υποθετικών δεσμικών ράβδων για να προκύψει το ΓΚΣ που αποτελείται από αμφίπακτες και μονόπακτες δοκούς και υπολογίζεται εύκολα. Όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί μέσα στα πλαίσια της MM γίνονται όχι στο υπερστατικό φορέα, αλλά στο παράγωγο ΓΚΣ. Η προσθήκη αυτών των δεσμικών ράβδων έχει ως συνέπεια να μηδενίζονται οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων του φορέα που είναι και οι άγνωστοι του προβλήματος. Επιπλέον, οι σύνδεσμοι που προστίθενται στους κόμβους μεταβιβάζουν αντιδράσεις που ανατρέπουν την ισορροπία των κόμβων του αρχικού φορέα στον οποίο δεν υπάρχουν αυτοί οι σύνδεσμοι. Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η μέθοδος των μετακινήσεων στηρίζεται στην αρχή της επαλληλίας.

Υπάρχουν τρεις διαφορετικές μέθοδοι μετακινήσεων: η μέθοδος γωνιών στροφής (ΜΓΣ), η μέθοδος Επικόμβιων Μετατοπίσεων (MEM) και η μέθοδος των Μετατοπίσεων με Κατανομή των Ροπών (ΜΚΡ ή Cross).

#### *Κινηματική αοριστία*

Όταν σε ένα φορέα ασκούνται φορτία με αποτέλεσμα να παραμορφώνεται, τότε μερικοί από τους κόμβους τους να υποβάλλονται σε άγνωστες μετακινήσεις (μετατοπίσεις και στροφές). Το σύνολο των αγνώστων ανεξάρτητων συνιστωσών των μετακινήσεων των κόμβων ενός φορέα αποτελεί τους βαθμούς ελευθερίας (β.ε.) κίνησής τους ή τον βαθμό κινηματική αοριστίας (ΒΚΑ) του.

### 3.10.1 Βήματα επίλυσης με τη μέθοδο των μετακινήσεων

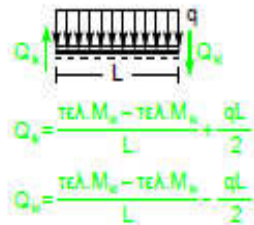
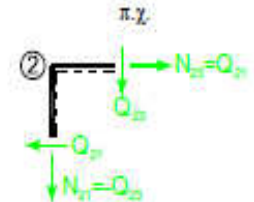
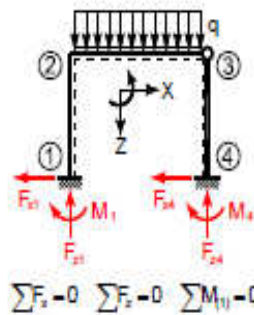
<p>Δεδομένος φορέας και φόρτιση</p>	
<p><b>Βήμα 1: Καθορισμός του ΓΚΣ – Προσθήκη συνδέσεων</b></p> <p>(i) Καθορισμός (και αρίθμηση) των κόμβων του φορέα, έτσι ώστε τα μεγέθη έντασης κάθε δομικού στοιχείου να μπορούν να υπολογιστούν από έτοιμους πίνακες.</p> <p>(ii) Καθορισμός των <math>N1</math> ανεξάρτητων άγνωστων στροφών κόμβων και δέσμευση των στροφών αυτών με δικινητές πακτώσεις.</p> <p>(iii) Καθορισμός (ενδεχομένως με τη βοήθεια του σχηματισμού ράβδων) του ελάχιστου απαιτούμενου πλήθους <math>N2</math> των ανεξάρτητων άγνωστων μετατοπίσεων κόμβων ή άγνωστων στροφών χορδών των δοκών και δέσμευση των μετατοπίσεων των κόμβων με δρομικές δεσμικές ράβδους ή των στροφών χορδών με δικινητές πακτώσεις αντίστοιχα.</p> <p>(iv) Αρίθμηση όλων των <math>N=N1+N2</math> πρόσθετων συνδέσεων του ΓΚΣ και καθορισμός της συμβατικά θετικής φοράς (γενικώς: κατά την έννοια των αξόνων του καθολικού συστήματος αναφοράς) των αντίστοιχων υπεραριθμών μεγεθών. Κατά προτίμηση, η αρίθμηση θα πρέπει να γίνεται με τρόπο που να ελαχιστοποιεί το εύρος του μητρώου στιβαρότητας.</p>	
<p><b>Βήμα 2: Υπολογισμός της εντασιακής κατάστασης του ΓΚΣ λόγω εξωτερ. φόρτισης "0"</b></p> <p>Υπολογίζονται οι ροπές <math>M_{ik,0}</math> (ενδεχομένως και οι τέμνουσες <math>Q_{ik,0}</math> και οι αξονικές δυνάμεις <math>N_{ik,0}</math>) στα άκρα των δομικών στοιχείων i-k του ΓΚΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης (φορτία και καταναγκασμοί) με τη βοήθεια πινάκων</p>	
<p><b>Βήμα 3: Υπολογισμός των εντασιακών καταστάσεων του ΓΚΣ λόγω μοναδιαίων παραμορφωσιακών μεγεθών "<math>\xi_n=1</math>" (<math>n = 1, 2, \dots, N</math>).</b></p> <p>Επιβάλλονται διαδοχικά στο ΓΚΣ οι <math>N</math> μοναδιαίοι καταναγκασμοί "<math>\xi_n=1</math>" (<math>n=1, \dots, N</math>). Όταν επιβάλλεται ο καταναγκασμός "<math>\xi_n=1</math>", όλες οι άλλες μετακινήσεις <math>\xi_m</math> με <math>m \neq n</math> θεωρούνται μηδενικές. Σε κάθε μία κατάσταση "<math>\xi_n=1</math>" υπολογίζονται οι ροπές <math>M_{ik,n}</math> (ενδεχομένως και οι τέμνουσες <math>Q_{ik,n}</math> και οι αξονικές δυνάμεις <math>N_{ik,n}</math>) στα άκρα των δομικών στοιχείων με τη βοήθεια πινάκων</p>	

Σχήμα 3.19



<p><b>Βήμα 4: Υπολογισμός των αντιδράσεων <math>K_{m0}</math> και <math>K_{mm}</math> στους προστεθέντες συνδέσμους</b></p> <p>4α. Από τα εντασιακά μεγέθη του βήματος 2 (<math>M_{k,0}</math>, <math>Q_{k,0}</math>, <math>N_{k,0}</math>), υπολογίζονται οι αντιδράσεις <math>K_{m0}</math> (δυνάμεις, ροπές) στις <math>N</math> προστεθείσες (δρομικές, στροφικές) δεσμικές ράβδους με τις συνθήκες ισορροπίας <math>\Sigma M=0</math> κόμβων ή με την ΑΔΕ (Αρχή Δυνατών Έργων ή Δυνατών Μετακινήσεων). Για την εφαρμογή της ΑΔΕ, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε το μόνο άγνωστο μέγεθος, που κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση εκτελεί έργο, να είναι η εκάστοτε ζητούμενη αντίδραση. Προκύπτουν, έτσι, οι συντελεστές φόρτισης <math>K_{m0}</math> (<math>m=1, \dots, N</math>).</p>	$K_{10} = M_{23,0}$ $K_{20} = 0$
<p>4β. Από τα εντασιακά μεγέθη του βήματος 3 (<math>M_{k,m}</math>, <math>Q_{k,m}</math>, <math>N_{k,m}</math>), υπολογίζονται οι αντιδράσεις <math>K_{mm}</math> (δυνάμεις, ροπές) στις <math>N</math> προστεθείσες (δρομικές, στροφικές) δεσμικές ράβδους με τις συνθήκες ισορροπίας <math>\Sigma M=0</math> κόμβων ή με την ΑΔΕ. Για την εφαρμογή της ΑΔΕ, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε το μόνο άγνωστο μέγεθος, που κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση εκτελεί έργο, να είναι η εκάστοτε ζητούμενη αντίδραση. Προκύπτουν, έτσι, οι συντελεστές σιβαρότητας <math>K_{mm}</math> (<math>m, n=1, \dots, N</math>).</p>	$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1}$ $K_{21} = \frac{(M_{12,1} + M_{21,1})}{H}$ $K_{12} = M_{21,2}$ $K_{22} = \frac{(M_{12,2} + M_{21,2})}{H} + \frac{M_{43,2}}{H}$
<p><b>Βήμα 5: Κατάστροψη και επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας</b></p> <p>(i) Καταστρώνεται το γραμμικό σύστημα των επιλυουσών εξισώσεων ισορροπίας:  <math>[K_{mm}] [\xi_m] + [K_{m0}] = [0] \quad (m, n = 1, 2, \dots, N)</math>  <u>Ελεγχοι:</u> Εφόσον οι αντιδράσεις <math>K_{mm}</math> και <math>K_{m0}</math> εισήχθησαν κατά την έννοια των <math>\xi_m</math>, θα πρέπει:</p> <p>(α) το μητρώο σιβαρότητας <math>[K_{mm}]</math> να είναι συμμετρικό, δηλαδή <math>K_{mm} = K_{mm}</math> και</p> <p>(β) οι διαγώνιοι συντελεστές <math>K_{mm}</math> να είναι θετικοί, δηλαδή <math>K_{mm} &gt; 0</math>, και μάλιστα όλες οι συνεισφορές, από τις οποίες αυτοί συντίθενται, να είναι θετικές.</p> <p>(ii) Το σύστημα εξισώσεων επιλύεται (π.χ. με την μέθοδο Gauss) λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία, οπότε προκύπτουν οι άγνωστες μετακινήσεις:</p> $[\xi_m] = - [K_{mm}]^{-1} [K_{m0}].$ <p>(Για <math>N=2</math> και <math>N=3</math> δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 3 έτοιμοι τύποι για τον άμεσο υπολογισμό των αγνώστων.)</p>	$\left. \begin{aligned} K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} &= 0 \\ K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} &= 0 \end{aligned} \right\}$ $\Rightarrow \xi_1, \xi_2$

Σχήμα 3.20

<p><b>Βήμα 6: Υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών</b></p> <p>(i) Ροπές κάμψης          Πρώτα υπολογίζονται οι τελικές ροπές <math>M_{ik}</math> στα άκρα των στοιχείων i-k με την αρχή της επαλληλίας:  <math>M_{ik} = M_{ik,0} + \sum (M_{ik,n} \cdot \xi_n)</math> για <math>n = 1, 2, \dots, N</math></p> <p>(ii) Τα πρόσημα των κομβικών ροπών <math>M_{ik}</math> τροποποιούνται, έτσι ώστε να αντιστοιχούν στη σύμβαση προσήμων βάσει ίνας αναφοράς <math>\rightarrow</math> τελ. <math>M_{ik}</math>.</p> <p>(iii) Σχεδιάζονται τα διαγράμματα των ροπών.</p> <p>(iv) Τέμνουσες δυνάμεις          Από τις τελικές ροπές τελ. <math>M_{ik}</math> υπολογίζονται οι τέμνουσες δυνάμεις <math>Q_{ik}</math> στα άκρα των στοιχείων i-k με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και σχεδιάζονται τα διαγράμματά τους.</p> <p>(v) Αξονικές δυνάμεις</p> <p>- <i>Κινητοί και πάγιοι φορείς:</i> Με γνωστές τις τελικές τέμνουσες, υπολογίζονται από τις συνθήκες ισορροπίας στους κόμβους οι αξονικές δυνάμεις <math>N_{ik}</math> στα άκρα των στοιχείων i-k και σχεδιάζονται τα διαγράμματά τους. Εναλλακτικά, οι αξονικές δυνάμεις μπορούν να υπολογιστούν με θεώρηση του σχηματισμού ράβδων, που προκύπτει από τον δεδομένο φορέα με εισαγωγή πλήρων αρθρώσεων σε όλους τους κόμβους του. Ο (χαλαρός ή ισοστατικός) σχηματισμός ράβδων φορτίζεται κατάλληλα με τις κομβικές δυνάμεις <math>A_{ik}</math> και επιλύεται ως δικτύωμα κατά τα γνωστά.</p> <p>- <i>Υπερπάγιοι φορείς:</i> Ο σχηματισμός ράβδων υπερπάγιων φορέων είναι ένα υπερστατικό δικτύωμα, οπότε ο (προσεγγιστικός) υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων απαιτεί άρση της παραδοχής της ατένειας και εφαρμογή της ΜΔ</p>	<p>π.χ.  <math>M_{23} = M_{23,0} + M_{23,1} \cdot \xi_1 + M_{23,2} \cdot \xi_2</math></p> <p>Πρόσημα MM <math>\left( \frac{M_{ik}}{M_{ik}} \right)</math></p> <p>Πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς <math>\left( \frac{\text{τελ. } M_{ik}}{\text{τελ. } M_{ik}} \right)</math></p> <p>τελ. <math>M_{ik} = -M_{ik}</math>    τελ. <math>M_{ik} = M_{ik}</math></p> <p>Τέμνουσες:</p>  <p>π.χ.</p> 
<p><b>Βήμα 7: Έλεγχοι αποτελεσμάτων</b></p> <p>Η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα ολοκληρώνεται με την διενέργεια ενός επαρκούς πλήθους ελέγχων (ισορροπίας και συμβιβαστού) των αποτελεσμάτων</p>	 <p><math>\sum F_x = 0</math>    <math>\sum F_z = 0</math>    <math>\sum M_{(1)} = 0</math></p>

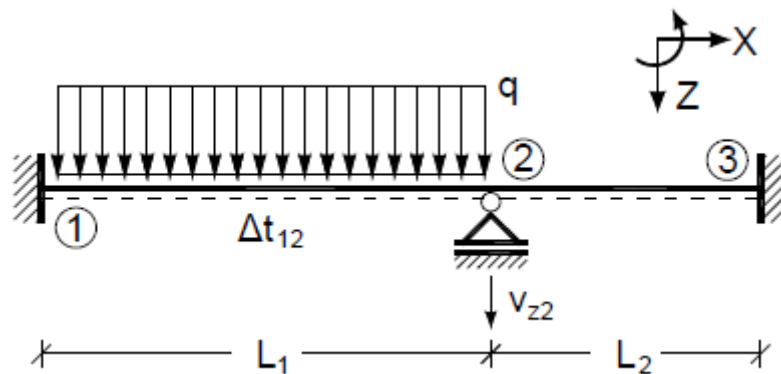
Σχήμα 3.21

### 3.10.2 Παράδειγμα επίλυσης φορέα με τη μέθοδο των μετακινήσεων

Έστω ότι έχουμε το φορέα του σχήματος 3.22. Να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών  $M$  και τεμνουσών  $Q$  για ταυτόχρονη δράση των  $q$ ,  $v_{z2}$  και  $\Delta t_{12}$ .

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

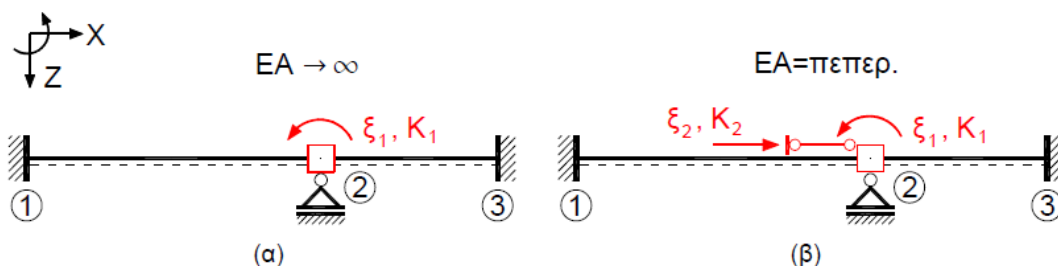
Γεωμετρία:	Φόρτιση:	Δοκοί / Στύλοι:
$L_1 = 5.00\text{m}$	$q = 15 \text{ kN/m}$	$EI = 10^5 \text{ kNm}^2$
$L_2 = 3.00\text{m}$	$v_{z2} = 0.03\text{m}$	$EA \rightarrow GAs \rightarrow \infty$
	$\Delta t_{12} = + 25^\circ\text{C}$	$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
		$h = 0.60 \text{ m}$



Σχήμα 3.22

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Καθορισμός του γεωμετρικού κυρίου συστήματος (ΓΚΣ)

Οι κόμβοι 1 και 3 του φορέα είναι πλήρως πακτωμένοι και επομένως δεν μπορούν να εμφανίσουν ούτε μετατοπίσεις ούτε στροφές. Ο κόμβος 2 δεν μπορεί να μετατοπιστεί κατακορύφως, λόγω της ακλόνητης κατά  $z$  στήριξης του αλλά ούτε και οριζοντίως γιατί αυτό θα είχε ως συνέπεια την αυξομείωση του μήκους των εκατέρωθεν δοκών (κάτι που απαγορεύει η παραδοχή της ατένειας). Επομένως, ως μοναδικός βαθμός ελευθερίας, δηλαδή μοναδική δυνατότητα μετακίνησης μένει η στροφή του κόμβου αυτού. Άρα, το ΓΚΣ προκύπτει πακτώνοντας δικινητά τον κόμβο 2 (σχήμα 3.23 (α) για ατενείς και (β) μη ατενείς δοκοί).

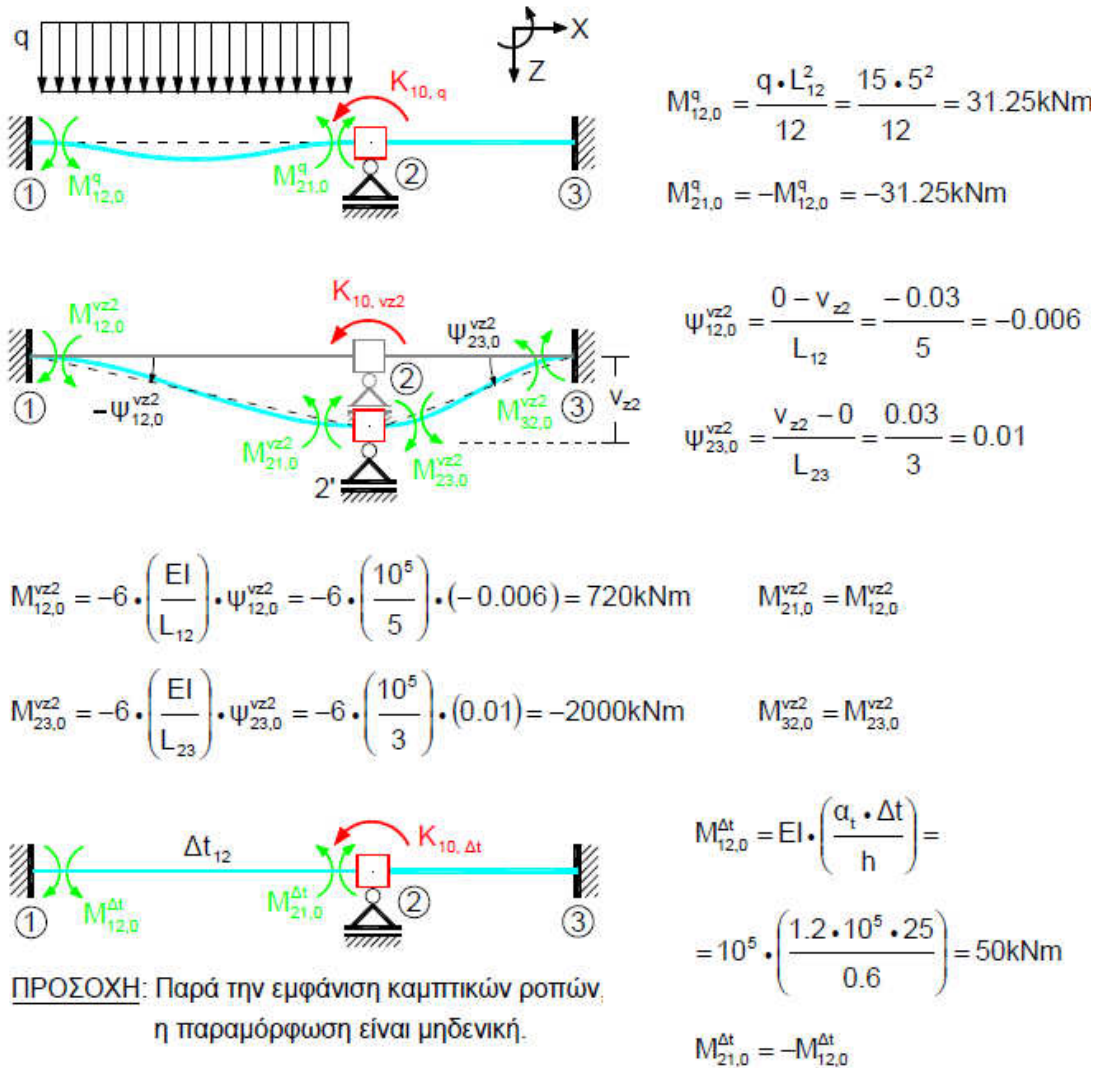


Σχήμα 3.23

Στην περίπτωση κατά την οποία η δυστένεια των δοκών είναι πεπερασμένη, ο κόμβος 2 αποκτά τη δυνατότητα οριζόντιας μετατόπισης (δηλαδή μετατόπισης κατά τη διεύθυνση του άξονα x). Οπότε, στην περίπτωση αυτή το ΓΚΣ προκύπτει με ταυτόχρονη πάκτωση και οριζόντια παγίωση του κόμβου 2 (3.23β). Σε αυτή την περίπτωση, θα επιλέξουμε το ΓΚΣ (α) του σχήματος 3.23.

*Βήμα 2<sup>ο</sup>: Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης “0”*

Η κατάσταση “0” είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλονται εξωτερικά φορτία στο ΓΚΣ ενός φορέα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εξωτερική φόρτιση συντίθεται από τρία διαφορετικά φορτία (q, v<sub>z2</sub> και Δt<sub>12</sub>). Τότε, τα μεγέθη έντασης της κατάστασης “0” προκύπτουν από την επαλληλία των μεγεθών έντασης που αναπτύσσονται λόγω του καθενός από τα τρία αυτά φορτιστικά αίτια. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραμορφωμένες μορφές του ΓΚΣ για κάθε ένα φορτιστικό αίτιο ξεχωριστά, καθώς και τα απαιτούμενα για την περαιτέρω πορεία επίλυσης μεγέθη έντασης.



Σχήμα 3.24

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας και με βάση το παραπάνω σχήμα μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές της κατάστασης “0” του ΓΚΣ ως άθροισμα των αντίστοιχων ροπών λόγω των τριών επί μέρους φορτίων.

$$M_{12,0} = M_{12,0}^q + M_{12,0}^{vz2} + M_{12,0}^{Dt} = 31.25 + 720 + 50 = 801.25 \text{ kNm}$$

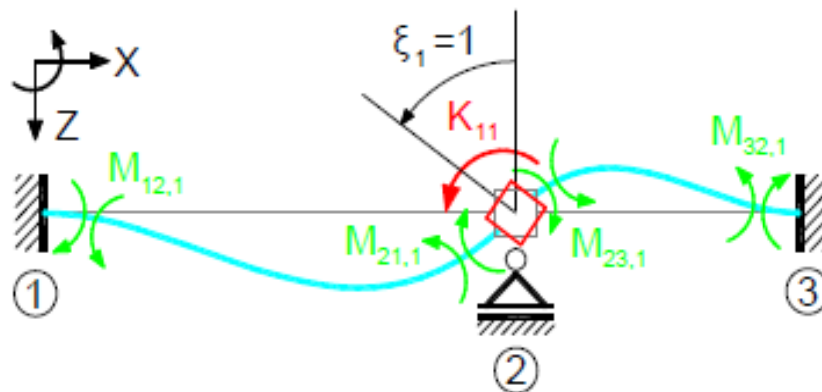
$$M_{21,0} = M_{21,0}^q + M_{21,0}^{vz2} + M_{21,0}^{Dt} = -31.25 + 720 - 50 = 638.75 \text{ kNm}$$

$$M_{23,0} = M_{23,0}^q + M_{23,0}^{vz2} + M_{23,0}^{Dt} = 0 - 2000 + 0 = -2000 \text{ kNm}$$

$$M_{32,0} = M_{32,0}^q + M_{32,0}^{vz2} + M_{32,0}^{Dt} = 0 - 2000 + 0 = -2000 \text{ kNm}$$

*Βήμα 3<sup>ο</sup>: Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης “ξ<sub>1</sub>=1”*

Η κατάσταση “ξ<sub>1</sub>=1” είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται στο ΓΚΣ μια θετική (σύμφωνα με το χρησιμοποιημένο σύστημα αναφοράς X-Z) μοναδιαία μετακίνηση κατά την έννοια του δεσμευμένου βαθμού ελευθερίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιβάλλεται μία μοναδιαία στροφής στον κόμβο 2, λόγω της οποίας το ΓΚΣ παραμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.25

Οι αναπτυσσόμενες καμπτικές ροπές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{5}\right) \cdot 1 = 40000 \text{ kNm}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5}\right) \cdot 1 = 80000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}}\right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{3}\right) \cdot 1 = 133333.33 \text{ kNm}$$

$$M_{32,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}}\right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{3}\right) \cdot 1 = 66666.667 \text{ kNm}$$

*Βήμα 4<sup>ο</sup> : Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης*

Ο συντελεστής στιβαρότητας  $K_{11}$  είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση “ $\xi_1=1$ ”. Από την ισορροπία ροπών (σχήμα 3.25) έχουμε:

$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 80000 + 133333.33 = 213333.33\text{kNm}$$

Παρατηρούμε ότι η τελική τιμή, αλλά και οι δύο «συνεισφορές» στο  $K_{11}$  είναι θετικές. Ο συντελεστής φόρτισης  $K_{10}$  είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση “0”. Από την ισορροπία ροπών (σχήμα 3.24) έχουμε:

$$K_{10} = M_{21,0} + M_{23,0} = -1361.25\text{kNm}$$

*Βήμα 5<sup>ο</sup>: Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των  $\xi_i$*

Η ολική αντίδραση  $K_1$ , που εμφανίζεται στη θέση του κόμβου 2, όπου τοποθετήθηκε η δικινητή πάκτωση, προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας και είναι:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$$

Η αντίδραση αυτή, ως μη υπάρχουσα στον πραγματικό φορέα αλλά μόνο στο ΓΚΣ, πρέπει να μηδενιστεί. Από την συνθήκη μηδενισμού της προκύπτει και η άγνωστη τιμή της στροφής  $\xi_1$  του κόμβου 2:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \rightarrow \xi_1 = -\left(\frac{K_{10}}{K_{11}}\right) = 6.381 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

*Βήμα 6<sup>ο</sup>: Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης*

Διαγράμματα καμπτικών ροπών  $M$  λόγω  $q$ ,  $v_{z2}$  και  $\Delta t_{12}$

Ο υπολογισμός των τελικών μεγεθών  $M$  του φορέα επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της επαλληλίας χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$$

Εφαρμόζουμε αυτή τη σχέση για τους κόμβους 1,2 και 3 και έχουμε:

$$M_{12} = M_{12,0} + M_{12,1} \cdot \xi_1 = 801.25 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 40000 = 1056.484\text{kNm}$$

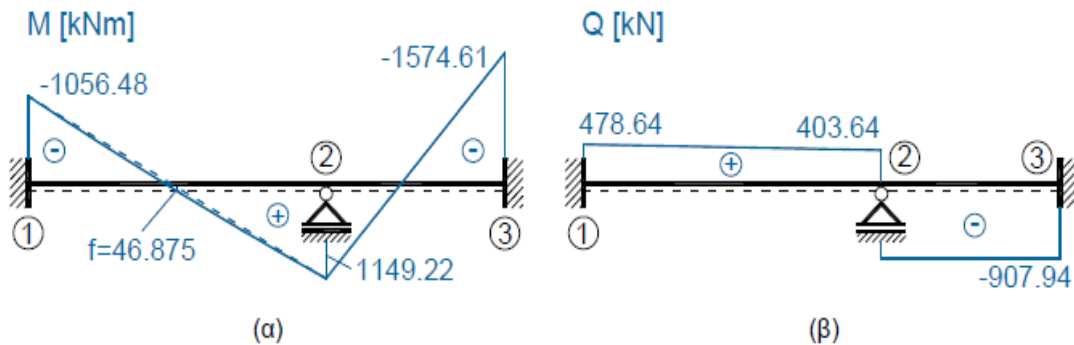
$$M_{21} = M_{21,0} + M_{21,1} \cdot \xi_1 = 638.75 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 80000 = 1149.219\text{kNm}$$

$$M_{23} = M_{23,0} + M_{23,1} \cdot \xi_1 = -2000 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 133333.33 = -1149.219\text{kNm}$$

$$M_{32} = M_{32,0} + M_{32,1} \cdot \xi_1 = -2000 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 666666.667 = -1574.61\text{kNm}$$

Για να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα ροπών, πρέπει να μετασχηματίσουμε τα πρόσημα των ροπών που υπολογίσαμε με βάση τη σύμβαση της ίνας αναφοράς. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να αντιστραφεί το πρόσημο των ροπών στα αριστερά άκρα των δοκών (δηλαδή των ροπών  $M_{12}$  και  $M_{23}$ ) ενώ το πρόσημο των ροπών στα δεξιά των δοκών παραμένει το ίδιο ( $M_{21}$  και  $M_{32}$ ). Έτσι, οι τιμές των ροπών που θα χρησιμοποιήσουμε για τη σχεδίαση του διαγράμματος ροπών είναι:

$$M_{12} = -1056.484 \text{ kNm} , M_{21} = 1149.219 \text{ kNm} , M_{23} = 1149.219 \text{ kNm} , \\ M_{32} = -1574.61 \text{ kNm}$$

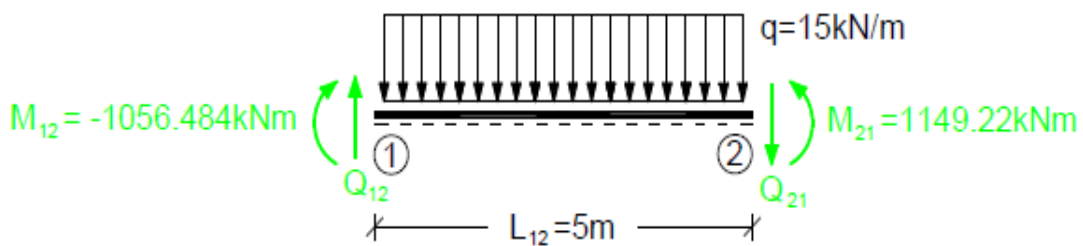


Σχήμα 3.26

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων  $Q$  λόγω  $q$ ,  $v_{z2}$  και  $\Delta t_{12}$

Οι τελικές τέμνουσες δυνάμεις, υπολογίζονται από τις τελικές καμπτικές ροπές που υπολογίσαμε νωρίτερα με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας, οι οποίες εφαρμόζονται για κάθε δοκό ξεχωριστά, αφού προηγουμένως την αποσπάσουμε από τον φορέα με μια νοητή τομή.

(α) Δοκός 1-2 με δεδομένη φόρτιση και τελικά φορτία διατομής βάσει ίνα αναφοράς:

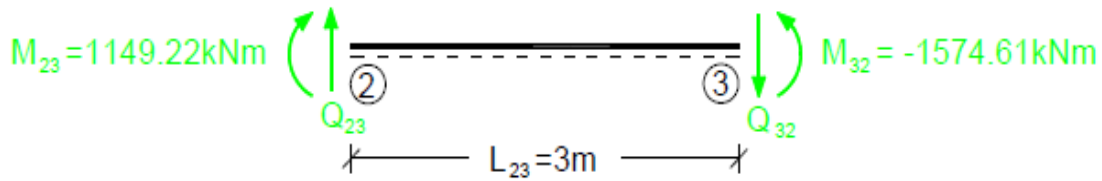


Σχήμα 3.27

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \rightarrow Q_{12} = \left( \frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left( \frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{1149.22 - (-1056.484)}{5} = 478.64 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{(1)} = 0 \rightarrow Q_{21} = \left( \frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left( \frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{1149.22 - (-1056.484)}{5} = 478.64 \text{ kN}$$

(β) Δοκός 2-3 με δεδομένη φόρτιση και τελικά φορτία διανομής βάσει ίνας αναφοράς:

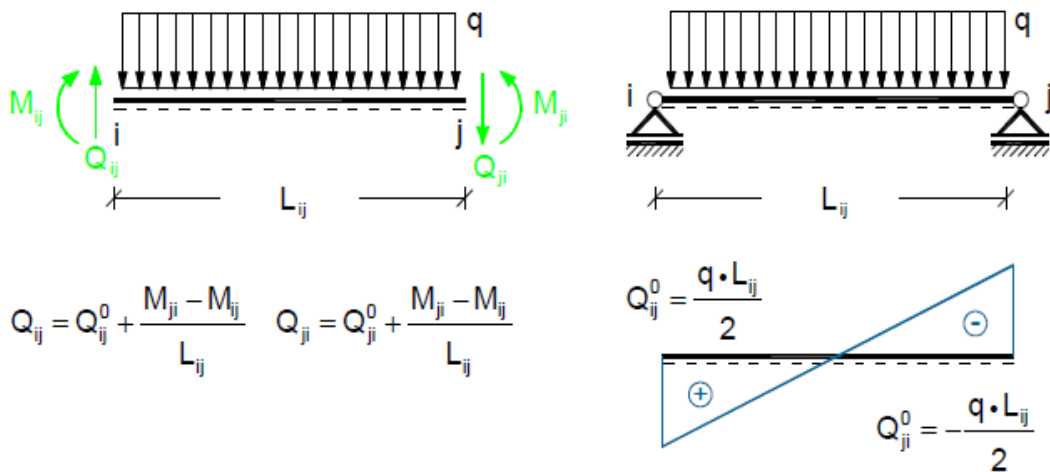


Σχήμα 3.28

$$\Sigma M_{(3)} = 0 \rightarrow Q_{23} = \left( \frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-1574.61) - (1149.22)}{3} = -907.94 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \rightarrow Q_{32} = \left( \frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-1574.61) - (1149.22)}{3} = -907.94 \text{ kN}$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό των τεμνουσών στα άκρα μιας δοκού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τύποι που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα (3.29), όπου  $M_{ij}$ ,  $M_{ji}$  οι τελικές καμπτικές ροπές στα άκρα της δοκού αυτής και  $Q_{ij0}$ ,  $Q_{ji0}$  οι τέμνουσες στα άκρα της ομόλογης αμφιέριστης δοκού i-j λόγω των φορτιστικών αιτιών. Όλα τα μεγέθη εισάγονται με τα πρόσημά τους βάσει της ίνας αναφοράς.



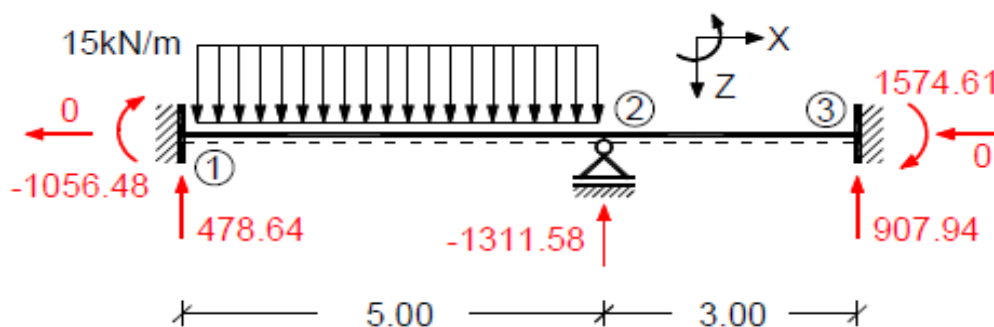
Σχήμα 3.29

Στην περίπτωση μας, από τα φορτιστικά αίτια μόνο η κατανεμημένη φόρτιση  $q$  προκαλεί την εμφάνιση τεμνουσών δυνάμεων σε αμφιέριστη δοκό. Ενώ τα υπόλοιπα φορτία  $v_{z2}$  και  $\Delta t_{12}$  είναι καταναγκασμοί και επομένως δεν προκαλούν ένταση σε μια αμφιέριστη ισοστατική δοκό.



### Βήμα 7<sup>ο</sup> : Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Παρακάτω διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα



Σχήμα 3.30

$$\sum F_x = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 478.64 - 1311.58 + 907.94 - (15 \cdot 5) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -1056.48 + 1574.61 + (1311.58 \cdot 5) - (907.94 \cdot 8) + \left(15 \cdot \frac{5^2}{2}\right) = 0.01 \approx 0 \text{ kN}$$

Οι παραπάνω τρεις συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται.

### 3.10.3 Μέθοδος Γωνιών Στροφής

Η μέθοδος βασίζεται στη κατάστρωση σχέσεων που συνδέουν τις ακραίες ροπές με τις ακραίες μετακινήσεις (μετατοπίσεις και στροφές) και την ενδιάμεση φόρτιση κάθε μέλους του φορέα.

#### Μεθοδολογία

Τα βήματα επίλυσης με τη μέθοδο γωνιών στροφής είναι τα εξής:

1. Καθορισμός κινηματικής αοριστίας δηλαδή καθορίζονται οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων.
2. Κατάστρωση των σχέσεων που συνδέουν τις ακραίες ροπές με τις ακραίες μετακινήσεις (μετατοπίσεις και στροφές) και την ενδιάμεση φόρτιση κάθε μέλους του φορέα

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) + FEM_{ij}$$

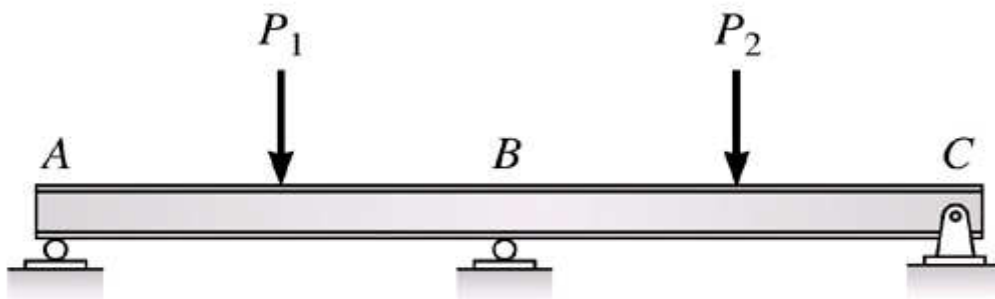
3. Γράφονται εξισώσεις ισορροπίας για τους μη-δεσμευμένους κόμβους, που εκφράζουν ότι οι κόμβοι βρίσκονται σε ισορροπία υπό την επίδραση των επιβαλλόμενων ροπών. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε κάθε κόμβο ισούται με μηδέν. Ο αριθμός των εξισώσεων ισορροπίας πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων μετακινήσεων. Ως σύμβαση προσήμου θεωρούμε ότι όλες οι άγνωστες ροπές στα άκρα του μέλους είναι θετικές όταν έχουν ωρολογιακή φορά. Η

ροπή που ασκείται στον κόμβο είναι πάντα ίση και αντίθετη με τη ροπή που ασκείται στο άκρο τους μέλους.

4. Αντικαθιστούμε τις σχέσεις από το βήμα 2 στις εξισώσεις ισορροπίας του βήματος 3. Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων προκύπτουν οι άγνωστες μετακινήσεις.
5. Προσδιορίζονται οι ροπές στα άκρα των μελών του φορέα με αντικατάσταση των τιμών των μετακινήσεων στις σχέσεις του βήματος 2. Οι τέμνουσες προκύπτουν από τις εξισώσεις των ΔΕΣ των μελών του δοκού και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις από την ισορροπία των κόμβων.

### 3.10.3.1 Παράδειγμα επίλυσης φορέα με τη μέθοδο Γωνιών Στροφής

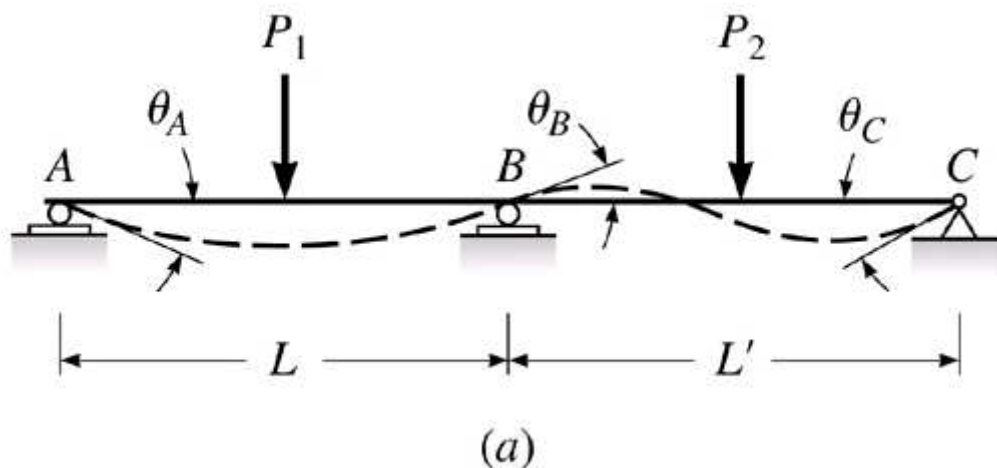
Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας επίλυσης. Έστω, ότι έχουμε μια δοκό με 3 βαθμούς ελευθερίας (β.ε.).



Σχήμα 3.31

Οι 3 (β.ε.) είναι οι στροφές  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  και  $\theta_C$  στους κόμβους A, B και C. Οι σχέσεις που συνδέουν τις ακραίες ροπές με τις ακραίες στροφές κάθε μέλους έχουν τη γενική μορφή:

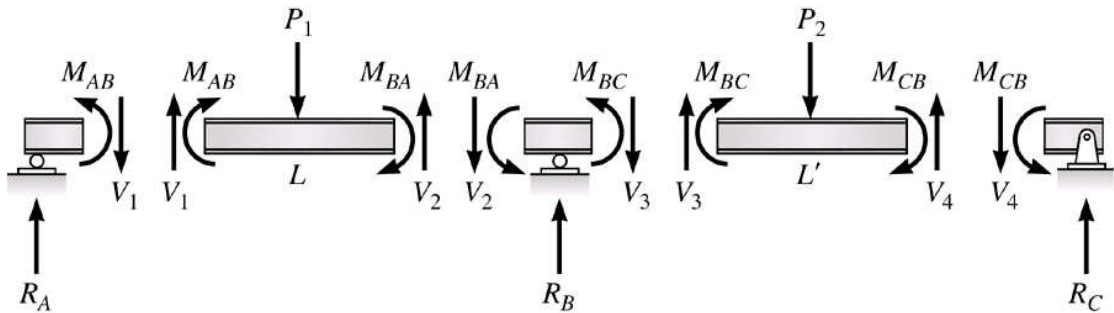
$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= f(\theta_A, \theta_B, P_1) \\ M_{BA} &= f(\theta_B, \theta_A, P_1) \\ M_{BC} &= f(\theta_B, \theta_C, P_2) \\ M_{CB} &= f(\theta_C, \theta_B, P_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Σχήμα 3.32

Ύστερα, καταστρώνονται εξισώσεις ισορροπίας για τους μη-δεσμευμένους κόμβους. Στην περίπτωση μας, γράφουμε 3 εξισώσεις ισορροπίας, όσες και ο αριθμός των αγνώστων μετακινήσεων (β.ε.):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Κόμβος A: } M_{AB} = 0 \\ \text{Κόμβος B: } M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ \text{Κόμβος C: } M_{CB} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$



Σχήμα 3.33

Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτουν οι άγνωστες στροφές. Στη συνέχεια, με γνωστές τις στροφές, υπολογίζουμε βάση της (1) τις ροπές στα άκρα κάθε μέλους.

### 3.10.4 Μέθοδος Επικόμβιων Μετατοπίσεων

Η μέθοδος Επικόμβιων Μετατοπίσεων (MEM) αποτελεί θεμελιώδη βάση για τα περισσότερα προγράμματα Η/Υ για την επίλυση φορέων. Στη μέθοδο των Επικόμβιων Μετατοπίσεων, όπως και στις άλλες μεθόδους μετακινήσεων, οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται ως προς τις άγνωστες μετακινήσεις στους κόμβους. Η ανάλυση υπερστατικών φορέων με την MEM βασίζεται στην επαλληλία δύο περιπτώσεων:

- Παγιωμένος φορέας υπό την επίδραση της δοσμένης φόρτισης, και
- Αρχικός φορέας υπό την επίδραση διαδοχικών μοναδιαίων μετακινήσεων  $\xi_n=1$  ( $\theta_n=1$  ή  $\Delta_n=1$ ) για  $n=1, \dots, N$

Παρακάτω, παραθέτονται αναλυτικά τα βήματα επίλυσης της MEM:

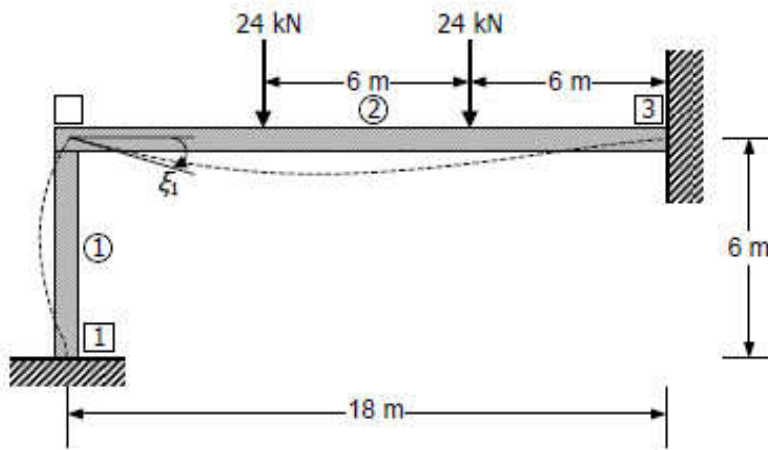
1. Διαμορφώνουμε τον παγιωμένο φορέα μέσα από τον συνδυασμό αμφίπακτων ή/και μονόπακτων μελών. Ύστερα, καθορίζονται οι ανεξάρτητες στροφές και οι ανεξάρτητες μετατοπίσεις των κόμβων που δεσμεύτηκαν κατά την παγίωση του φορέα. Η κινηματική αοριστία  $N$  του φορέα με τη MEM εξαρτάται από τον τρόπο παγίωσης του φορέα (δηλαδή από την επιλογή αμφίπακτων ή/και μονόπακτων μελών). Κατά την διαμόρφωση του παγιωμένου φορέα συνήθως

γίνεται η παραδοχή ατένειας των μελών του φορέα, δηλαδή ότι αμελούνται οι αξονικές παραμορφώσεις.

2. Φορτίζουμε τον παγιομένο φορέα με τη δοσμένη φόρτιση και υπολογίζουμε τις ροπές  $M_{ik,0}$  (και ενδεχομένως τις τέμνουσες  $Q_{ik,0}$  και τις αξονικές δυνάμεις  $N_{ik,0}$ ) στα άκρα των μελών (κατάσταση “0”). Σύμβαση πρόσημου: θετικές ροπές και στροφές στα άκρα των μελών θεωρούνται οι δεξιόστροφες.
3. Στη συνέχεια, επιβάλλουμε διαδοχικά μοναδιαίους καταναγκασμούς  $\xi_n=1$  ( $n=1, \dots, N$ ). Όταν επιβάλλεται η δέσμευση  $\xi_n=1$ , όλες οι άλλες μετακινήσεις  $\xi_m$  με  $m \neq n$  θεωρούνται μηδενικές. Σε κάθε μία κατάσταση  $\xi_n=1$  υπολογίζουμε τις ροπές  $M_{ik,n}$  (και ενδεχομένως τις τέμνουσες  $Q_{ik,n}$  και τις αξονικές δυνάμεις  $N_{ik,n}$ ) στα άκρα των μελών (κατάσταση “n”).
4. Από τα εντατικά μεγέθη του βήματος 2 ( $M_{ik,0}, Q_{ik,0}, N_{ik,0}$ ) υπολογίζουμε τις αντιδράσεις  $K_{m0}$  (δυνάμεις, ροπές) στις  $N$  δεσμεύσεις με βάση τις συνθήκες ισορροπίας  $\Sigma M=0$  στους κόμβους. Από τα εντατικά μεγέθη του βήματος 3 ( $M_{ik,n}, Q_{ik,n}, N_{ik,n}$ ) υπολογίζουμε τις αντιδράσεις  $K_{mn}$  στις  $N$  δεσμεύσεις με βάση τις συνθήκες ισορροπίας  $\Sigma M=0$  στους κόμβους ( $K_{mn}$  είναι η δύναμη κατά τη διεύθυνση της μετακίνησης  $\xi_m$  όταν επιβάλλεται μοναδιαία μετακίνηση  $\xi_n=1$ ).
5. Καταστρώνουμε το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας  $\{ K_{m0} \} + [ K_{mn} ] \{ \xi_m \} = \{ 0 \}$  ( $m,n = 1, 2, \dots, N$ )  
Το οποίο επιλύεται για να προκύψουν οι άγνωστες μετακινήσεις  $\xi$ . Η παραπάνω εξίσωση βασίζεται στην αρχή της επαλληλίας και εκφράζει την απαίτηση μηδενισμού της ολικής αντίδρασης  $K_m$  του αρχικού φορέα που εμφανίζεται κατά το β.ε.  $m$ .
6. Υπολογίζουμε τα τελικά εντατικά μεγέθη. Με γνωστές τις μετακινήσεις, υπολογίζουμε τις ροπές στα άκρα  $i-k$  των μελών χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας ως  $M_{ik} = M_{ik,0} + \sum (M_{ik,n} \cdot \xi_n)$  για  $n = 1, 2, \dots, N$   
από τις τελικές ροπές υπολογίζουμε τις τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις στα άκρα των στοιχείων  $i-k$  με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας.

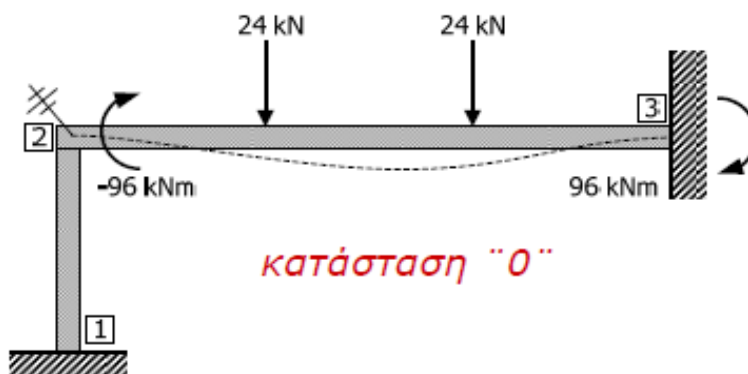
#### 3.10.4.1 Παράδειγμα επίλυσης φορέα με τη μέθοδο των Επικόμβιων Μετατοπίσεων

Για να γίνουν καλύτερα κατανοητά τα βήματα επίλυσης της MEM θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα επίλυσης ενός φορέα, συγκεκριμένα ένα πλαίσιο (σχήμα 3.34) με  $EI=$  σταθερό.



Σχήμα 3.34

Βήμα 1<sup>ο</sup>: το πλαίσιο έχει βαθμό κινηματικής αοριστίας ΒΚΑ=1. Η μόνη άγνωστη μετακίνηση είναι στροφή  $\xi_1$  στον κόμβο 2. Άρα χρειάζεται μια εξίσωση ισορροπίας στον κόμβο 2. Άρα μορφώνουμε τον παγιωμένο φορέα, ο οποίος προκύπτει πακτώνοντας τον αδέσμευτο κόμβο 2 του αρχικού φορέα.



Σχήμα 3.35

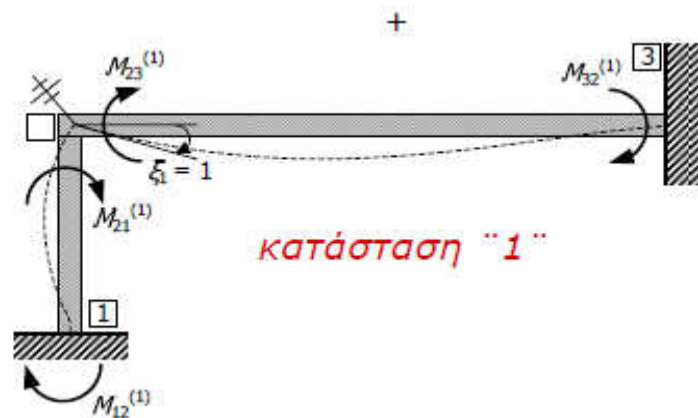
Βήμα 2<sup>ο</sup>: φορτίζοντας τον παγιωμένο φορέα με τη δοσμένη φόρτιση, υπολογίζουμε τις ροπές πάκτωσης  $M_{ik,0}$  στα άκρα του μέλους 2-3 (κατάσταση "0").

$$M_{23,0} = -\frac{2PL}{9} = -\frac{2(24)(18)}{9} = -96 \text{ kNm (αντιωρολογιακή)}$$

$$M_{32,0} = \frac{2PL}{9} = \frac{2(24)(18)}{9} = 96 \text{ kNm (ωρολογιακή)}$$

Βήμα 3<sup>ο</sup>: επιβάλλουμε μοναδιαία ωρολογιακή στροφή (1 rad) στον κόμβο 2 και πακτώνουμε τη δοκό στην παραμορφωμένη θέση (κατάσταση "1"). Η στροφή αυτή προκαλεί ροπές στα άκρα των μελών της δοκού που υπολογίζονται από τις σχέσεις ροπών- μετακινήσεων:

$$M_{ik,1} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_k)$$



Σχήμα 3.36

Οι ροπές στα άκρα του μέλους 1-2 και 2-3, λόγω της μοναδιαίας στροφής στον κόμβο 2:

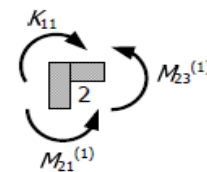
$$M_{12,1} = \frac{2EI}{6} (0 + 1) = \frac{EI}{3}$$

$$M_{21,1} = \frac{2EI}{6} [2(1) + 0] = \frac{2EI}{3}$$

$$M_{23,1} = \frac{2EI}{18} [2(1) + 0] = \frac{2EI}{9}$$

$$M_{32,1} = \frac{2EI}{18} [2(0) + 1] = \frac{EI}{9}$$

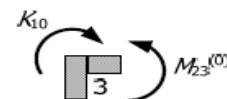
Βήμα 4<sup>ο</sup>: από την ισορροπία του κόμβου 2, υπολογίζουμε την αντίδραση  $K_{11}$  που αναπτύσσεται στην πάκτωση στην κατάσταση "1", και ισούται με το άθροισμα των ροπών των μελών που συνδέονται στον κόμβο 2.



$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = \frac{2EI}{3} + \frac{2EI}{9} + \frac{8EI}{9}$$

Οι δυνάμεις και οι μετακινήσεις που προκύπτουν απ' αυτό το βήμα πολλαπλασιάζονται με το πραγματικό μέγεθος  $\xi_1$  της στροφής στον κόμβο 2.

Η αντίδραση  $K_{10}$  που αναπτύσσεται στην πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση "0" από την ισορροπία ροπών ισούται με



$$K_{10} = -M_{23,0} = -96 \text{ kNm}$$

Βήμα 5<sup>ο</sup>: η ολική αντίδραση  $K_1$  που εμφανίζεται στη θέση του κόμβου 2, προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$$

Αφού στην πραγματική δοκό δεν υπάρχει αυτή η αντίδραση, τότε οφείλει να μηδενιστεί. Από την απαίτηση μηδενισμού της προκύπτει η τιμή της στροφής  $\xi_1$ :

$$K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \rightarrow \frac{8EI}{9} \xi_1 - 96 = 0 \rightarrow \xi_1 = \frac{108}{EI} \text{ rad}$$

Βήμα 6<sup>ο</sup>: με τη στροφή  $\xi_1$  γνωστή, υπολογίζουμε τις ροπές στα άκρα κάθε μέλους από την επαλληλία των δυνάμεων σε κάθε κόμβο. Δηλαδή προσθέτουμε τις τιμές των ροπών λόγω της μοναδιαίας στροφής, αφού τις πολλαπλασιάσουμε με  $\xi_1$  με τις ροπές  $M_{ik,0}$ .

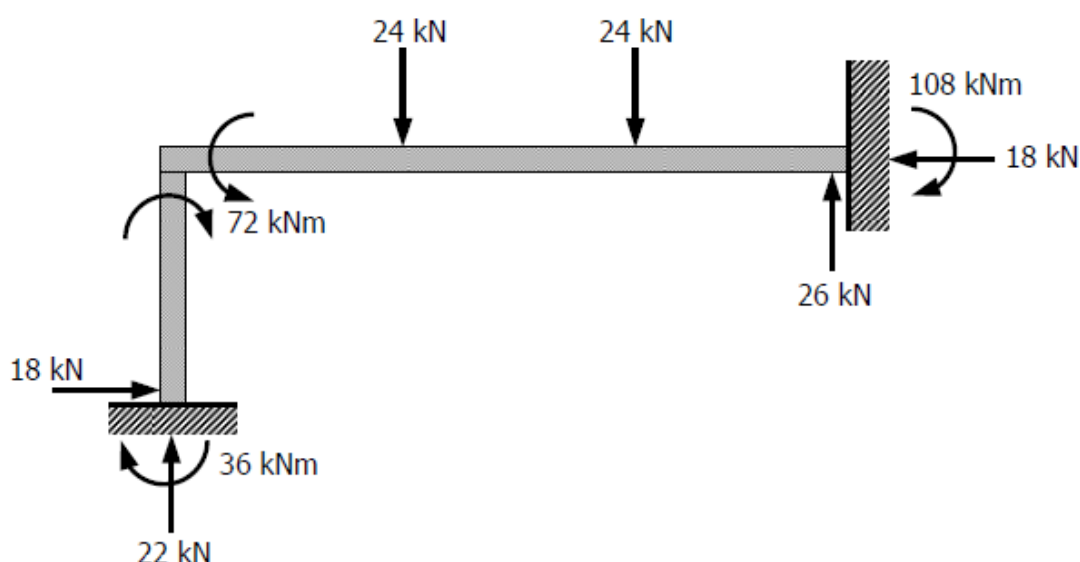
$$M_{12} = M_{12,0} + M_{12,1} \cdot \xi_1 = 0 + \frac{108}{EI} \left( \frac{EI}{3} \right) = 36 \text{ kNm (ωρολογιακή)}$$

$$M_{21} = M_{21,0} + M_{21,1} \cdot \xi_1 = 0 + \frac{108}{EI} \left( \frac{2EI}{3} \right) = 72 \text{ kNm (ωρολογιακή)}$$

$$M_{23} = M_{23,0} + M_{23,1} \cdot \xi_1 = (-96) + \frac{108}{EI} \left( \frac{2EI}{9} \right) = -72 \text{ kNm (αντιωρολογιακή)}$$

$$M_{32} = M_{32,0} + M_{32,1} \cdot \xi_1 = 96 + \frac{108}{EI} \left( \frac{EI}{9} \right) = 108 \text{ kNm (ωρολογιακή)}$$

Χρησιμοποιώντας ΔΕΣ για κάθε μέλος του πλαισίου υπολογίζονται οι τέμνουσες δυνάμεις και οι αντιδράσεις του φορέα. Τα τελικά αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 3.37.



Σχήμα 3.37

### 3.10.5 Μέθοδος των Μετατοπίσεων με Κατανομή των Ροπών (MKP ή Cross).

Η μέθοδος Cross επινοήθηκε από τον αμερικανό καθηγητή Hardy Cross το 1932 από τον οποίο και πήρε το όνομά της. Με τη μέθοδο αυτή επιλύουμε συνεχείς δοκούς και πλαίσια. Κατά την επίλυσή τους με τη μέθοδο αυτή δεν επιλύουμε συστήματα πολλών γραμμικών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, όπως συμβαίνει στις άλλες μεθόδους επίλυσης υπερστατικών φορέων (π.χ. μέθοδος Δυνάμεων). Χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα για την επίλυση συνεχών δοκών, πλακών από οπλισμένο μπετό και πλαισίων, χάρη στην απλότητα που τη διακρίνει. Βελτίωση της μεθόδου Cross για πλαίσια με μεταθετούς κόμβους αποτελεί η μέθοδος του Kani.

Κατά τη μέθοδο Cross θεωρούνται αρχικά όλοι οι κόμβοι πακτωμένοι. Τότε σε κάθε κόμβο προκύπτουν ροπές τέτοιες ώστε να μην ισχύει η εξίσωση  $\Sigma M = 0$ . Οπότε εμφανίζεται μια ροπή  $\Delta M$  την οποία καλούμε διαφορά ροπής στον κόμβο, η οποία πρέπει να διορθωθεί. Γι αυτό απελευθερώνεται μόνο ένας κόμβος, ενώ οι υπόλοιποι παραμένουν πακτωμένοι. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου σε κάθε κόμβο το άθροισμα των ροπών να ισούται με το μηδέν.

Και οι δύο μέθοδοι στηρίζονται στις γνωστές σχέσεις ροπών-στροφών:

$$M_{AB} = 2EA(2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi_{AB}) + (\Theta.P.\Pi)_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EA(2\varphi_B + \varphi_A - 3\psi_{AB}) + (\Theta.P.\Pi)_{BA}$$

Όπου  $A = I/l$  ο δείκτης ακαμψίας μιας δοκού AB και  $\Theta.P.\Pi$  η θεμελιώδης ροπή πάκτωσης. Η πρώτη σχέση μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$M_{AB} = 4EA \varphi_A + 2EA\varphi_B - 6EA\psi_{AB} + (\Theta.P.\Pi)_{AB}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η ροπή που αναπτύσσεται στο άκρο A της AB μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα 4 όρων:

- Της ροπής  $(\Theta.P.\Pi)_{AB}$  που θα είχαμε στη διατομή A αν θεωρούσαμε τους κόμβους A και B πακτωμένους, δηλαδή άστρεπτους και αμετάθετους.
- Της ροπής  $-6EA\psi_{AB}$  που οφείλεται σε δεξιόστροφη γωνία στροφής  $\psi_{AB}$  της AB.
- Της ροπής  $2EA\varphi_B$  που οφείλεται σε στροφή της διατομής B κατά γωνία  $\varphi_B$  (δεξιόστροφη)
- Της ροπής  $4EA \varphi_A$  που οφείλεται σε στροφή της διατομής A κατά γωνία  $\varphi_A$  (δεξιόστροφη)

Για να βρούμε τη ροή  $M_{AB}$  μπορούμε να θεωρήσουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις παραπάνω 4 «φορτίσεις» και να προσθέσουμε τα επιμέρους αποτελέσματα.

Η ιδέα του Cross για την επινοήση μιας νέας μεθόδου στηρίχτηκε στη παρακάτω σκέψη:



*Αν θεωρήσουμε του κόμβους A και B άστρεπτους και αμετάθετους, οπότε εύκολα βρίσκουμε τη Θεμελιώδη ροπή πάκτωσης του AB, πως μπορούμε να φτάσουμε στη ροπή  $M_{AB}$ , χωρίς να λύσουμε συστήματα εξισώσεων;*

Οι απλοί (αλλά πολύ έξυπνοι) συλλογισμοί του φαίνονται στη (πρώτη) σχέση του  $M_{AB}$ .

### **3.11 Άλλες ειδικές μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων**

#### **3.11.1 Μέθοδος του Kani**

Η μέθοδος του Kani του Γερμανού μηχανικού Kani χρησιμοποιείται για την επίλυση ορθογωνικών πλαισίων με αμετάθετους ή μεταθετούς κόμβους, όπου παραλείπονται οι μεταβολές μηκών των ράβδων δηλαδή λαμβάνονται υπόψη έργα μόνο από καμπτικές ροπές. Η μέθοδος αυτή, ουσιαστικά αποτελεί παραλλαγή της μεθόδου Cross και επιτρέπει την κατανομή των ροπών που οφείλονται σε στροφή και μετάθεση των κόμβων σε ένα μόνο στάδιο. Όντως, οι ροπές στο άκρο μιας ράβδου αποτελούνται, ως γνωστόν, από ροπές κατανομής και μεταβίβασης. Αν τις διαχωρίσουμε και τις προσθέσουμε ξεχωριστά, η τελική ροπή θα αποτελείται από δύο προσθετέους. Μεταξύ των δύο αυτών προσθετέων ισχύει μια σταθερή σχέση, η οποία οδήγησε τον Kani στην τροποποίηση και απλοποίηση της μεθόδου Cross. Η μέθοδος Kani είναι ταχύτερη όλων των άλλων, οι οποίες επινοήθηκαν ώστε να γίνει σε ένα και μόνο στάδιο η κατανομή των ροπών σε πλαίσια μεταθετών κόμβων. Επιπλέον, έχει το πλεονέκτημα να απαλείφει τα σφάλματα κατά την κατανομή. Το μόνο μειονέκτημά της είναι, ότι εφαρμόζεται μόνο σε ορθογωνικά πλαίσια. Τα πλαίσια αυτά όμως συναντώνται συνήθως στη πράξη ιδίως σε οικοδομικά έργα. Κατά τον αντισεισμικό υπολογισμό τέτοιων πλαισίων ενδείκνυται η χρησιμοποίηση της μεθόδου Kani.

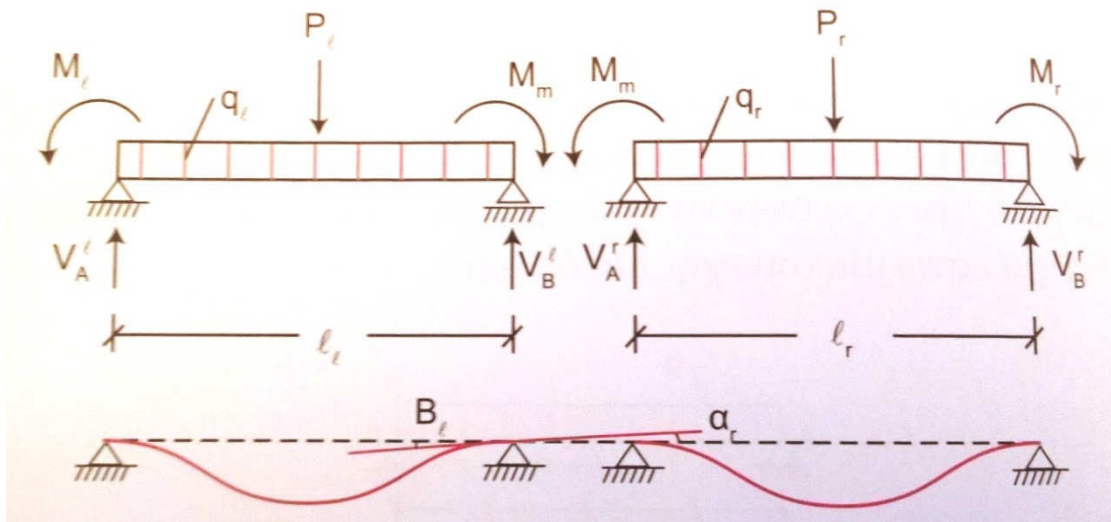
#### **3.11.2 Η εξίσωση των τριών ροπών ή Clayperon**

Η εξίσωση των τριών ροπών η οποία δημιουργήθηκε από τον Clayperon επιλύει μόνο συνεχείς δοκούς. Συνεχής δοκός ονομάζεται η δοκός η οποία έχει περισσότερα από ένα ανοίγματα και έχει μόνο από τη μία στηρίξεις της άρθρωση και τις υπόλοιπες κυλίσεις. Η μεν άρθρωση παραλαμβάνει όλες τις οριζόντιες δυνάμεις που αναπτύσσονται, λόγω ανεμοπίεσης, τροχοπέδησης κ.α., οι δε κυλίσεις χρησιμεύουν, για να επιτρέπουν την ελεύθερη παραμόρφωση της δοκού, λόγω συστοδιαστολών. Η συνεχής δοκός δεν διακόπτεται από καμία ενδιάμεση άρθρωση και γι' αυτό ονομάζεται συνεχής. Στην πράξη αποφεύγεται να κατασκευάζονται συνεχείς δοκοί σε εδάφη κακής ποιότητας και στις γέφυρες διότι οι συνεχείς δοκοί ως υπερστατικοί θα εμφανίσουν ροπές μεγαλύτερες εκείνων που θα υπήρχαν, πριν από τις υποχωρήσεις.

Η μέθοδος Clayperon επιλύει και δοκάρια, όπου οι ακραίες στηρίξεις είναι πακτώσεις και πρόβολοι. Γενικά σε μια συνεχή δοκό εμφανίζονται θετικές ροπές στα ανοίγματα και

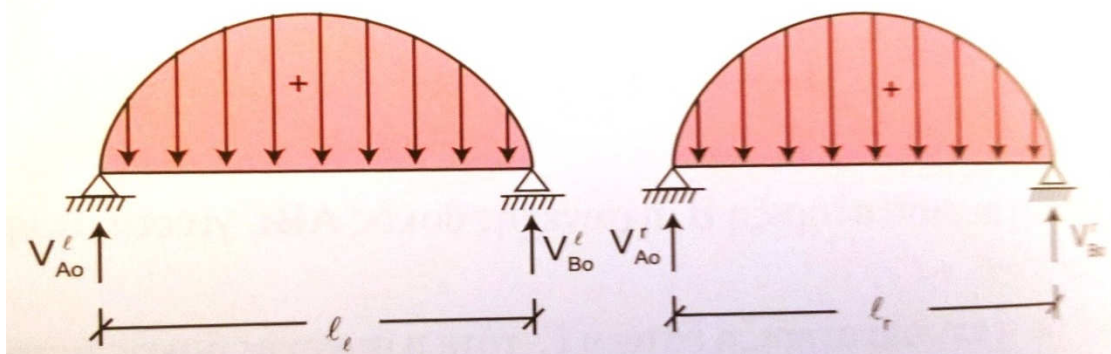
αρνητικές στις στηρίξεις. Η εξίσωση των τριών ροπών ή Clayperon έρχεται να υπολογίσει τις ροπές των στηρίξεων ώστε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα ροπών κάμψης, και απ' αυτό τα διαγράμματα τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα για να δείξουμε πως υπολογίστηκε η εξίσωση των τριών ροπών. Έστω ότι έχουμε μια τριέριστη δοκό και λαμβάνουμε δύο ανοίγματα τα οποία θεωρούμε σαν δύο αμφιέριστες δοκούς, τοποθετώντας όλα τα στατικά μεγέθη, φορτίσεις, αντιδράσεις και ροπές στηρίξεις.

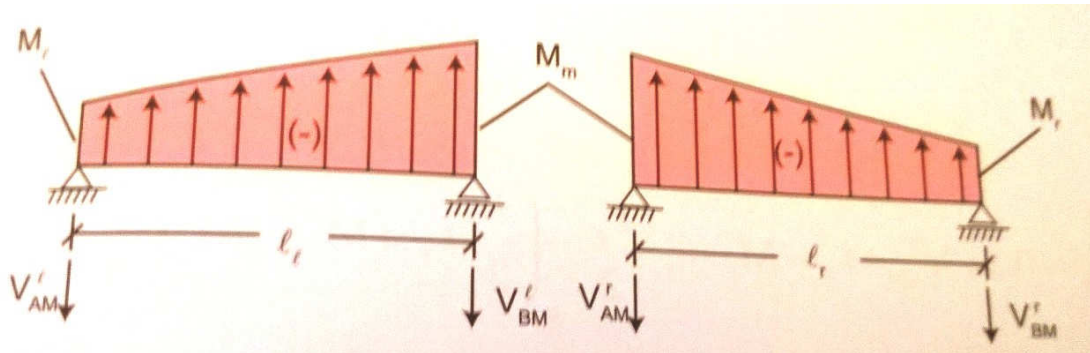


Σχήμα 3.38  
Ελαστική γραμμή λόγω εξωτερικής φόρτισης

Τα παρακάτω σχήματα απεικονίζουν τις φορτίσεις με τα διαγράμματα ροπών κάμψης από την εξωτερική φόρτιση (3.39) και τις με τα διαγράμματα ροπών κάμψης προερχόμενων από τις  $M_\ell, M_m$  και  $M_r$  (3.40).



Σχήμα 3.39



Σχήμα 3.40

Η εφαπτόμενη της ελαστικής γραμμής στη μεσαία στήριξη σχηματίζει με τον άξονα της απαραμόρφωτης δοκού ίσες και αντίθετες γωνίες δηλαδή:

$$\beta_l = -\alpha_r \quad (1)$$

εφαρμόζουμε την πρώτη πρόταση του Mohr, κατά την οποία η γωνία η οποία σχηματίζεται από την εφαπτομένη της ελαστικής γραμμής που διέρχεται από το σημείο στήριξης, με τον άξονα της απαραμόρφωτης δοκού είναι ίση με την αντίδραση της στήριξης αυτής, η οποία προκαλείται από μια φόρτιση της δοκού που είναι το ανηγμένο διάγραμμα των ροπών κάμψης προερχόμενο από την εξωτερική φόρτιση διηρημένο δια του μέτρου ακαμψίας της δοκού EJ.

Οπότε από την εφαρμογή της πρώτης πρότασης του Mohr στα ανωτέρω σχήματα θα έχουμε:

$$\beta^l = \frac{V_{B0}^l}{EJ} + \frac{V_{BM}^l}{EJ} \quad (2)$$

$$\alpha^r = \frac{V_{A0}^r}{EJ} + \frac{V_{AM}^r}{EJ} \quad (3)$$

Από την συνθήκη ισορροπίας  $\Sigma M=0$  υπολογίζουμε τις αντιδράσεις  $V_{BM}^l$  και  $V_{AM}^r$ .

$$\Sigma M_A^l = 0 \rightarrow V_{BM}^l \cdot l_l - \left( M_l \cdot l_l \cdot \frac{l_l}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot l_l (M_m - M_l) \cdot \frac{2}{3} l_l \right) = 0$$

$$\rightarrow V_{BM}^l \cdot l_l - M_l \cdot l_l \cdot \frac{l_l}{2} - \frac{1}{3} l_l \cdot l_l M_m + \frac{1}{3} l_l \cdot l_l M_l = 0$$

$$\rightarrow V_{BM}^l \cdot l_l - \frac{1}{3} l_l \cdot l_l M_m - \frac{1}{6} l_l \cdot l_l M_l = 0$$

$$\rightarrow V_{BM}^l = \frac{1}{3} \cdot l_l M_m - \frac{1}{6} \cdot l_l M_l \quad (4)$$

$$\Sigma M_B^r = 0 \rightarrow V_{AM}^r \cdot l_r - \left( M_r \cdot l_r \cdot \frac{l_r}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot l_r (M_m - M_r) \cdot \frac{2}{3} l_r \right) = 0$$

$$\rightarrow V_{AM}^r \cdot l_r - M_r \cdot l_r \cdot \frac{l_r}{2} - \frac{1}{3} l_r \cdot l_r M_m + \frac{1}{3} l_r \cdot l_r M_r = 0$$

$$\rightarrow V_{AM}^r \cdot l_r - \frac{1}{3} l_r \cdot l_r M_m - \frac{1}{6} l_r \cdot l_r M_r = 0$$

$$\rightarrow V_{AM}^r = \frac{1}{3} \cdot l_r M_m - \frac{1}{6} \cdot l_r M_r \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις (4) και (5) στις (2) και (3) παίρνουμε:

$$\beta^l = \frac{V_{B0}^l}{EJ} + \frac{M_m \cdot l_l}{3EJ} + \frac{M_l \cdot l_l}{6EJ} \quad (6)$$

$$\alpha^r = \frac{V_{A0}^r}{EJ} + \frac{M_m \cdot l_r}{3EJ} + \frac{M_r \cdot l_r}{6EJ} \quad (7)$$

και αντικαθιστώντας τις (6) και (7) στην (1)

$$\frac{V_{B0}^l}{EJ} + \frac{M_m \cdot l_l}{3EJ} + \frac{M_l \cdot l_l}{6EJ} = -\frac{V_{A0}^r}{EJ} + \frac{M_m \cdot l_r}{3EJ} + \frac{M_r \cdot l_r}{6EJ} \quad (8)$$

Έχοντας την ροπή αδράνειας  $J$  πολλαπλασιάζουμε την (8) με  $6EJ$  οπότε έχουμε:

$$M_l \cdot l_l + 2M_m (l_l + l_r) + M_r \cdot l_r = -6V_{A0}^r - 6V_{B0}^l$$

Αντικαθιστώντας το 2<sup>ο</sup> μέλος της εξίσωσης με  $C_m$  προκύπτει η εξίσωση Clayperon:

$$M_l \cdot l_l + 2M_m (l_l + l_r) + M_r \cdot l_r = C_m$$

Όπου  $C_m$  ο φορτικός συντελεστής

Η ανωτέρω εξίσωση προέκυψε, εφόσον θεωρήσαμε τη ροπή αδράνειας  $J$  σταθερή, εάν όμως διαφέρει από άνοιγμα σε άνοιγμα, τότε πολλαπλασιάζουμε ολόκληρη την εξίσωση με τη ροπή αδράνειας ενός οποιουδήποτε ανοίγματος την οποία ονομάζουμε  $J_c$ . Αντί των ροπών αδράνειας θα παρουσιάζονται οι λόγοι:

$$l \cdot \frac{J_c}{J} = l'$$

Η εξίσωση Clayperon θα πάρει τη μορφή:

$$M_l \cdot l'_l + 2M_m (l'_l + l'_r) + M_r \cdot l'_r = -6 \frac{J_c}{J} V_{A0}^r - 6 \frac{J_c}{J} V_{B0}^l = C'_m$$

Η εξίσωση Clayperon εφαρμόζεται σε δύο ανοίγματα συνεχούς δοκού. Εάν η δοκός έχει περισσότερα από δύο ανοίγματα εφαρμόζουμε την εξίσωση ανά δύο ανοίγματα, παίρνοντας με τη σειρά από αριστερά προς τα δεξιά.

### 3.11.3 Σύγχρονες μέθοδοι επίλυσης

Η ιστορία εξέλιξης των σύγχρονων μεθόδων ανάλυσης των κατασκευών είναι συνυφασμένη με ιστορία εξέλιξης των υπολογιστών. Η εμφάνιση τους και η αλματώδης εξέλιξή τους επηρέασαν καθοριστικά την ανάπτυξη νέων μεθόδων. Οι σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης έχουν τη βάση τους στις κλασικές μεθόδους, τη μέθοδο των Δυνάμεων και τη μέθοδο των Μετακινήσεων με κατάλληλη μητρωϊκή διατύπωση η οποία είναι απαραίτητη για τον προγραμματισμό τους στον Η/Υ. Η πλέον

διαδεδομένη και ευρέως χρησιμοποιημένη μέθοδος είναι η μέθοδος της Άμεσης Δυσκαμψίας (Direct stiffness Method) η οποία αποτελεί την εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων σε ραβδωτούς φορείς. Είναι η μέθοδος που χρησιμοποιούν σχεδόν όλα τα εμπορικά προγράμματα ανάλυσης κατασκευών.

Επιπλέον, μια σύγχρονη «προγραμματιστική» παραλλαγή της ΜΜ είναι η Μέθοδος Στιβαρότητας και εντάσσεται στην γενικότερη λογική της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Παράλληλα με την μέθοδο Στιβαρότητας, στις δεκαετίες του '50 και του '60 αναπτύχθηκε και η Μέθοδος της Ενδοσιμότητας που αποτελεί τη μητρωϊκή διατύπωση της κλασικής ΜΔ.

## 4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Στατική, Τόμος Δεύτερος Υπερστατικές κατασκευές, Γρηγ. Χρ. Φούντα Εκδόσεις Fountas
- Στατική των κατασκευών, Τόμος II Υπερστατικοί φορείς Κλασικές μέθοδοι ανάλυσης, Ι. Ε. Αβραμίδη, Εκδόσεις Σοφία, Θεσ/νίκη 2007
- Στατική II, Υπερστατικοί φορείς, Αναστασία Σωτηροπούλου, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσ/νίκη 2015
- Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού, Στατική, Π. Α. Βουθούνης, Αθήνα 2003
- Εγχειρίδιο Αρχών και μεθόδων στη Στατική, Δρ. Φιλόθεου Γ. Λόκκα του τμήματος Πολιτικών – Έργων Υποδομής του ΤΕΙ Λάρισας
- Στατική I, Διαλέξεις του καθηγητή κ. Ε. Μυστακίδη του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
- Στατική ανάλυση των κατασκευών I, Διαλέξεις του καθηγητή κ. Πέτρου Κωμοδρόμου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Περιβάλλοντος του Πανεπιστημίου Κύπρου
- Υπολογισμοί κατασκευών, Παρουσίαση του καθηγητή κ. Γιάννη Χουλιάρη του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Τ.Ε. του ΤΕΙ Θεσσαλίας
- Υπολογιστικές μέθοδοι και εφαρμογές σε λεπτότοιχες κατασκευές, Πέτρος Α. Καρύδης, Αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π. της σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών Τομέας Θαλασσίων Κατασκευών
- Κεφάλαιο 2 Απλοί υπερστατικοί φορείς, Σημειώσεις μαθήματος Μηχανικών των Υλικών I του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
- Σημειώσεις από τις διαλέξεις του μαθήματος Υπολογιστικές μέθοδοι του συνεχούς, του καθηγητή κ. Βασίλη Κ. Καλπακίδη του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
-