



ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΔΟΜΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

**Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα
και Ακαμψία**

Πτυχιακή Εργασία

Φουκάκη Βαρβάρα
Α.Μ. 32582

Επιβλέπων Καθηγητής:

Γεώργιος Τσιάτας

Δρ. Πολ. Μηχανικός

Αθήνα, Μάιος 2012

Πρόλογος	3
Περίληψη	4
Abstract	5
Κεφάλαιο 1 ^ο :Εισαγωγή.....	6
1.1 Γενικά:	6
1.2 Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών.....	6
1.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων	7
1.4 Θεμελιώσεις με Πασσάλους	7
1.5 Αριθμητικά Παραδείγματα	8
1.6 Συμπεράσματα	8
Παράρτημα Α. Υπολογιστικός Κώδικας σε Γλώσσα MAPLE 13.....	8
Κεφάλαιο 2: Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών.....	9
2.1 Εισαγωγή	9
2.2 Δυναμικά φορτία.....	9
2.3 Βαθμοί Ελευθερίας Κίνησης.....	10
2.4 Δυναμικό Προσομοίωμα.....	12
2.5 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων	13
2.5.1 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων χωρίς απόσβεση.....	13
2.5.2 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων με απόσβεση.....	15
2.6 Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα	16
2.7 Πολυβάθμια Συστήματα	18
Κεφάλαιο 3 ^ο :Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	24
3.1 Εισαγωγή	24
3.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων	25
3.2.1 Ιδιότητες του Στοιχείου Επίπεδου Πλαισίου	25
3.3 Στατική Συμπύκνωση.....	32
3.4 Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Πολυβάθμιων Συστημάτων.....	34
Κεφάλαιο 4ο: Θεμελιώσεις με Πασσάλους.....	37
4.1 Εισαγωγή	37
4.2 Τύποι Θεμελιώσεων.....	37
4.2.1 Επιφανειακές Θεμελιώσεις	37

4.2.2 Βαθιές Θεμελιώσεις	39
4.3 Μοντέλο Winkler	43
4.4 Μητρώο Ακαμψίας Δοκού επί Ελαστικού Εδάφους	45
Κεφάλαιο 5 ^ο : Αριθμητικά Παραδείγματα.....	51
5.1 Εισαγωγή	51
5.2 Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων με χρήση Αναλυτικών Μεθόδων	51
5.3 Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων και Ιδιομορφών με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων	54
5.3.1 Παράδειγμα Επίλυσης	54
5.3.1 Πίνακες Αποτελεσμάτων	71
5.4 Δυναμική Ανάλυση Πασσάλου με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων	100
Κεφάλαιο 6 ^ο : Συμπεράσματα.....	106
6.1 Γενικά.....	106
6.2 Συμπεράσματα	106
Βιβλιογραφία	108
Παράρτημα Α.....	109
A.1 Γενικά.....	109
A.2 Υπολογιστικός κώδικας για την ακριβή ενεργειακή λύση του μονοβάθμιου συστήματος.	109
A.2.1 Υπολογισμός για τη συνάρτηση σχήματος ελαστικής γραμμής προβόλου υπό ομοιόμορφη φόρτιση	109
A.2.2 Υπολογισμός για συνάρτηση σχήματος πρώτης ιδιομορφής ταλάντωσης προβόλου σταθερής διατομής.....	110
A.3 Υπολογιστικός κώδικας για την βιομηχανική καπνοδόχο- 5 πεπερασμένα στοιχεία.....	111
A.4 Υπολογιστικός κώδικας για πάσσαλο αιχμής-3 εδαφικά στρώματα	123

Πρόλογος

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ξεκίνησε τον Απρίλιο του 2011 υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Γ.Χ. Τσιάτα, Δρ. Πολιτικό Μηχανικό του Τομέα Δομοστατικού Σχεδιασμού του Τμήματος Πολιτικών Δομικών Έργων του Τ.Ε.Ι Πειραιά και ολοκληρώθηκε τον Μάιο του 2012.

Από τη θέση αυτή, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Γ.Χ. Τσιάτα, για την πολύτιμη καθοδήγησή του, για τη βοήθειά του στον τομέα του προσανατολισμού και για την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Αθήνα, Μάιος 2012

Περίληψη

Στην παρούσα πτυχιακή διερευνώνται οι δυναμικές συμπεριφορές συστημάτων με κατανεμημένη μάζα και ακαμψία. Στόχος της εργασίας αυτής είναι η κατασκευή αναλυτικών λύσεων εύρεσης ιδιοδυναμικών χαρακτηριστικών σε συστήματα με κατανεμημένη μάζα και ακαμψία καθώς και η σύγκρισή τους με υπάρχουσες αριθμητικές μεθόδους.

Παρουσιάζονται δύο παραδείγματα: μία καπνοδόχος κατασκευασμένη από οπλισμένο σκυρόδεμα καθώς και ένας πάσσαλος από οπλισμένο σκυρόδεμα.

Για την καπνοδόχο, υπολογίστηκε σύμφωνα με το γενικευμένο μονοβάθμιο μοντέλο η ιδιοσυχνότητα της. Στη συνέχεια, συντάχθηκε υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της. Διατηρώντας το ύψος και το πάχος του κελύφους της καπνοδόχου σταθερό, ελήφθησαν αποτελέσματα για συνεχώς αυξανόμενο αριθμό στοιχείων.

Για τον πάσσαλο, συντάχθηκε υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE για τον υπολογισμό των ιδιοδυναμικών χαρακτηριστικών του. Αποτελέσματα παρουσιάζονται για παραμετρικές αναλύσεις ανάλογα με τις στρώσεις του εδάφους τις οποίες διαπέρνα ο πάσσαλος.

Τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που έχουν προκύψει από αναλύσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων.

Abstract

In this thesis the dynamic behavior of systems with distributed mass and stiffness is investigated. The goal of this thesis is to construct analytical solutions to predict the dynamical behavior (evaluation of eigenvalues, eigenvectors) of systems with distributed mass and stiffness and also to compare them with existing computational techniques.

Two examples are presented; an industrial chimney and a pile, both made by reinforced concrete.

The eigenvalue of the industrial chimney is estimated, according to the generalized one-degree of freedom model. Then, a program code was written in MAPLE for calculating both eigenvalues and eigenvectors. Keeping chimney's height and thickness constant results are presented with increasing the number of the finite elements.

Another program code was written in MAPLE to calculate the pile's dynamic characteristics. Parametric results are presented according to the ground layers of the pile.

Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή

1.1 Γενικά:

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά των κατασκευών με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία. Μελετώνται μία βιομηχανική καπνοδόχος και ένας πάσσαλος θεμελίωσης.

Η εργασία αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Κεφάλαιο 2: Δυναμική ανάλυση των κατασκευών

Κεφάλαιο 3: Η Μέθοδος των πεπερασμένων Στοιχείων

Κεφάλαιο 4: Θεμελιώσεις με πασσάλους.

Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά Παραδείγματα

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Παράρτημα Α: Υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13.

1.2 Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών

Οι κατασκευές του πολιτικού μηχανικού, πέρα των στατικών φορτίων, υποβάλλονται και σε δυναμικά φορτία. Τα δυναμικά φορτία είναι φορτία των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Το αντικείμενο της δυναμικής ανάλυσης των κατασκευών είναι ο προσδιορισμός της παραμόρφωσης καθώς και των εντάσεων σε μια κατασκευή, όταν η κατασκευή αυτή υποβάλλεται σε δυναμική φόρτιση.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι γενικές έννοιες της δυναμικής των κατασκευών. Συγκεκριμένα, ορίζονται τα δυναμικά φορτία, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης της κατασκευής, το δυναμικό προσομοίωμα, γίνεται αναφορά στις ελεύθερες ταλαντώσεις- με απόσβεση και χωρίς απόσβεση-, στα γενικευμένα μονοβάθμια συστήματα καθώς και στα πολυβάθμια συστήματα.

1.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Στις πραγματικές κατασκευές, η συνήθης περίπτωση που συναντάται είναι η κατανεμημένη μάζα. Εάν οι κατασκευές αυτές αντιμετωπιστούν ως συνεχή συστήματα, απαιτείται η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, για τις ποίες θα πρέπει να είναι γνωστές αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Αυτό αποτελεί, όμως, ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα. Σε αυτό το πρόβλημα δίνει λύση η *Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Elements Method)*.

Στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, κάθε κατασκευή διαιρείται σε μικρότερα στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους. Οι κόμβοι είναι διακριτά σημεία σύνδεσης των στοιχείων της κατασκευής. Σε αυτούς εξασφαλίζεται η συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (μετατοπίσεων και στροφών) καθώς και η ισορροπία των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων. «Μετά τη διακριτοποίηση, δεχόμαστε μέσα σε κάθε στοιχείο ότι η συνάρτηση του πεδίου (της μετατοπίσεως εν προκειμένω) μεταβάλλεται σύμφωνα με γνωστό νόμο, ο οποίος εκφράζεται ως επαλληλία σχήματος, συναρτήσεων σχήματος, που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες τιμές των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου.» (Κατσικαδέλης. 2004, σελ. 41). Με παρόμοιο τρόπο εκφράζονται η ελαστική και κινητική ενέργεια, καθώς και το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων. Οι επικόμβιες δράσεις προκύπτουν ως γενικευμένες δυνάμεις των εξισώσεων Lagrange. Από το συμβιβαστό των μετατοπίσεων και την ισορροπία των επικόμβιων δράσεων κατά τις διευθύνσεις των βαθμών ελευθερίας, βρίσκονται οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κατασκευής.

1.4 Θεμελιώσεις με Πασσάλους

Ο Πολιτικός Μηχανικός αντιμετωπίζει τακτικά προβλήματα που αφορούν το έδαφος. Το έδαφος χρησιμοποιείται ως μέσον θεμελίωσης των τεχνικών έργων, σαν υλικό κατασκευής χωμάτινων έργων (π.χ. φραγμάτων, επιχωμάτων κ.τ.λ.) κ.α.

Όλα τα έργα του Πολιτικού Μηχανικού πρέπει να θεμελιωθούν στο έδαφος. Υπάρχει ποικιλία στους τύπους θεμελίωσης των τεχνικών έργων. Η επιλογή του τύπου θεμελίωσης εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, όπως το είδος του εδάφους, οι απαιτήσεις του έργου, οι οικονομικές συνθήκες κ.ο.κ.

1.5 Αριθμητικά Παραδείγματα

Στο κεφάλαιο αυτό, διερευνάται η συμπεριφορά κατασκευών με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία. Αρχικά, μελετάται μία βιομηχανική καπνοδόχος κατασκευασμένη από σκυρόδεμα. Γίνεται υπολογισμός της ιδιοσυχνότητάς της με αναλυτικές μεθόδους. Κατόπιν, γίνεται προσέγγιση των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της κατασκευής με αριθμητικές μεθόδους (Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων). Για τη δυναμική ανάλυση της κατασκευής, συντάχθηκε υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Στη συνέχεια, μελετάται πάσσαλος αιχμής για τον οποίο συντάχθηκε, επίσης, υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές των δύο αυτών κατασκευών.

1.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη δυναμική ανάλυση της βιομηχανικής καπνοδόχου του πασσάλου αιχμής.

Παράρτημα Α. Υπολογιστικός Κώδικας σε Γλώσσα MAPLE 13

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Η MAPLE είναι ένα πακέτο για μαθηματικούς υπολογισμούς. Με πάνω από 3000 υπολογιστικές συναρτήσεις, τη δική της γλώσσα προγραμματισμού και πολλές δυνατότητες διασύνδεσης με άλλες εφαρμογές (Matlab, Excel) και με το Web, αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο.

Κεφάλαιο 2: Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών

2.1 Εισαγωγή

Οι κατασκευές του πολιτικού μηχανικού, πέρα των στατικών φορτίων, υποβάλλονται και σε δυναμικά φορτία. Τα δυναμικά φορτία είναι φορτία των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Το αντικείμενο της δυναμικής ανάλυσης των κατασκευών είναι ο προσδιορισμός της παραμόρφωσης καθώς και των εντάσεων σε μια κατασκευή, όταν η κατασκευή αυτή υποβάλλεται σε δυναμική φόρτιση.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι γενικές έννοιες της δυναμικής των κατασκευών. Συγκεκριμένα, ορίζονται τα δυναμικά φορτία, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης της κατασκευής, το δυναμικό προσομοίωμα, γίνεται αναφορά στις ελεύθερες ταλαντώσεις- με απόσβεση και χωρίς απόσβεση-, στα γενικευμένα μονοβάθμια συστήματα καθώς και στα πολυβάθμια συστήματα.

2.2 Δυναμικά φορτία

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, «*δυναμικά φορτία είναι εκείνα, των οποίων η ένταση ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου*», όπως για παράδειγμα τα φορτία τα οποία οφείλονται σε κίνηση μηχανών, σε κίνηση οχημάτων, σε ανεμοπίεση κλπ. Η κίνηση αυτή παράγει κάποια δυναμική καταπόνηση. Τέτοια κίνηση είναι και η σεισμική κίνηση του εδάφους.

Τα δυναμικά φορτία χωρίζονται σε 2 κατηγορίες:

- Τα *ντετερμινιστικά ή αιτιοκρατικά φορτία*. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή είναι γνωστή σε όλη τη χρονική διάρκεια που εξετάζεται η συμπεριφορά της κατασκευής.
- Τα *τυχαία ή στοχαστικά*. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα φορτία για τα οποία η χρονική μεταβολή δεν είναι πλήρως γνωστή.

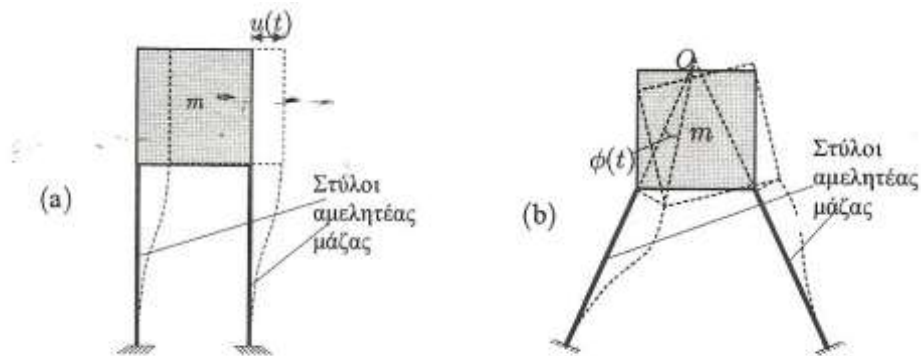
Τα *ντετερμινιστικά φορτία* χωρίζονται σε *περιοδικά και απεριοδικά*. Περιοδικά φορτία ονομάζονται τα φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή επαναλαμβάνεται διαρκώς μετά από

παρέλευση ενός σταθερού χρονικού διαστήματος T . Η σταθερά T ονομάζεται περίοδος της φόρτισης. Απεριοδικά ονομάζονται όλα τα μη περιοδικά φορτία [1].

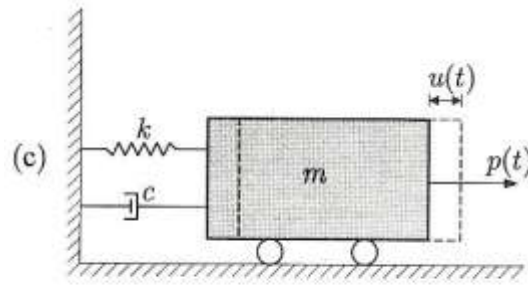
2.3 Βαθμοί Ελευθερίας Κίνησης

Για τη δυναμική ανάλυση των φορέων προσφέρεται κατ' εξοχήν η μέθοδος των μετακινήσεων. Στη μέθοδο των μετακινήσεων λαμβάνονται ως άγνωστοι οι συνιστώσες των μετακινήσεων διαφόρων σημείων της κατασκευής. Όταν υπολογιστούν οι μετακινήσεις αυτές, ως χρονικές συναρτήσεις, μας επιτρέπουν τον πλήρη καθορισμό των παραμορφώσεων αλλά και των εντάσεων που ασκούνται στο φορέα. Ο βαθμός ελευθερίας κίνησης ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων συνιστωσών μετακινήσεων που απαιτούνται για τον καθορισμό της γεωμετρίας του παραμορφωμένου φορέα σε κάθε χρονική στιγμή της κίνησής του. Ο βαθμός ελευθερίας κίνησης του φορέα δεν ταυτίζεται πάντοτε με τον βαθμό κινηματικής αοριστίας του. Ο βαθμός κινηματικής αοριστίας του φορέα είναι το πλήθος των δεσμεύσεων που πρέπει να επιβληθούν στο φορέα ώστε αυτός να παγιωθεί κατά την έννοια της στατικής.

Τα συστήματα που έχουν ένα βαθμό ελευθερίας ονομάζονται μονοβάθμια.

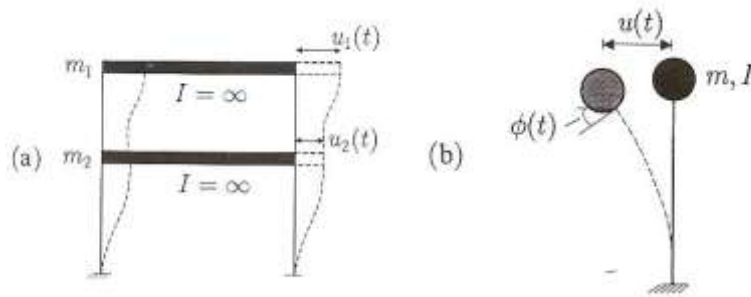


Σχ. 2.1 Συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας κίνησης [1]



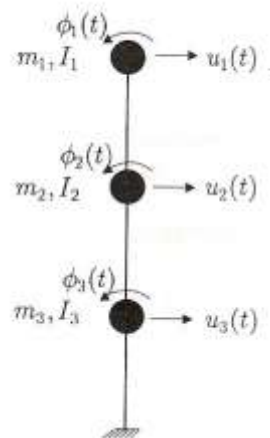
Σχ. 2.2 Συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας κίνησης [1]

Τα συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας ονομάζονται διβάθμια.



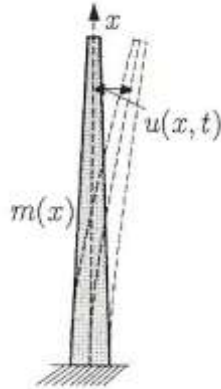
Σχ. 2.3 Συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης [1]

Τα συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας ονομάζονται πολυβάθμια.



Σχ. 2.4 Πολυβάθμιο Σύστημα [1]

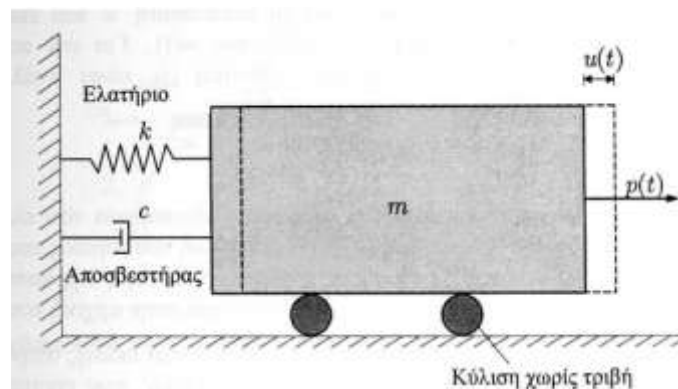
Και, τέλος, τα συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, ονομάζονται απειροβάθμια [1].



Σχ.2.5 Απειροβάθμιο Σύστημα [1]

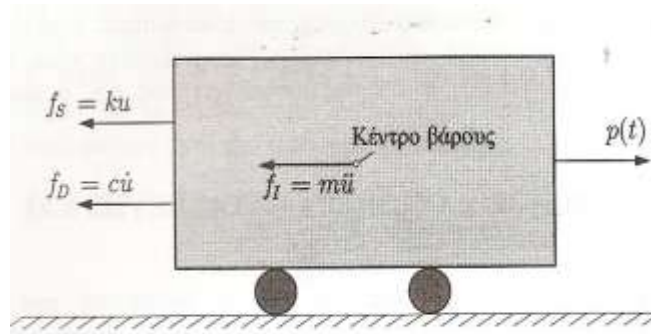
2.4 Δυναμικό Προσομοίωμα

Για έναν βαθμό ελευθερίας κίνησης (μονοβάθμιο σύστημα), το δυναμικό μοντέλο αποτελείται από μία μάζα-που αντιπροσωπεύει το υλικό σώμα-, ένα ελατήριο- που αντιπροσωπεύει τις ελαστικές δυνάμεις- και έναν αποσβεστήρα- που αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις τριβής της κατασκευής [1].



Σχ. 2.6 Προσομοίωμα Μονοβάθμιου Συστήματος [1]

Για μια τυχαία χρονική στιγμή t , για την οποία η μετατόπιση του σώματος είναι $u(t)$ από τη θέση ισορροπίας, στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:



Σχ. 2.7 Ελεύθερο σώμα με τις εξωτερικές δυνάμεις [1]

1. Η εξωτερική δύναμη $p(t)$
2. Η ελαστική δύναμη f_S
3. Η δύναμη απόσβεσης f_D
4. Η αδρανειακή δύναμη f_I

2.5 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων

Ελεύθερες ταλαντώσεις ονομάζονται οι ταλαντώσεις όταν δεν επενεργεί εξωτερική δύναμη $p(t)$. Επομένως, και σύμφωνα με το δυναμικό προσομοίωμα, η εξίσωση της κίνησης για ένα μονοβάθμιο σύστημα έχει τη μορφή [2]

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.1)$$

2.5.1 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων χωρίς απόσβεση

Όταν η απόσβεση του συστήματος είναι $c=0$, τότε μιλάμε για Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση. Επομένως, η σχέση 2.1 γίνεται

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.2)$$

Για την εξίσωση αυτή, αναζητείται λύση της μορφής

$$u = e^{\lambda t} \quad (2.3)$$

όπου λ μια προσδιοριστέα σταθερά.

Με παραγωγή της 2.3, προκύπτει

$$\ddot{u} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας στην 2.2 τις 2.3 και 2.4

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (2.5)$$

Για $t \geq 0$, ισχύει ότι $e^{\lambda t} \neq 0$, επομένως η εξίσωση 2.4 αληθεύει μόνο όταν

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (2.6)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler, η γενική λύση της 2.3 είναι

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.7)$$

όπου A, B οι νέες αυθαίρετες σταθερές που εισάγονται στην εξίσωση. Για τα A, B ισχύει

$$A = A' + B'$$

$$B = i(A' - B')$$

Για να προσδιοριστούν οι αυθαίρετες αυτές σταθερές είναι απαραίτητη η γνώση των αρχικών συνθηκών, η γνώση, δηλαδή, της θέσης και της ταχύτητας για κάποια χρονική στιγμή. Συνήθως, λαμβάνεται ως χρονική στιγμή η αρχή της κίνησης, $t_0 = 0$.

Η ταχύτητα του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνεται εάν παραγωγιστεί η 2.6. Επομένως

$$\dot{u}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad (2.8)$$

Οι σχέσεις 2.7 και 2.8 για $t=0$ δίνουν

$$A = u(0), B = \frac{\dot{u}(t)}{\omega} \quad (2.9)$$

Επομένως, η 2.7 γράφεται

$$u(t) = \frac{\dot{u}(t)}{\omega} \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.10)$$

Όταν $u(0) = \dot{u}(t) = 0$, τότε και $u(t) = 0$. Δηλαδή, για να υπάρξει κίνηση πρέπει ένα από τα $u(0)$ ή $\dot{u}(0)$ να είναι διάφορο του μηδενός. Πρέπει, επομένως, στο σύστημα να δίνεται κάποια αρχική μετατόπιση από τη θέση στατικής ισορροπίας ώστε να υπάρχει κάποια αρχική ταχύτητα.

Ο χρόνος T που απαιτείται για να εκτελέσει το σύστημα μια πλήρη ταλάντωση, ονομάζεται ιδιοπερίοδος του συστήματος και υπολογίζεται από τη σχέση

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.11)$$

και εκφράζεται σε μονάδες χρόνου (1s).

Το αντίστροφο της ιδιοπεριόδου

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.12)$$

που εκφράζει τον αριθμό των πλήρων ταλαντώσεων στη μονάδα του χρόνου, ονομάζεται συχνότητα του συστήματος. Μονάδα μέτρησης της ιδιοσυχνότητας του συστήματος είναι το 1 Hertz (s^{-1}).

Το μέγεθος ω ονομάζεται κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος και έχει διαστάσεις rad/s ή s^{-1} . Εξαρτάται από τη μάζα και την ακαμψία του συστήματος και αποτελεί ιδιοδυναμικό χαρακτηριστικό μέγεθος του συστήματος[2].

2.5.2 Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβάθμιων Συστημάτων με απόσβεση

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $c \neq 0$. Επομένως, η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.13)$$

Αναζητώντας και πάλι λύση της μορφής

$$u = e^{\lambda t} \quad (2.14)$$

προκύπτει η παρακάτω χαρακτηριστική εξίσωση

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2.15)$$

ή

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2.16)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης υπολογίζονται από τη σχέση

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.17)$$

Το είδος των ριζών εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας, δηλαδή της ποσότητας που βρίσκεται στο υπόριζο.

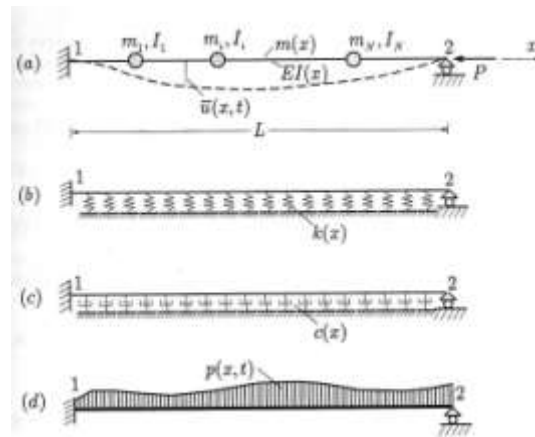
- Για $\Delta > 0$, υπάρχουν 2 πραγματικές ρίζες.
- Για $\Delta = 0$, υπάρχει μια διπλή πραγματική ρίζα.
- Για $\Delta < 0$, υπάρχουν 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Κρίσιμη ονομάζεται η απόσβεση μετά την οποία το σύστημα μεταπίπτει από περιοδική σε απεριοδική κίνηση. Στην περίπτωση της *υποκρίσιμης απόσβεσης*, η τιμή του συντελεστή απόσβεσης είναι πολύ μικρότερη της κρίσιμης τιμής. Όταν η απόσβεση χαρακτηρίζεται *υπερκρίσιμη*, η κίνηση δεν είναι ταλάντωση. Το σύστημα επανέρχεται σε κατάσταση ηρεμίας, ακολουθώντας εκθετικό νόμο[2].

2.6 Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

Για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής, για λόγους διευκόλυνσης, διατυπώνεται η παραδοχή ότι η μάζα κάθε στοιχείου της κατασκευής βρίσκεται συγκεντρωμένη στα άκρα του, δηλαδή η μισή μάζα βρίσκεται στην κεφαλή και η άλλη μισή στον πόδα. Για την καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού προσομοιώματος, η μάζα μπορεί να θεωρηθεί κατανεμημένη σε όλο το μήκος του στοιχείου, με δυνατότητα επιλογής του σχήματος της παραμόρφωσης ώστε να πλησιάζει το πραγματικό όσο το δυνατόν καλύτερα. Επεκτείνοντας τη μέθοδο αυτή, μπορεί να προσεγγιστεί ένα συνθετότερο γενικευμένο μονοβάθμιο σύστημα.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου συνθετότερου γενικευμένου μονοβάθμιου συστήματος αποτελεί η πακτωμένη δοκός του σχήματος



Σχ. 2.8 Πακτωμένη Δοκός επί Ελαστικού Εδάφους [1]

Η δοκός στηρίζεται με πάκτωση στο σημείο 1 και με απλή στήριξη στο σημείο 2. Σε όλο της το μήκος στηρίζεται επί μη ομοιογενούς ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, με δείκτη εδάφους $k(x)$. Το έδαφος αντιδρά με κατανεμημένη απόσβεση με συντελεστή $c(x)$. Για τη ροπή αδρανείας και τη μάζα της δοκού ισχύει $I=I(x)$ και $m=m(x)$, αφού η διατομή είναι μεταβλητή. Στα σημεία $x=x_i$, για $i=1,2,\dots,N$, υπάρχουν συγκεντρωμένες μάζες m_i με στροφική αδράνεια I_i . Η δοκός φορτίζεται με εγκάρσιο κατανεμημένο φορτίο $p(x,t)$ και συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο P στο άκρο 2.

Η συνάρτηση σχήματος θα επιλεγεί ώστε να ισχύουν τα παρακάτω

$$\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi(L) = 0, \psi'(L) \neq 0 \quad (2.18)$$

Επιλέγεται η ελαστική γραμμή μονόπακτης δοκού σταθερής διατομής υπό ομοιόμορφο φορτίο, η οποία καλύπτει τις προϋποθέσεις.

Υπολογίζοντας τον όρο

$$k^* = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \int_0^L k(x) [\psi(x)]^2 dx \quad (2.19)$$

βρίσκεται η ακαμψία του συστήματος.

Η μάζα του συστήματος υπολογίζεται από τον τύπο

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i [\psi(x_i)]^2 + \sum_{i=1}^N I_i [\psi'(x_i)]^2 \quad (2.20)$$

Τέλος, η απόσβεση του συστήματος καθώς και το φορτίο, υπολογίζονται από τους τύπους

$$c^* = \int_0^L c(x) \psi(x) dx \quad (2.21)$$

$$p^* = \int_0^L p(x,t) \psi(x) dx \quad (2.22)$$

[1]

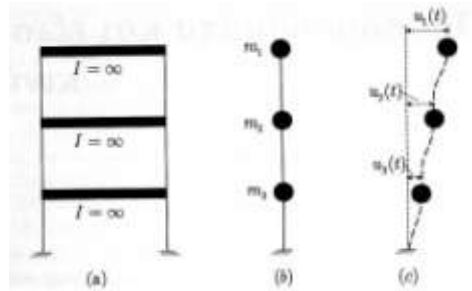
2.7 Πολυβάθμια Συστήματα

Στις κατασκευές του πολιτικού μηχανικού, ενώ η μάζα είναι κατανεμημένη σε όλα τα μέλη τα κατασκευής, πολλές φορές εμφανίζει συγκεντρώσεις σε σημεία ή περιοχές. Όπως, για παράδειγμα, σε ένα κτίριο, η μάζα συγκεντρώνεται στις στάθμες του κάθε ορόφου, σε έναν υδατόπυργο συγκεντρώνεται στην κεφαλή του στύλου που στηρίζεται η δεξαμενή, κτλ. Λόγω αυτής της συγκέντρωσης της μάζα, επιτρέπεται η περιγραφή του απειροβάθμιου συστήματος από κάποιο πολυβάθμιο, λαμβάνοντας ως συντεταγμένες της παραμόρφωσης τις συνιστώσες μετατόπισης των σημείων της κατασκευής όπου παρουσιάζεται συγκέντρωση αδρανειακών χαρακτηριστικών.

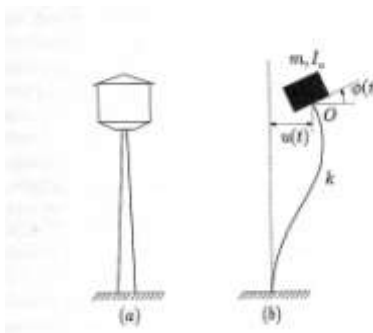
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τριώροφο πλαίσιο του οποίου τα ζυγώματα είναι πρακτικά άκαμπτα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην κατασκευή αυτή, η μάζα είναι συγκεντρωμένη στις στάθμες των ορόφων του πλαισίου. Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας και πρέπει να προσδιοριστούν οι τρεις άγνωστες μετατοπίσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Στην περίπτωση του υδατόπυργου, γίνεται η παραδοχή ότι η μάζα του στύλου είναι αμελητέα σε σύγκριση με εκείνη της δεξαμενής. Με βάση την παραδοχή αυτή, ο υδατόπυργος προσομοιώνεται με ένα απλό μοντέλο ενός εύκαμπτου στύλου, πακτωμένου στο έδαφος, ο οποίος φέρει στην κεφαλή μια μάζα m με στροφική αδράνεια I_0 . Η μάζα m μπορεί να μετατοπίζεται οριζόντια και να στρέφεται μέσα στο επίπεδο. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς

ελευθερίας και πρέπει να προσδιοριστούν η οριζόντια μετατόπιση της δεξαμενής καθώς και η στροφή της.



Σχ. 2.9 Σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας [2]



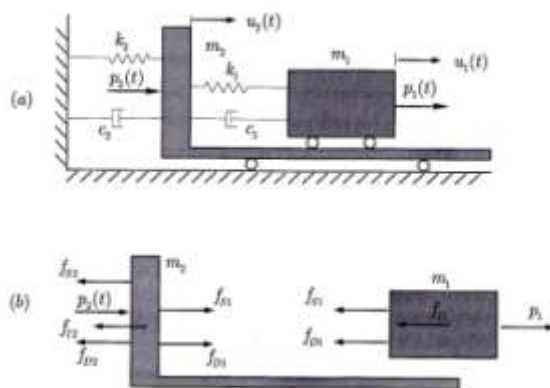
Σχ. 2.10 Σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας [2]

Τα πολυβάθμια συστήματα κατατάσσονται στις εξής κατηγορίες:

1. Συστήματα με εντοπισμένη μάζα και εντοπισμένη ακαμψία.
2. Συστήματα με κατανεμημένη μάζα και εντοπισμένη ακαμψία.
3. Συστήματα με εντοπισμένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία.
4. Συστήματα με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία.
5. Μικτά συστήματα που προκύπτουν από συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων

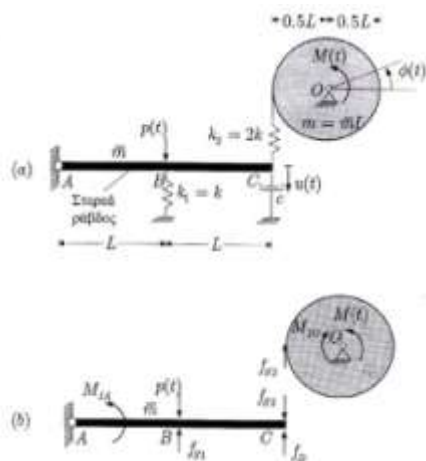
Ο όρος εντοπισμένη μάζα δηλώνει τη συγκεντρωμένη μάζα, η οποία μπορεί να έχει και ροπή αδράνειας, ενώ ο όρος συγκεντρωμένη μάζα θα δηλώνει στο εξής τη σημειακά συγκεντρωμένη μάζα, της οποίας η ροπή αδράνειας είναι μηδέν.

- Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από 2 στερεά σώματα με μάζες m_1, m_2 . Η οριζόντια κίνησή τους δεσμεύεται ελαστικά από ελατήρια αμελητέας μάζας k_1, k_2 , όπως φαίνεται στο δυναμικό προσομοίωμα του σχήματος. Το σύστημα αυτό έχει εντοπισμένες μάζες και εντοπισμένες ακαμψίες. Είναι σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας και πρέπει να προσδιοριστούν οι μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ [2]



Σχ. 2.11 Σύστημα με εντοπισμένη μάζα και εντοπισμένη ακαμψία[2]

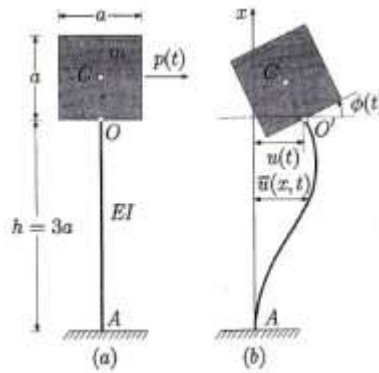
- Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από μια στέρα ράβδο AC, της οποίας η μάζα είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα σε όλο της το μήκος. Το ίδιο ισχύει και για το στέρεο κυκλικό σώμα κυκλικού σχήματος.



Σχ. 2.12 Σύστημα με κατανεμημένη μάζα και εντοπισμένη ακαμψία[2]

Η κίνηση του συστήματος δεσμεύεται από ελατήρια αμελητέας μάζας $k_1 = k$ και $k_2 = 2k$. Το σύστημα αυτό αποτελεί περίπτωση συστήματος με κατανεμημένες μάζες και εντοπισμένες ακαμψίες. Οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης είναι δύο και πρέπει να προσδιοριστούν η κατακόρυφη μετατόπιση $u(t)$ του άκρου C της ράβδου καθώς και η γωνία στροφής του κυκλικού σώματος [2].

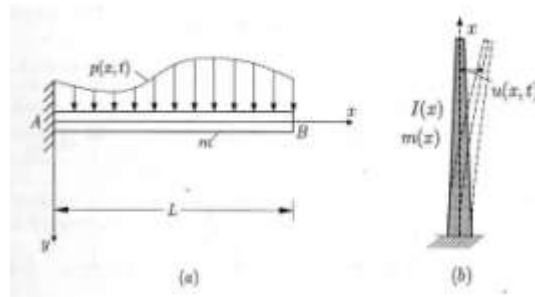
- Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από έναν στύλο αμελητέας μάζας AO και από ένα στερεό σώμα σχήματος τετραγώνου. Το σύστημα αυτό αποτελεί παράδειγμα συστήματος με εντοπισμένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία. Το σώμα μπορεί να κινηθεί μέσα στο επίπεδο. Εάν εξεταστεί η κίνηση ως προς το σημείο O, το οποίο δε συμπίπτει με το κέντρο βάρους του τετράγωνου σχήματος, στη γενική περίπτωση, υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας η οριζόντια μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση και η στροφή, οι οποίες και πρέπει να προσδιοριστούν. Αφού ο στύλος θεωρείται εύκαμπος, η οριζόντια μετατόπιση, καθώς και η στροφή, οφείλονται στην καμπτική παραμόρφωσή του. Η κατακόρυφη μετατόπιση οφείλεται, αφενός στην αξονική βράχυνση –η οποία είναι πολύ μικρή και παραλείπεται- και, αφετέρου, στη βράχυνση της χορδής της ελαστικής γραμμής- η οποία επίσης παραλείπεται καθώς εξετάζονται γραμμικές ταλαντώσεις [2].



Σχ. 2.13 Σύστημα με εντοπισμένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία [2]

- Τα συστήματα με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία ονομάζονται συνεχή συστήματα. Έχουν άπειρους βαθμούς ελευθερίας κίνησης και η κίνησή τους περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα συνεχή συστήματα μπορούν να

προσομοιωθούν με πολυβάθμια συστήματα, ακόμη και στην περίπτωση που η μάζα δεν παρουσιάζει συγκέντρωση σε ορισμένα σημεία.



Σχ. 2.14 Σύστημα με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία[2]

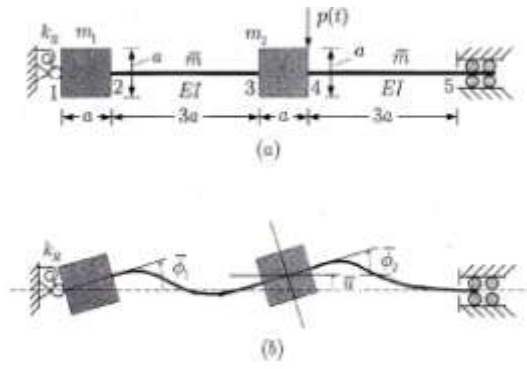
Για την επίλυση τέτοιων συστημάτων, χρησιμοποιούνται κυρίως 2 μέθοδοι:

- *Μέθοδος των υποθετικών καθολικών ιδιομορφών*, η οποία εξετάζει το σύστημα ως ένα αδιαίρετο σύνολο.
- *Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων*, η οποία εξετάζει το σύστημα ως ένα διακριτό πολυβάθμιο. Αυτή η διακριτοποίηση γίνεται με τη μέθοδο της ακαμψίας. Η κατασκευή διαιρείται σε ένα σύνολο στοιχείων με γνωστές παραμορφωσιακές και αδρανειακές ιδιότητες.

Και οι δύο αυτές μέθοδοι επιτρέπουν την δυναμική ανάλυση πολύπλοκων κατασκευών με κατανεμημένη μάζα και ακαμψία, οι οποίες προσεγγίζονται με πολυβάθμια συστήματα [2].

- *Μικτά συστήματα* ονομάζονται τα συστήματα που προκύπτουν από το συνδυασμό των προηγούμενων περιπτώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μικτού συστήματος αποτελεί η κατασκευή του σχήματος.

Το σύστημα αυτό έχει εντοπισμένες μάζες (m_1 , m_2), κατανεμημένη μάζα (η μάζα των ράβδων), εντοπισμένη ακαμψία (k_R του στροφικού ελατηρίου) και κατανεμημένη ακαμψία (ακαμψία των ράβδων) [2].



Σχ. 2.15 Μικτό Σύστημα [2]

Κεφάλαιο 3^ο: Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

3.1 Εισαγωγή

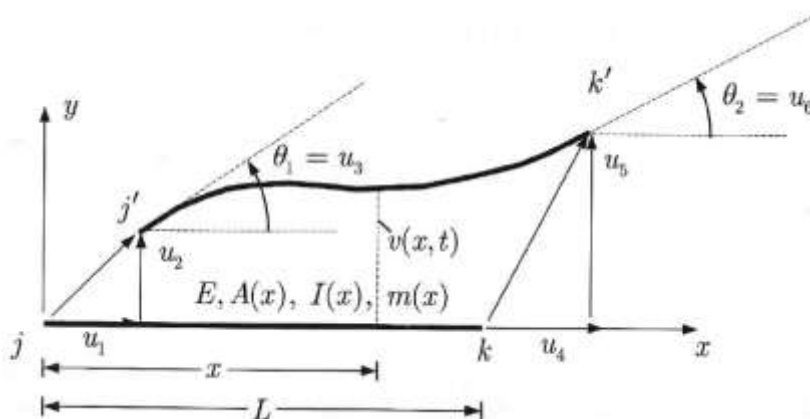
Στις πραγματικές κατασκευές, η συνήθης περίπτωση που συναντάται είναι η κατανεμημένη μάζα. Εάν οι κατασκευές αυτές αντιμετωπιστούν ως συνεχή συστήματα, απαιτείται η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, για τις ποίες θα πρέπει να είναι γνωστές αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Αυτό αποτελεί, όμως, ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα. Σε αυτό το πρόβλημα δίνει λύση η *Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Elements Method)*.

Στη *μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, κάθε κατασκευή διαιρείται σε μικρότερα στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους. Οι κόμβοι είναι διακριτά σημεία σύνδεσης των στοιχείων της κατασκευής. Σε αυτούς εξασφαλίζεται η συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (μετατοπίσεων και στροφών) καθώς και η ισορροπία των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων. «*Μετά τη διακριτοποίηση, δεχόμαστε μέσα σε κάθε στοιχείο ότι η συνάρτηση του πεδίου (της μετατοπίσεως εν προκειμένω) μεταβάλλεται σύμφωνα με γνωστό νόμο, ο οποίος εκφράζεται ως επαλληλία σχήματος, συναρτήσεων σχήματος, που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες τιμές των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου.*» (Κατσικαδέλης, 2004, σελ. 41). Με παρόμοιο τρόπο εκφράζονται η ελαστική και κινητική ενέργεια, καθώς και το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων. Οι επικόμβιες δράσεις προκύπτουν ως γενικευμένες δυνάμεις των εξισώσεων Lagrange. Από το συμβιβαστό των μετατοπίσεων και την ισορροπία των επικόμβιων δράσεων κατά τις διευθύνσεις των βαθμών ελευθερίας, βρίσκονται οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κατασκευής [2].

3.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

3.2.1 Ιδιότητες του Στοιχείου Επίπεδου Πλαισίου

Έστω ένα στοιχείο επίπεδου πλαισίου μεταβλητής διατομής $A(x)$, ροπής αδράνειας $I(x)$ και μέτρου ελαστικότητας E . Ο άξονας του στοιχείου, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ταυτίζεται με τον άξονα x . Στα άκρα του στοιχείου υπάρχουν οι κόμβοι του στοιχείου j, k . Στην παραμορφωμένη κατάσταση και τη χρονική στιγμή t , τα άκρα του στοιχείου μετατοπίζονται στις θέσεις j', k' , όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχ. 3.1 Βαθμοί Ελευθερίας Στοιχείου Επίπεδου πλαισίου [2]

Το στοιχείο αυτό έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Για τον κόμβο j , τις μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ καθώς και τη στροφή $\theta_1(t)$. Για τον κόμβο k , τις μετατοπίσεις $u_4(t)$ και $u_5(t)$ καθώς και τη στροφή $\theta_2(t)$.

Θέτουμε την αξονική μετατόπιση υπό τη μορφή

$$u(x,t) = u_1\psi_1(x) + u_4\psi_4(x) \quad (3.1)$$

όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_4(x)$ οι συναρτήσεις σχήματος, οι οποίες εκφράζουν την αξονική παραμόρφωση για $u_1 = 1, u_4 = 0$ και $u_1 = 0, u_4 = 1$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις σχήματος έχουν προσδιοριστεί για στοιχείο σταθερής διατομής και είναι οι εξής:

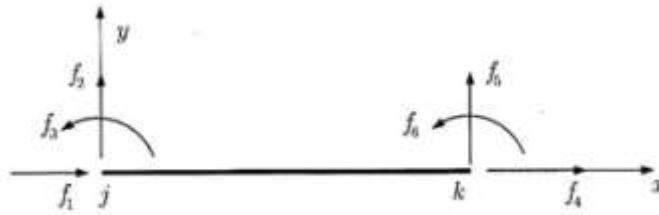
$$\psi_1(x) = 1 - \xi \quad (3.2.a)$$

$$\psi_4(x) = \xi \quad (3.3.a)$$

όπου,

$$\xi = \frac{x}{L}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θετικές σημάνσεις δράσεων για το στοιχείο του επίπεδου πλαισίου:



Σχ. 3.2 Θετική Σήμανση Επικόμβιων Δράσεων Στοιχείου Επίπεδου Πλαισίου [2]

Σε αντίθεση με την κλασσική σήμανση, οι επικόμβιες δράσεις είναι θετικές όταν είναι ομόφορες με τους άξονες που αναφέρονται. Οι δράσεις κατά τις διευθύνσεις των u_1, u_2, u_4 και u_5 είναι δυνάμεις, ενώ κατά τις διευθύνσεις των u_3 και u_6 είναι ροπές.

Το διάνυσμα των επικόμβιων ελαστικών δυνάμεων δίνεται από τον τύπο

$$f_s^e = k^e u^e \quad (3.4)$$

όπου k^e το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e και u^e το μητρώο των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου e . Η σχέση 3.4 σε μητρωική μορφή γράφεται

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \\ f_{s4} \\ f_{s5} \\ f_{s6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Το μητρώο ακαμψίας, όπως φαίνεται στην παραπάνω σχέση, δίνεται ως

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Για στοιχείο σταθερής διατομής, $A(x) = A, I(x) = I$, το μητρώο ακαμψίας δίνεται από τη σχέση

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με την παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας, το διάνυσμα των αδρανειακών δυνάμεων δίνεται από τον τύπο

$$f_I^e = m^e \ddot{u}^e \quad (3.8)$$

όπου m^e το μητρώο μάζας του στοιχείου e και \ddot{u}^e το μητρώο των επικόμβιων επιταχύνσεων του στοιχείου e . Η σχέση 3.8, σε μητρώικη μορφή, γράφεται

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ f_{I3} \\ f_{I4} \\ f_{I5} \\ f_{I6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{62} & m_{63} & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Επομένως, το μητρώο μάζας m^e ορίζεται ως

$$m^e = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{62} & m_{63} & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Για στοιχείο σταθερής διατομής, το μητρώο μάζας δίνεται ως

$$\mathbf{m}^e = \frac{m^e}{420} = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

όπου $\mathbf{m}^e = \bar{m}^e L^e$ είναι η ολική μάζα του στοιχείου e και $\bar{m}^e = \rho AL$. Το μητρώο μάζας που προκύπτει με αυτό τον τρόπο ονομάζεται *συμβατό μητρώο μάζας*.

Σύμφωνα με την *παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών στους κόμβους*, το μητρώο μάζας δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{m}^e = \frac{m^e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

όπου $\mathbf{m}^e = \bar{m}^e L^e$ είναι η ολική μάζα του στοιχείου e και $\bar{m}^e = \rho AL$. Στην περίπτωση των συγκεντρωμένων μαζών, το μητρώο μάζας προκύπτει διαγώνιο.

Το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων αποσβέσεων δίνεται από τον τύπο

$$f_D^e = c^e \dot{u}^e \quad (3.13)$$

όπου c^e το μητρώο αποσβέσεως του στοιχείου e και \dot{u}^e το μητρώο επικόμβιων ταχυτήτων του στοιχείου e . Η σχέση 3.13, σε μητρωϊκή μορφή, γράφεται

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ f_{D3} \\ f_{D4} \\ f_{D5} \\ f_{D6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & c_{26} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & c_{53} & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{62} & c_{63} & 0 & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Επομένως, το μητρώο απόσβεσης ορίζεται ως

$$c^e = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & c_{26} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & c_{53} & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{62} & c_{63} & 0 & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Για στοιχείο με σταθερή διατομή, το μητρώο απόσβεσης δίνεται ως

$$c^e = \begin{bmatrix} \frac{c_s A}{L} & 0 & 0 & -\frac{c_s A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12c_s I}{L^3} & \frac{6c_s I}{L^2} & 0 & -\frac{12c_s I}{L^3} & \frac{6c_s I}{L^2} \\ 0 & \frac{6c_s I}{L^2} & \frac{4c_s I}{L} & 0 & -\frac{6c_s I}{L^2} & \frac{2c_s I}{L} \\ -\frac{c_s A}{L} & 0 & 0 & \frac{c_s A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12c_s I}{L^3} & -\frac{6c_s I}{L^2} & 0 & \frac{12c_s I}{L^3} & -\frac{6c_s I}{L^2} \\ 0 & \frac{6c_s I}{L^2} & \frac{2c_s I}{L} & 0 & -\frac{6c_s I}{L^2} & \frac{4c_s I}{L} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Έστω ότι το στοιχείο e του πλαισίου, σχηματίζει γωνία φ ως προς τον άξονα $O\bar{x}\bar{y}$. Ο άξονας $j\bar{k}$ του στοιχείου ορίζεται το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων jxy . Οι άξονες $\bar{x}\bar{y}$ ονομάζονται καθολικοί άξονες, ενώ οι xy τοπικοί άξονες. Για τον μετασχηματισμό των

επικόμβιων συντεταγμένων, από το τοπικό σύστημα αναφοράς στο καθολικό, χρησιμοποιείται το μητρώο περιστροφής R^e το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$R^e = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Τα μητρώα \bar{k}^e , \bar{m}^e και \bar{c}^e είναι τα μητρώα ακαμψίας, μάζας και απόσβεσης του στοιχείου e ως προς τους καθολικούς άξονες και υπολογίζονται αντίστοιχα από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας

$$\bar{k}^e = (R^e)^T k^e R^e \quad (3.18)$$

$$\bar{m}^e = (R^e)^T m^e R^e \quad (3.19)$$

$$\bar{c}^e = (R^e)^T c^e R^e \quad (3.20)$$

Για να υπολογιστούν τα ολικά μητρώα ακαμψίας, μάζας και απόσβεσης, πρέπει να συνταχθούν τα *μητρώα ένταξης*. Τα μητρώα ένταξης είναι μητρώα τα οποία έχουν πάντοτε 6 γραμμές, ενώ έχουν τόσες στήλες όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης της κατασκευής. Το κάθε μητρώο ένταξης αναφέρεται σε ένα στοιχείο της κατασκευής και συμπληρώνεται με βάση τη συνδεσμολογία του πλαισίου. Η συμπλήρωση γίνεται με βάση τους βαθμούς ελευθερίας κίνησης της αρχής και του πέρατος του στοιχείου. Στους βαθμούς ελευθερίας της αρχής και του πέρατος συμπληρώνεται με 1, ενώ σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις με 0.

Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα μητρώα \hat{K}^e , \hat{M}^e και \hat{C}^e κάθε στοιχείου από τις σχέσεις

$$\hat{K}^e = (\alpha^e)^T \bar{k}^e \alpha^e \quad (3.21)$$

$$\hat{M}^e = (\alpha^e)^T \bar{m}^e \alpha^e \quad (3.22)$$

$$\hat{C}^e = (\alpha^e)^T \bar{c}^e \alpha^e \quad (3.23)$$

όπου α^e το μητρώο ένταξης του στοιχείου.

Τα ολικά μητρώα ακαμψίας (\bar{K}), μάζας (\bar{M}) και απόσβεσης (\bar{C}) υπολογίζονται από το άθροισμα των μητρώων \hat{K}^e , \hat{M}^e και \hat{C}^e αντίστοιχα.

Η εξίσωση κίνησης ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση μπορεί να γραφεί, χάριν απλούστευσης, ως

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (3.24)$$

Η εξίσωση κίνησης που μπορεί να γραφεί σε αυτό το σημείο, αναφέρεται σε έναν ελεύθερο φορέα. Όλες οι κατασκευές, όμως, στηρίζονται σε ορισμένους κόμβους, δηλαδή υπάρχει δέσμευση ορισμένων βαθμών ελευθερίας. Για να εμποδιστεί η κίνηση του φορέα ως στερεού σώματος, απαιτείται η δέσμευση τουλάχιστον 3 βαθμών ελευθερίας. Η επιλογή των βαθμών ελευθερίας που θα δεσμευθούν γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκλείεται η απειροστή κινητικότητα της κατασκευής. Σε αυτό το σημείο γίνεται αναδιάταξη του μητρώου (\bar{u}), που περιέχει τις μετατοπίσεις των κόμβων, ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές μετατοπίσεις των στηρίξεων (\bar{u}_s) από τις άγνωστες των ελεύθερων κόμβων (u_f). Η αναδιάταξη γίνεται ώστε τα γνωστά στοιχεία (\bar{u}_s) να καταλαμβάνουν τις τελευταίες θέσεις του διανύσματος με τη χρήση του μετασχηματισμού

$$\bar{u} = V\tilde{u} \quad (3.25)$$

όπου \tilde{u} το αναδιατεταγμένο διάνυσμα και V το τετραγωνικό μητρώο αναδιάταξης ή μητρώο Bool. Το μητρώο V , όπως αναφέρθηκε, είναι τετραγωνικό μητρώο και έχει αριθμό στηλών και γραμμών ίσο με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας κίνησης της κατασκευής. Συμπληρώνεται με 1 και 0 ώστε από τον πολλαπλασιασμό του με το αναδιατεταγμένο διάνυσμα μετατοπίσεων, να προκύπτει το αρχικό διάνυσμα μετατοπίσεων. Με τη βοήθεια του μητρώου V , γίνεται αναδιάταξη και στα μητρώα \bar{K} , \bar{M} και \bar{C} σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις

$$\tilde{K} = V^T \bar{K} V \quad (3.26)$$

$$\tilde{M} = V^T \bar{M} V \quad (3.27)$$

$$\tilde{C} = V^T \bar{C} V \quad (3.28)$$

3.3 Στατική Συμπύκνωση.

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, συναντάται συχνά η κινητική ενέργεια των στροφικών βαθμών ελευθερίας κίνησης να είναι μικρή σε σχέση με την κινητική ενέργεια των μεταφορικών βαθμών ελευθερίας. Για να μειωθεί ο αριθμός των εξισώσεων κίνησης που πρέπει να επιλυθούν, μπορούν να παραλειφθούν οι δυνάμεις αυτές.

Εάν το διάνυσμα των μετατοπίσεων αναδιαταχθεί έτσι ώστε μετά τον επιμερισμό το διάνυσμα u_t να περιλαμβάνει τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας και το διάνυσμα u_θ τους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας, η εξίσωση 3.24, για $C=0$, μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix} M_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_t \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{t\theta} \\ K_{\theta t} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων, η εξίσωση γίνεται

$$M_{tt} \ddot{u}_t + K_{tt} u_t + K_{t\theta} u_\theta = 0 \quad (3.30)$$

$$K_{\theta t} u_t + K_{\theta\theta} u_\theta = 0 \quad (3.31)$$

Η εξίσωση 3.31 είναι οιονεί στατική. Για αυτό το λόγο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απαλοιφή του u_θ από την 3.30. Επιλύοντας την 3.31 ως προς u_θ και αντικαθιστώντας στην 3.30, λαμβάνεται

$$M_{tt} \ddot{u}_t + K_{tt}^* u_t = 0 \quad (3.32)$$

όπου

$$K_{tt}^* = K_{tt} - K_{t\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} \quad (3.33)$$

Αυτή η πράξη μπορεί να γίνει διότι το μητρώο $K_{\theta\theta}$ είναι τετραγωνικό και μπορεί να αντιστραφεί. Το μητρώο K_{tt}^* είναι το στατικά συμπεκνωμένο μητρώο ακαμψίας και η διαδικασία προσδιορισμού του ονομάζεται *στατική συμπίκνωση*.

Ακόμη, μείωση των βαθμών ελευθερίας μπορεί να επιτευχθεί όταν το μητρώο μάζας προκύπτει από συμβατά μητρώα μαζών των στοιχείων ή όταν οι αδρανειακές δυνάμεις κατά τους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας δεν είναι αμελητέες. Σε αυτή την περίπτωση, το μητρώο μάζας της σχέσης 3.32 είναι της μορφής

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{tt} & M_{t\theta} \\ M_{\theta t} & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

όπου $M_{t\theta}, M_{\theta t}, M_{\theta\theta} \neq 0$.

Από τον τύπο της ελαστικής ενέργειας, λαμβάνεται ο τύπος του μειωμένου μητρώου ακαμψίας, ο οποίος είναι

$$\mathbf{K}^* = K_{tt} - K_{t\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} \quad (3.35)$$

Αντίστοιχα, από τον τύπο της κινητικής ενέργειας, λαμβάνεται ο τύπος του μειωμένου μητρώου μάζας, ο οποίος είναι

$$\mathbf{M}^* = M_{tt} - M_{t\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} + K_{\theta t} K_{\theta\theta}^{-1} M_{\theta\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} - K_{\theta t} K_{\theta\theta}^{-1} M_{\theta t} \quad (3.36)$$

Όταν το μητρώο μάζας είναι διαγώνιο, δηλαδή $M_{t\theta} = M_{\theta t} = 0$, τότε

$$\mathbf{M}^* = M_{tt} - K_{\theta t} K_{\theta\theta}^{-1} M_{\theta\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} \quad (3.37)$$

Αυτή η μέθοδος μείωσης των βαθμών ελευθερίας είναι γνωστή ως *αναγωγή Guyan*. Όπως φαίνεται, η ακαμψία της κατασκευής δεν επηρεάζεται, αφού στο μειωμένο μητρώο ακαμψίας συμβάλουν όλα τα στοιχεία του αρχικού μητρώου ακαμψίας. Στο μειωμένο μητρώο μάζας, ωστόσο, συμβάλουν και στοιχεία του αρχικού μητρώου μάζας αλλά και στοιχεία του αρχικού μητρώου ακαμψίας. Δηλαδή, το μητρώο μάζας προσεγγίζεται. Επομένως, η αξιοπιστία

των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την επιλογή των βαθμών ελευθερίας που απαλείφονται από την αναγωγή [2].

3.4 Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Πολυβάθμιων Συστημάτων

Οι ιδιοσυχνότητες των πολυβάθμιων συστημάτων προσδιορίζονται από τη σχέση

$$(K - \omega^2 M)\mathbf{\beta} = 0 \quad (3.38)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί σύστημα N γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Από το σύστημα αυτό, μπορεί να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\mathbf{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}^T$. Το διάνυσμα $\mathbf{\beta}$, δηλαδή, περιέχει τα εύρη των μετατοπίσεων. Το σύστημα της 3.38 είναι ομοιογενές. Δηλαδή, για να έχει λύση διάφορη της μηδενικής, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδενική. Δηλαδή

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.39)$$

Η παραπάνω σχέση, σε μητρική μορφή, γράφεται

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{21} - \omega^2 m_{21} & \dots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2N} - \omega^2 m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} - \omega^2 m_{N1} & k_{N2} - \omega^2 m_{N2} & \dots & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας της παραπάνω σχέσης είναι πολυβάθμιο N βαθμού ως προς ω^2 . Δηλαδή, η σχέση 3.40 μπορεί να αληθεύει για N στο πλήθος τιμές του ω^2 , επομένως και του $\omega > 0$. Οι τιμές αυτές είναι οι *ιδιοσυχνότητες ή φυσικές ιδιοσυχνότητες του συστήματος*. Η σχέση 3.40 από την οποία προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες αυτές, ονομάζεται εξίσωση συχνοτήτων του συστήματος. Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά $\omega_1 < \omega_2 \dots < \omega_N$. Η μικρότερη τιμή, η ω_1 δηλαδή, ονομάζεται θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Για κάθε τιμή του ω_i ($i=1,2,\dots,N$), προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που έχει τη μορφή της 3.40. Κάθε τέτοιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, επιτρέπει τον προσδιορισμό ενός διανύσματος $\mathbf{\beta}^{(i)}$. Λόγω του μηδενισμού της ορίζουσας, το πλήθος των

ανεξάρτητων μεταβλητών είναι N-1. Αυτό επιτρέπει τον αυθαίρετο ορισμό μίας από τις συνιστώσες $(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_N^{(i)})$ του διανύσματος $\beta^{(i)}$. Τυχαία, μπορεί να ληφθεί η τιμή $\beta_1^{(i)}=1$. Επομένως, το σύστημα 3.40 γράφεται

$$\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{21} - \omega^2 m_{21} & \dots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2N} - \omega^2 m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} - \omega^2 m_{N1} & k_{N2} - \omega^2 m_{N2} & \dots & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_2^{(i)} \\ \dots \\ \beta_N^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Από τη σχέση 3.41, προκύπτει ότι για κάθε τιμή του (ω_i) , λαμβάνεται ένα διάνυσμα $\beta^{(i)}$. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται ιδιοδιανύσματα του δυναμικού συστήματος. Τα ιδιοδιανύσματα αυτά μπορούν να ενταχθούν σε ένα μητρώο B διαστάσεων N×N, το οποίο ονομάζεται μητρώο ιδιοδιανυσμάτων.

$$\mathbf{B} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \dots & \beta_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Η εικόνα παραμόρφωσης του συστήματος εκφράζεται από τις συνιστώσες του ιδιοδιανύσματος β_i . Το σχήμα παραμόρφωσης που ορίζεται από το β_i , ονομάζεται *i-ιδιομορφή της ελεύθερης ταλάντωσης*.

Οι συνιστώσες του ιδιοδιανύσματος είναι γνωστές σε σχέση προς κάποια συνιστώσα του. Η συνιστώσα αυτή, όμως, έχει επιλεγεί αυθαίρετα. Αυτό σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα προσδιορίζουν μόνο κατευθύνσεις, ενώ το μέτρο τους παραμένει απροσδιόριστο. Είναι σκόπιμο, δηλαδή, να υιοθετηθεί κάποια τυπική διαδικασία ορισμού κάποια κλίμακας για τη μέτρησή του. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται κανονικοποίηση. Μία τέτοια τυπική διαδικασία, η οποία είναι συνήθης στα προγράμματα υπολογιστών, είναι η *ορθοκανονικοποίηση ως προς τη μάζα*. Στη μέθοδο αυτή, η κλίμακα μέτρησης των συνιστωσών του ιδιοδιανύσματος επιλέγεται ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i = 1 \quad (3.43)$$

όπου φ_i το i κανονικοποιημένο διάνυσμα.

Έστω β_i ο αριθμός που πρέπει να πολλαπλασιαστούν όλα τα στοιχεία του ιδιοδιανύσματος για την κανονικοποίησή τους. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\varphi_i = \mu_i \beta_i \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας την 3.43 στην 3.44, προκύπτει

$$\mu_i^2 \beta_i^T \mathbf{M} \beta_i = 1 \quad (3.45)$$

Επιλύοντας την παραπάνω σχέση ως προς μ_i , προκύπτει

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i^T \mathbf{M} \beta_i}} \quad (3.46)$$

Θέτοντας $\mu_i = \frac{\varphi_i}{\beta_i}$ στην παραπάνω σχέση, και επιλύοντας ως προς φ_i , προκύπτει

$$\varphi_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\beta_i^T \mathbf{M} \beta_i}} \quad (3.47)$$

Εάν ληφθεί $\mathbf{M}=\mathbf{I}$, τότε το βαθμωτό μέγεθος $\sqrt{\beta_i^T \mathbf{I} \beta_i} = \sqrt{\beta_i^T \beta_i}$ είναι το μέτρο του β_i , δηλαδή το ορθοκανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα είναι το μοναδιαίο [2].

Κεφάλαιο 4ο: Θεμελιώσεις με Πασσάλους.

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι συνήθεις τύποι θεμελίωσης. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται στις θεμελιώσεις με πασσάλους

4.2 Τύποι Θεμελιώσεων

Ο Πολιτικός Μηχανικός αντιμετωπίζει τακτικά προβλήματα που αφορούν το έδαφος. Το έδαφος χρησιμοποιείται ως μέσον θεμελίωσης των τεχνικών έργων, σαν υλικό κατασκευής χωμάτινων έργων (π.χ. φραγμάτων, επιχωμάτων κ.τ.λ.) κ.α.

Όλα τα έργα του Πολιτικού Μηχανικού πρέπει να θεμελιωθούν στο έδαφος. Υπάρχει ποικιλία στους τύπους θεμελίωσης των τεχνικών έργων. Η επιλογή του τύπου θεμελίωσης εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, όπως το είδος του εδάφους, οι απαιτήσεις του έργου, οι οικονομικές συνθήκες κ.ο.κ. Παρακάτω, παρουσιάζονται οι τύποι αυτοί [3].

4.2.1 Επιφανειακές Θεμελιώσεις

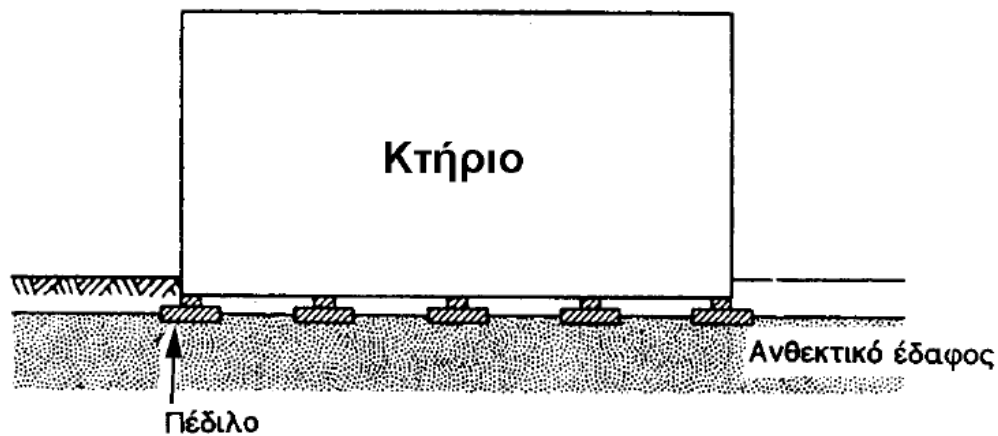
4.2.1.1 Θεμελιώσεις με μεμονωμένα πέδιλα

Τα *μεμονωμένα πέδιλα* είναι ο πιο συνήθης τρόπος θεμελίωσης έργων χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις. Η μέθοδος θεμελίωσης με μεμονωμένα πέδιλα συνηθίζεται όταν υπάρχουν ικανού πάχους και επαρκώς ανθεκτικές εδαφικές στρώσεις, σε μικρό βάθος από την επιφάνεια του εδάφους.

Με τον όρο «επαρκώς ανθεκτικές στρώσεις», δε γίνεται αναφορά μόνον στις ιδιότητες του εδάφους, αλλά και στις απαιτήσεις που έχει η κατασκευή. Τα φορτία της κατασκευής

μεταφέρονται, μέσω των φερόντων στοιχείων της, στα μεμονωμένα πέδιλα και από εκεί στο έδαφος.

Το έδαφος στην περιοχή της θεμελίωσης παραμορφώνεται εξαιτίας της μεταφοράς των φορτίων, όχι μόνο στα σημεία έδρασης του μεμονωμένου πεδίλου, αλλά και πέρα από αυτά. Οι απαιτήσεις ανθεκτικότητας των εδαφικών στρώσεων μειώνονται καθώς αυξάνει η απόσταση από τα σημεία έδρασης. Αυτό συμβαίνει γιατί, καθώς αυξάνει η απόσταση από τα σημεία έδρασης, οι αναπτυσσόμενες τάσεις μειώνονται. Η περιοχή κάτω από τα σημεία έδρασης, η οποία είναι και αυτή που μελετάται, ονομάζεται *ζώνη επιρροής*[3].



Σχ. 4.1 Επιφανειακή Θεμελίωση με Μεμονωμένα Πέδιλα [3]

4.2.1.2 Εναλλακτικές Μέθοδοι Επιφανειακής Θεμελίωσης.

Στις περιπτώσεις που δεν ικανοποιείται κάποια από τις παραπάνω προϋποθέσεις, προτιμούνται κάποιες εναλλακτικές μέθοδοι επιφανειακής θεμελίωσης. Τέτοιες μέθοδοι είναι η θεμελίωση με πεδιλοδοκούς ή η θεμελίωση με γενικοί κοιτόστρωση.

Η θεμελίωση με πεδιλοδοκούς έχει τη μορφή και τη λειτουργία καμπτόμενης δοκού, αφού τα υποστυλώματα που ανήκουν στον ίδιο άξονα εδράζονται σε ένα επιμήκες πέδιλο. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι πεδιλοδοκοί διατάσσονται σε μορφή εσχάρας, δηλαδή τα επιμήκη πέδιλα διατάσσονται και στους δύο άξονες.

Η θεμελίωση με γενική κοιτόστρωση έχει τη μορφή και τη λειτουργία καμπτόμενης πλάκας, αφού τα υποστυλώματα εδράζονται σε έναν ενιαίο φορέα [3].

4.2.2 Βαθιές Θεμελιώσεις.

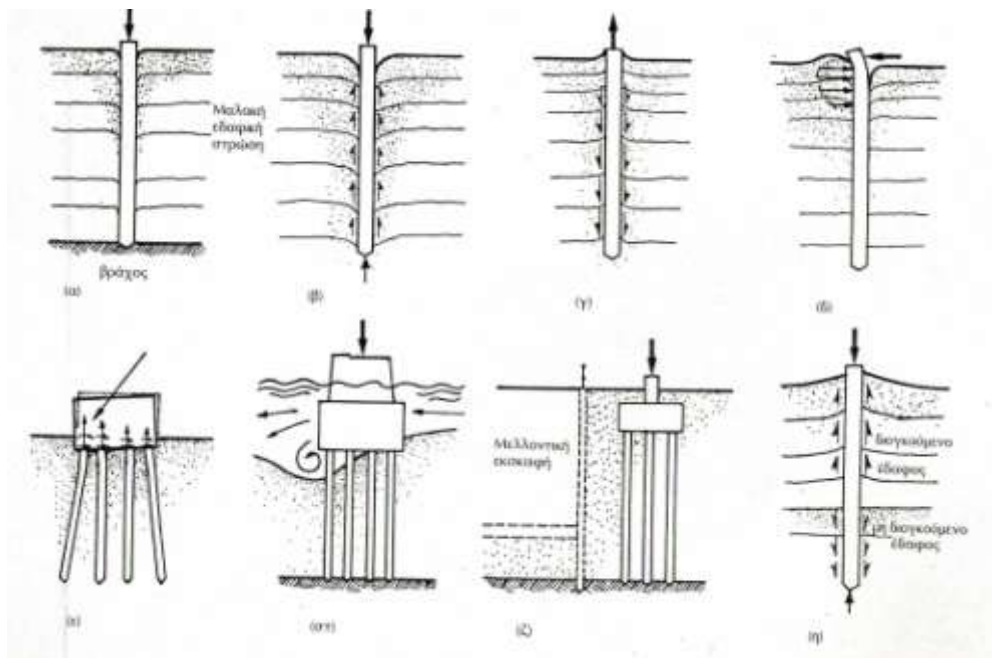
4.2.2.1 Γενικά

«Η διαφοροποίηση μεταξύ αβαθών και βαθιών θεμελιώσεων γίνεται βάσει του θεωρητικού μηχανισμού τις διατμητικής αστοχίας του εδάφους.» [4].

Ο πάσσαλος είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο βαθιάς θεμελίωσης. Έχει μικρή διάμετρο και αρκετά υψηλό λόγο L/B , όπου B η διάμετρός του και L το μήκος του. Ο πάσσαλος μεταφέρει τα φορτία της κατασκευής, τόσο με ασφάλεια έναντι θραύσης, όσο και έναντι καθιζήσεων και πλευρικών μετατοπίσεων[4].

Οι περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι πάσσαλοι ως μέθοδος θεμελίωσης είναι:

- «Όταν τα μαλακά εδάφη υπέρκεινται στριφών.
- Σε αποθέσεις μαλακών ή χαλαρών εδαφών μεγάλου πάχους.
- Για μετάβαση στο έδαφος υψηλών φορτίων, με ταυτόχρονο περιορισμό των καθιζήσεων.
- Για ανάληψη υψηλών φορτίων με τρόπο που να μην επηρεάζονται υπάρχουσες κατασκευές με επιφανειακή θεμελίωση.
- Για ανάληψη οριζόντιων φορτίων κ.λπ.» [4].



Σχ.4.2 Περιπτώσεις Θεμελιώσεων που απαιτούν τη χρήση Πασσάλων [4]

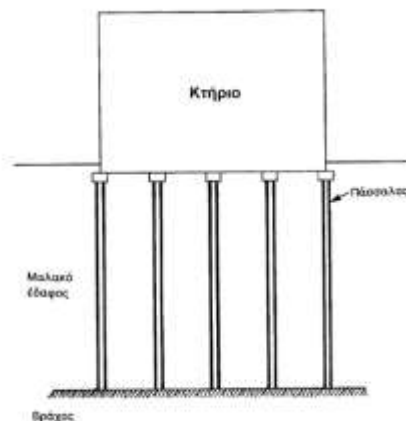
Τα πλεονεκτήματα της θεμελίωσης με πασσάλους είναι:

- Σημαντική αύξηση της φέρουσας ικανότητας, σε σχέση με τα μεμονωμένα πέδιλα.
- Δραστική μείωση των αναμενόμενων διαφορικών υποχωρήσεων, σε σχέση με τις επιφανειακές θεμελιώσεις.

Με βάση το μηχανισμό παραλαβής των φορτίων, οι πάσσαλοι διακρίνονται σε πασσάλους τριβής, πασσάλους αιχμής και συνδυασμό των δύο αυτών μηχανισμός παραλαβής φορτίων.

Οι πάσσαλοι τριβής οφείλουν σχεδόν το σύνολο της αντοχής τους στην τριβή που αναπτύσσεται στην παράπλευρη επιφάνειά τους. Λόγω του ότι ο πάσσαλος είναι επιμήκης, ακόμα και στην περίπτωση που η αντοχή του εδάφους είναι μικρή, αναπτύσσεται σημαντική δύναμη που μεταφέρεται στο έδαφος, λόγω τριβής, από την μεγάλη παράπλευρη επιφάνεια του πασσάλου [3].

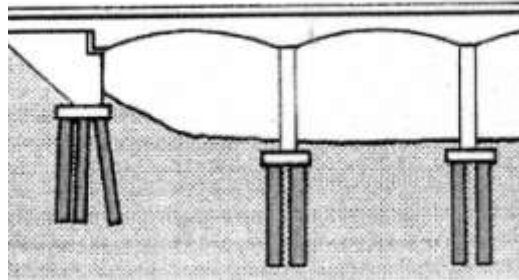
Όσον αφορά τους πασσάλους αιχμής, η φέρουσα ικανότητα που αναπτύσσουν οφείλεται στην αντοχή του εδάφους στην περιοχή της αιχμής του πασσάλου. Οι πάσσαλοι αιχμής κατασκευάζονται από υλικά με μεγαλύτερη αντοχή από τις εδαφικές στρώσεις που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια του εδάφους. Τα φορτία της κατασκευής μεταφέρονται στην αιχμή του πασσάλου, ο οποίος εδράζεται σε έδαφος επαρκώς ανθεκτικό.



Σχ.4.3 Θεμελίωση με Πασσάλους Αιχμής [3]

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η φέρουσα ικανότητα που αναπτύσσει ένας πάσσαλος οφείλεται τόσο στην αντοχή λόγω τριβής, όσο και στην αντοχή της αιχμής του.

Οι πάσσαλοι, συνήθως, διατάσσονται σε ομάδες συνεργαζόμενων πασσάλων, που ενώνονται με κεφαλόδεσμο, όπως φαίνεται στην εικόνα.



Σχ. 4.4 Ομάδες Πασσάλων [3]

4.2.2.2 Τύποι Πασσάλων

Ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους, οι πάσσαλοι διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τους πασσάλους δι' εκτοπίσεως (του εδαφικού υλικού) και τους πασσάλους άνευ εκτοπίσεως.

Οι πάσσαλοι δι' εκτοπίσεως διακρίνονται, επίσης, σε δύο βασικές κατηγορίες:

i. Προκατασκευασμένοι Εμπηγνόμενοι Πάσσαλοι:

Οι πάσσαλοι της κατηγορίας αυτής κατασκευάζονται από ξύλο, μέταλλο ή οπλισμένο σκυρόδεμα (απλό ή προεντεταμένο). Μπορούν, επίσης, να κατασκευαστούν από κλειστούς χαλύβδινους σωλήνες οι οποίοι πληρούνται με σκυρόδεμα, μετά την έμπηξη στο έδαφος.

Λόγω του ότι είναι προκατασκευασμένοι, η ποιότητά τους ελέγχεται πριν εμπηθούν στο έδαφος και η κατασκευή τους δεν επηρεάζεται από υπόγεια ύδατα.

Είναι κατάλληλοι για τις περιπτώσεις όπου υπάρχει μαλακή στρώση εδάφους η οποία έχει μεγάλο πάχος κάτω από τη βάση έδρασης. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούν να κατασκευαστούν επιμηκνόμενοι πάσσαλοι, οι οποίοι μπορούν να φτάσουν σε πολύ μεγάλα βάθη (Split- piles). Ακόμη, είναι κατάλληλοι για θαλάσσια έργα.

Οι προκατασκευασμένοι εμπηγνόμενοι πάσσαλοι υστερούν στο ότι διαταράσσουν το έδαφος κατά την έμπηξη, το μήκος τους δεν μπορεί να μεταβληθεί, κατά τη διαδικασία της έμπηξης μπορεί να καταστραφούν, η δυσκολία της έμπηξης αυξάνεται

όσο αυξάνεται και η διατομή του. Ακόμη, ο θόρυβος, οι δονήσεις, οι εδαφικές μετακινήσεις κ.α. κατά την κατασκευή τους, προκαλούν πολλές δυσκολίες.

ii. Εμπηγνόμενοι- Επί τόπου Εγχυόμενοι

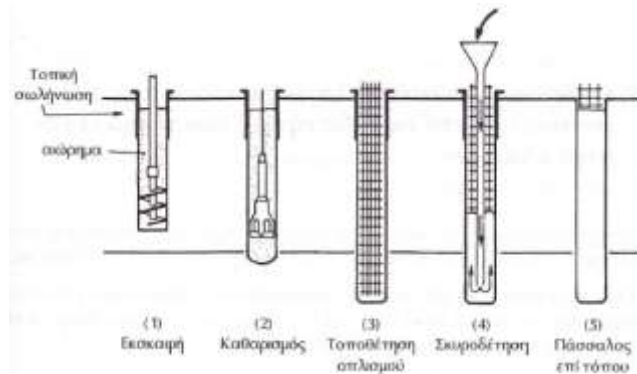
Οι πάσσαλοι αυτού του τύπου κατασκευάζονται από έναν κλειστό χαλύβδινο σωλήνα ο οποίος, μετά την έμπηξη, πληρούται με σκυρόδεμα. Στη συνέχεια, ο σωλήνας αφαιρείται, αλλά η αιχμή του παραμένει.

Αφού κατασκευάζονται επί τόπου, το μήκος τους μπορεί να καθοριστεί ακόμη και την ώρα της έμπηξης, μπορούν να αποκτήσουν διευρυμένη βάση και ο οπλισμός τους δεν εξαρτάται από τη διαδικασία έμπηξης.

Στην περίπτωση που κατά την κατασκευή βρεθεί στάθμη υπόγειων υδάτων, υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής τους με κλειστό σωλήνα.

Από την άλλη, κατά τη διαδικασία της έμπηξης ανυψώνονται τα παρακείμενα εδαφικά στρώματα και διαταράσσεται το παράπλευρο έδαφος. Επίσης, υπάρχει η πιθανότητα ανύψωσης των γειτονικών πάσσάλων καθώς και η δημιουργία ελκυστικών τάσεων σε αυτούς.

Μετά την κατασκευή τους, είναι απαραίτητος ο έλεγχος ακεραιότητάς τους.



Σχ.4.5 Μέθοδος κατασκευής πασσάλου δι εκτοπίσεως, επί τόπου εγχυόμενου [4]

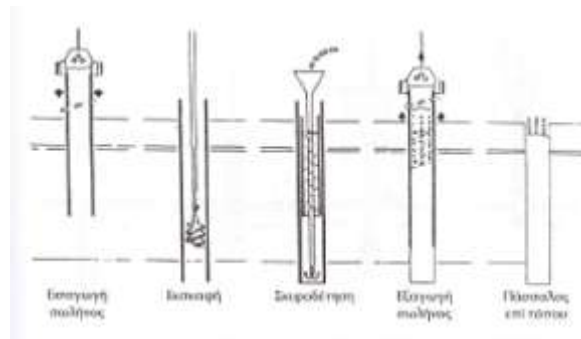
Οι πάσσαλοι άνευ εκτοπίσεως του εδαφικού υλικού κατασκευάζονται με διάφορους τρόπους, όπως με τη βοήθεια επενδύσεως, με τη βοήθεια αιωρήματος κ.ο.κ. Κατασκευάζονται είτε με τη χρήση σωλήνωσης ή μετεονίτη, είτε χωρίς.

Με τον τύπο αυτό των πασσάλων αποφεύγεται η ανύψωση του περιβάλλοντος εδάφους. Υπερτερούν στο ότι το μήκος τους μπορεί να οριστικοποιηθεί κατά την ώρα της κατασκευής, σε

αντίθεση με τους προκατασκευασμένους πασσάλους, και μπορούν να επιτευχθούν μεγάλα μήκη και πλάτη (φρεατοπάσσαλοι). Επιπλέον, μπορεί να λαμβάνεται συνεχής εικόνα των εδαφικών στρώσεων κατά τη διάρκεια της κατασκευής τους. Η κατασκευή τους γίνεται χωρίς δονήσεις και δυνατό θόρυβο και επιδρούν ελάχιστα στις ήδη υπάρχουσες κατασκευές.

Σε περίπτωση που το έδαφος δεν είναι συνεκτικό, μπορεί να χαλαρώσει κατά τη διαδικασία της διάτρησης. Στα μαλακά εδάφη, μπορεί να δημιουργηθεί «λαιμός». Στην περίπτωση που υπάρχει υδροφόρος ορίζοντας, υπάρχει η πιθανότητα εισροής νερού στο σωλήνα, το οποίο θα επηρεάσει το σκυρόδεμα.

Μετά την κατασκευή τους, είναι απαραίτητο να γίνει έλεγχος για την ακεραιότητά τους [4].



Σχ. 4.6 Πάσσαλος δι' εκσκαφής κατασκευασμένος με τη βοήθεια επενδύσεων [4]

4.3 Μοντέλο Winkler

Για τον υπολογισμό της ακαμψίας του πασσάλου χρησιμοποιείται πολύ συχνά το μοντέλο *Winkler*. Αυτό συμβαίνει διότι η μέθοδος αυτή είναι πολύ εύχρηστη. Στο μοντέλο *Winkler*, η αλληλεπίδραση μεταξύ πασσάλου και εδάφους προσομοιώνεται με μια σειρά ελατηρίων που τοποθετούνται κατά μήκος του πασσάλου.

Το μοντέλο *Winkler*, παρότι είναι προσεγγιστικό, είναι ευρέως αποδεκτό διότι οι προβλέψεις του είναι ικανοποιητικές, σε σχέση με τις πιο αυστηρές λύσεις. Ακόμη, είναι εύκολη η επέκταση και στην ανελαστική περιοχή, με τη χρήση μη-γραμμικών ελατηρίων. Επιπλέον, με τη χρήση του μοντέλου αυτού, το υπολογιστικό κόστος είναι μικρό, σε σχέση με τις λύσεις των πεπερασμένων και συνοριακών στοιχείων.

Ο υπολογισμός της στατικής ακαμψίας ενός πασσάλου, σύμφωνα με το μοντέλο Winkler γίνεται από τους τύπους

$$K_{hh} = 4E_p I_p \lambda^3 \quad (4.1)$$

$$K_{hr} = 2E_p I_p \lambda^2 \quad (4.2)$$

$$K_{rr} = 2E_p I_p \lambda \quad (4.3)$$

όπου:

- E_p το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του πασσάλου
- I_p η ροπή αδράνειας της διατομής του πασσάλου
- λ η παράμετρος Winkler

Η παράμετρος Winkler υπολογίζεται από τον τύπο

$$\lambda = \left(\frac{k}{4E_p I_p} \right)^{1/4} \quad (4.4)$$

όπου k η σταθερά ελατηρίων Winkler.

Η σταθερά Winkler υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = \delta E_s \quad (4.5)$$

όπου E_s η εδαφική στιφρότητα.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή δ έχουν προταθεί διάφορες σχέσεις. Ο Syngros (2004), πρότεινε τη σχέση

$$\delta \approx 2 \left(\frac{E_p}{E_{sd}} \right)^{-0.075} \quad (4.6)$$

Οι Dordy et al(1982), πρότειναν τη σχέση

$$\delta \approx 1.67 \left(\frac{E_p}{E_{sd}} \right)^{-0.053} \quad (4.7)$$

Τέλος, ο Roesset(1980) και οι Gazetas et al (1992), πρότειναν την απλοποίηση

$$\delta = 1.2 \quad (4.8)$$

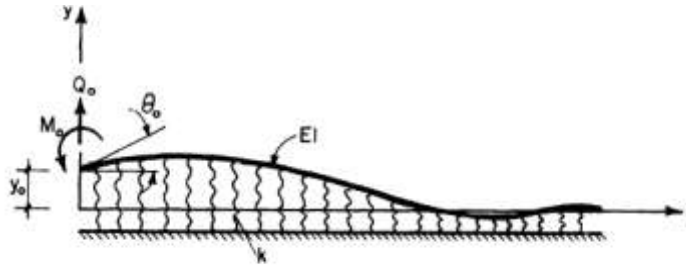
η οποία υιοθετήθηκε και στην παρούσα πτυχιακή εργασία [5].

4.4 Μητρώο Ακαμψίας Δοκού επί Ελαστικού Εδάφους

Σύμφωνα με τους Eisenberger&Yankelevsky [6]η διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = 0 \quad (4.9)$$

αντιστοιχεί σε μια δοκό η οποία εδράζεται σε ελαστικό έδαφος.



Σχ. 4.7 Δοκός επί Ελαστικού Εδάφους[6]

Η γενική λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφεί με όρους 4 εξισώσεις

$$y(x) = y_0 F_1(\lambda x) + \frac{1}{4} \theta_0 F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI} M_0 F_3(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^3 EI} Q_0 F_4(\lambda x) \quad (4.10)$$

όπου

$$F_1(\lambda x) = \cosh \lambda x \cos \lambda x \quad (4.11.a)$$

$$F_2(\lambda x) = \frac{1}{2} (\cosh \lambda x \sin \lambda x + \sinh \lambda x \cos \lambda x) \quad (4.11.b)$$

$$F_3(\lambda x) = \frac{1}{2} \sinh \lambda x \sin \lambda x \quad (4.11.c)$$

$$F_4(\lambda x) = \frac{1}{4} (\cosh \lambda x \sin \lambda x - \sinh \lambda x \cos \lambda x) \quad (4.11.d)$$

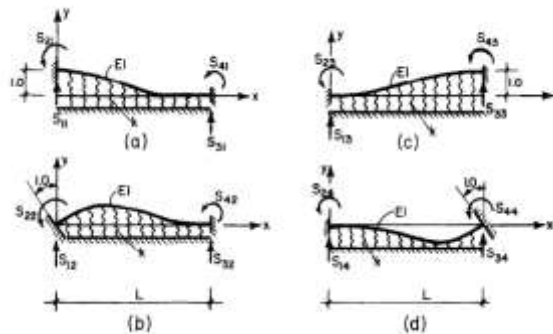
Το λ , όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι η παράμετρος Winkler και δίνεται από τον τύπο 4.4.

Τα y_0, θ_0, M_0 και Q_0 είναι οι τιμές που λαμβάνονται για $x=0$.

Η κλίση κατά μήκος της δοκού, δίνεται από τον τύπο

$$y'(x) = 4\lambda y_0 F_4(\lambda x) - \theta_0 F_1(\lambda x) - \frac{1}{\lambda EI} M_0 F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI} Q_0 F_3(\lambda x) \quad (4.12)$$

Οι όροι του μητρώου ακαμψίας, παρουσιάζονται σαν δεσμεύσεις στην αρχή και στο τέλος της δοκού, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Σχ. 4.8 Ακαμψία μελών [6]

Και οι 16 όροι των σχέσεων 4.10 και 4.12, μπορούν να υπολογιστούν. Για παράδειγμα, οι όροι $S_{11} - S_{14}$, όπως φαίνονται στην Εικόνα 4.9.a είναι υπολογίσιμοι. Οι όροι y_0 και θ_0 είναι 1 και 0, αντίστοιχα. Άρα, για $x=L$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως

$$y(L) - F_1(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^2 EI} F_3(\lambda L) S_{12} + \frac{1}{\lambda^3 EI} F_4(\lambda L) S_{11} = 0 \quad (4.13.a)$$

$$y'(L) - 4\lambda F_4(\lambda L) - \frac{1}{\lambda EI} F_2(\lambda L) S_{21} + \frac{1}{\lambda^2 EI} F_3(\lambda L) S_{11} = 0 \quad (4.13.b)$$

Προκύπτει σύστημα δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους, το οποίο μπορεί να επιλυθεί. Άρα, οι 2 άγνωστοι όροι, υπολογίζονται από τους τύπους

$$S_{11} = \frac{k}{\lambda} \frac{\cos \lambda L \sinh \lambda L + \cos \lambda L \sin \lambda L}{C} \quad (4.14.a)$$

$$S_{21} = \frac{k}{2\lambda^2} \frac{\sinh^2 \lambda L + \sin^2 \lambda L}{C} \quad (4.14.b)$$

όπου

$$C = \sinh^2 \lambda L + \sin^2 \lambda L \quad (4.14.c)$$

Οι δράσεις στο $x=L$ μπορούν να βρεθούν από τις γενικές εξισώσεις για τα $M(x)$ και $Q(x)$.

Οι υπόλοιποι όροι, δίνονται από τους τύπους

$$S_{31} = -\frac{k}{\lambda} \frac{\sin \lambda L \cos \lambda L + \cosh \lambda L \sin \lambda L}{C} \quad (4.14.d)$$

$$S_{41} = \frac{k}{\lambda^2} \frac{\sinh \lambda L \sin \lambda L}{C} \quad (4.14.e)$$

$$S_{12} = S_{21} \quad (4.14.f)$$

$$S_{22} = -\frac{k}{2\lambda^3} \frac{\sinh \lambda L \cosh \lambda L - \sin \lambda L \cos \lambda L}{C} \quad (4.14.g)$$

$$S_{32} = S_{41} \quad (4.14.h)$$

$$S_{42} = \frac{k}{2\lambda^3} \frac{\cosh \lambda L \sin \lambda L - \sinh \lambda L \cos \lambda L}{C} \quad (4.14.i)$$

$$S_{13} = S_{31} \quad (4.14.j)$$

$$S_{23} = S_{32} \quad (4.14.k)$$

$$S_{33} = S_{11} \quad (4.14.l)$$

$$S_{43} = -S_{21} \quad (4.14.m)$$

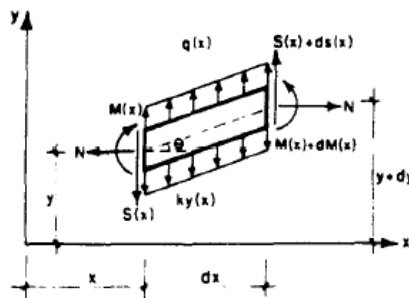
$$S_{14} = S_{41} \quad (4.14.n)$$

$$S_{24} = S_{42} \quad (4.14.o)$$

$$S_{34} = S_{43} \quad (4.14.p)$$

$$S_{44} = S_{22} \quad (4.14.q)$$

Σύμφωνα με τους ίδιους[7], η ισορροπία των δυνάμεων κατά τον y άξονα, σε ένα απειροστό στοιχείο μια δοκού που εδράζεται σε ελαστικό έδαφος, φαίνεται στο σχήμα



Σχ. 4.9 Απειροστό Στοιχείο Δοκού επί Ελαστικού Εδάφους [7]

και οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{dS(x)}{dx} = ky(x) - q(x) \quad (4.15)$$

όπου k η σταθερά Winkler, όπως παραπάνω.

Για την περίπτωση όπου η δύναμη N που ασκείται στο στοιχείο ικανοποιεί τη σχέση:

$$N < 2\sqrt{kEI} \quad (4.16)$$

τότε

$$y(x) = C_1 \cos \beta x \cosh \alpha x + C_2 \cos \beta x \sinh \alpha x + C_3 \sin \beta x \cosh \alpha x + C_4 \sin \beta x \sinh \alpha x \quad (4.17)$$

Τα C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι σταθερές οι οποίες καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Τα α και β υπολογίζονται συναρτήσει των λ και δ

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta} \quad (4.18)$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta} \quad (4.19)$$

Το μητρώο ακαμψίας, μορφώνεται ως

$$K_{spring} = \begin{bmatrix} s_{00} & 0 & 0 & -s_{00} & 0 & 0 \\ 0 & s_{11n} & s_{12n} & 0 & s_{13n} & s_{14n} \\ 0 & s_{21n} & s_{22n} & 0 & s_{23n} & s_{24n} \\ -s_{00} & 0 & 0 & s_{00} & 0 & 0 \\ 0 & s_{31n} & s_{32n} & 0 & s_{33n} & s_{34n} \\ 0 & s_{41n} & s_{42n} & 0 & s_{43n} & s_{44n} \end{bmatrix} \quad (4.20.a)$$

όπου

$$s_{00} = \frac{EA_i}{L} \quad (4.20.b)$$

$$s_{11n} = \frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D} [\beta \sinh \alpha L \cosh \alpha L + \alpha \sin \beta L \cos \beta L] \quad (4.20.c)$$

$$s_{12n} = -\frac{2\lambda^2 EI}{D} [\alpha^2 \sin^2 \beta L + \beta^2 \sinh^2 \alpha L] \quad (4.20.d)$$

$$s_{31n} = -\frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D} [\alpha \sin \beta L \cosh \alpha L + \beta \cos \beta L \sinh \alpha L] \quad (4.20.e)$$

$$s_{41n} = \frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D} \sin \beta L \sinh \alpha L \quad (4.20.f)$$

$$s_{21n} = s_{12n} \quad (4.20.g)$$

$$s_{22n} = \frac{2\alpha\beta EI}{D} [\beta \sinh \alpha L \cosh \alpha L - \alpha \sin \beta L \cos \beta L] \quad (4.20.h)$$

$$s_{32n} = -s_{41n} \quad (4.20.i)$$

$$s_{42n} = -\frac{2\alpha\beta EI}{D} [\beta \sinh \alpha L \cos \beta L - \alpha \sin \beta L \cosh \alpha L] \quad (4.20.j)$$

$$s_{13n} = s_{31n} \quad (4.20.k)$$

$$s_{23n} = s_{32n} \quad (4.20.l)$$

$$s_{33n} = s_{11n} \quad (4.20.m)$$

$$s_{43n} = -s_{21n} \quad (4.20.n)$$

$$s_{14n} = s_{41n} \quad (4.20.o)$$

$$s_{24n} = s_{42n} \quad (4.20.p)$$

$$s_{34n} = s_{43n} \quad (4.20.q)$$

$$s_{44n} = s_{22n} \quad (4.20.r)$$

όπου

$$D = \beta^2 \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \sin^2 \beta L \quad (4.20.s)$$

Κεφάλαιο 5^ο: Αριθμητικά Παραδείγματα

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, διερευνάται η συμπεριφορά κατασκευών με κατανεμημένη μάζα και κατανεμημένη ακαμψία. Αρχικά, μελετάται μία βιομηχανική καπνοδόχος κατασκευασμένη από σκυρόδεμα. Γίνεται υπολογισμός της ιδιοσυχνότητάς της με αναλυτικές μεθόδους. Κατόπιν, γίνεται προσέγγιση των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της κατασκευής με αριθμητικές μεθόδους (Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων). Για τη δυναμική ανάλυση της κατασκευής, συντάχθηκε υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Στη συνέχεια, μελετάται δυναμικά πάσσαλος αιχμής για τον οποίο συντάχθηκε, επίσης, υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές της διομηχανικής καπνοδόχου και του πασσάλου αιχμής.

5.2 Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων με χρήση Αναλυτικών Μεθόδων

Η βιομηχανική καπνοδόχος του σχήματος (Σχ. 1), έχει ύψος $L=75\text{m}$ και αποτελείται από φέρον κολουροκωνικό κέλυφος από οπλισμένο σκυρόδεμα του οποίου οι διαστάσεις φαίνονται στο σχήμα. Η καπνοδόχος θεωρείται πακτωμένη στο έδαφος.

Επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 9.81\text{m/s}^2$

Ειδικό Βάρος Σκυροδέματος: $\gamma_b = 24\text{kN/m}^3$

Μέτρο Ελαστικότητας Σκυροδέματος: $E = 2.1 \cdot 10^7 \text{kN/m}^2$

Πυκνότητα Σκυροδέματος: $\rho = \frac{\gamma_b}{g} = 2.446 \text{kg/m}^3$

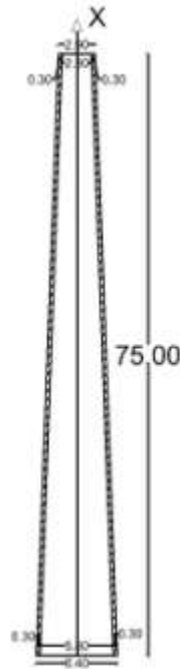
Ύψος καπνοδόχου: $L = 75\text{m}$

Πάχος κελύφους:

$$t = 0.30m$$

Μέση ακτίνα κελύφους καπνοδόχου:

$$r(x) = 3.05 - 0.0234x$$



Σχ. 5.1 Πακτωμένη στο έδαφος καπνοδόχος

Η ροπή αδράνειας της καπνοδόχου δίνεται από τη σχέση

$$I(x) \approx \pi r(x)^3 t(x)$$

Η μάζα δίνεται από τη σχέση

$$m(x) = \frac{[2\pi r(x)t(x)\gamma_b]}{g}$$

- Επιλέγεται η συνάρτηση σχήματος για την ελαστική γραμμή προβόλου υπό ομοιόμορφη φόρτιση, η οποία είναι

$$\psi(x) = \frac{1}{3} (6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4)$$

όπου

$$\xi = \frac{x}{L}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται με τη MAPLE 13. Η μεθοδολογία επίλυσης είναι αυτή του γενικευμένου μονοβάθμιου συστήματος η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο βιβλίο «ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ» του Ι.Θ. Κατσικαδέλη.

$$k^* = \int_0^L EI(x) \psi''(x)^2 dx = 3187.909$$

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx = 141.037$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζεται η ιδιοσυχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = 4.7543 \text{ rad / s}$$

- Εναλλακτικά, επιλέγεται ως συνάρτηση σχήματος η πρώτη ιδιομορφή ταλάντωσης προβόλου σταθερής διατομής, η οποία είναι

$$\psi(x) = \frac{1}{3} [\cosh \lambda x - \cos \lambda x - 0.7341(\sinh \lambda x - \sin \lambda x)]$$

όπου $\lambda = \frac{1.8751}{L}$.

Ακολουθώντας τον προηγούμενο τρόπο επίλυσης, λαμβάνουμε την τιμή

$$\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$$

Η μικρότερη από τις δύο τιμές είναι και η ακριβέστερη. Επομένως, δεκτή σαν ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι η λύση.

5.3 Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων και Ιδιομορφών με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

5.3.1 Παράδειγμα Επίλυσης

Για την ίδια βιομηχανική καπνοδόχο, γίνεται υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Παρακάτω, παρουσιάζεται ενδεικτικά η διαδικασία επίλυσης για 5 Πεπερασμένα Στοιχεία (n=5).

$$\text{Επιτάχυνση της βαρύτητας:} \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Ειδικό Βάρος Σκυροδέματος:} \quad \gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{Μέτρο Ελαστικότητας Σκυροδέματος:} \quad E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Πυκνότητα Σκυροδέματος:} \quad \rho = \frac{\gamma_b}{g} = 2.446 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Ύψος καπνοδόχου:} \quad L = 75 \text{ m}$$

$$\text{Πάχος κελύφους:} \quad t = 0.30 \text{ m}$$

Έστω αρχή της καπνοδόχου η πάκτωσή της.

Η Εξωτερική Διατομή της αρχής της καπνοδόχου είναι, σύμφωνα με το σχήμα

$$D_a^1 = 6.40 \text{ m}$$

και του πέρατός της

$$D_m^1 = 2.90 \text{ m}$$

Οι εσωτερικές διαμέτροι στην αρχή και στο πέρας την καπνοδόχου είναι

$$D_a^2 = 6.40 - 2t = 5.80 \text{ m}$$

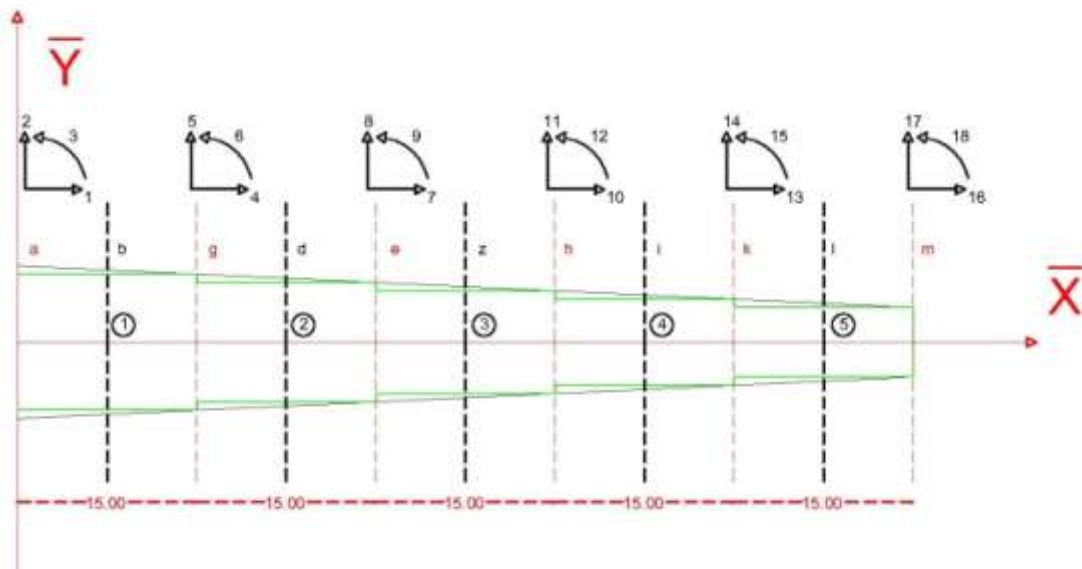
$$D_m^2 = 2.90 - 2t = 2.30 \text{ m}$$

Κάνοντας γραμμική παρεμβολή, υπολογίζεται η διάμετρος στο μέσον του κελύφους

$$D_z^1 = \frac{D_a^1 - D_m^1}{2} + D_m^1 = 4.65m$$

$$D_z^2 = D_z^1 - 2t = 4.05m$$

Στο παρακάτω σχήμα Σχ.5.2, φαίνονται οι κόμβοι που συνδέουν τα στοιχεία μεταξύ τους καθώς και οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης του κάθε στοιχείου.



Σχ.5.2 Βαθμοί Ελευθερίας για τα 5 Πεπερασμένα Στοιχεία

- Για το Πεπερασμένο Στοιχείο 1:

Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής: 1,2,3

Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 4,5,6

Το μήκος του κάθε στοιχείου υπολογίζεται κάθε φορά διαιρώντας το αρχικό μήκος της καπνοδόχου με το πλήθος των Πεπερασμένων Στοιχείων.

$$L_1 = \frac{L}{n} 15m$$

Η διάμετρος στην αρχή του στοιχείου ταυτίζεται με τη διάμετρο στην αρχή της καπνοδόχου.

$$D_a^1 = 6.40m$$

$$D_a^2 = 6.40 - 2t = 5.80m$$

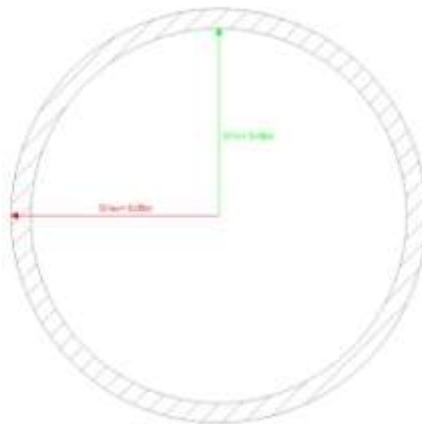
Η διάμετρος στο πέρας του στοιχείου 1 υπολογίζεται κάνοντας και πάλι γραμμική παρεμβολή μεταξύ της αρχής της καπνοδόχου και του μέσου της

$$D_g^1 = D_a^1 - \frac{(D_a^1 - D_m^1) \cdot L_1}{L} = 5.70m$$

Γίνεται η παραδοχή ότι το Πεπερασμένο Στοιχείο 1 έχει σταθερή διατομή, η οποία είναι ίση με τη διατομή που έχει στο μέσον του. Επομένως, η εσωτερική και εξωτερική διάμετρος του Πεπερασμένου Στοιχείου 1 είναι

$$D_1^{ex} = \frac{(D_a^1 - D_g^1)}{2} + D_g^1 = 6.05m$$

$$D_1^{in} = D_1^{ex} - 2t = 5.45m$$



Σχ.5.3 Εξωτερική και Εσωτερική Διάμετρος Στοιχείου

Το εμβαδόν της κοίλης κυκλικής διατομής του Στοιχείου 1 δίνεται ως

$$A_1 = \frac{\pi(D_1^{ex})^2}{4} - \frac{\pi(D_1^{in})^2}{4} = 5.42m^2$$

Ο όγκος του Στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$V_1 = A_1 \cdot L_1 = 81.29m^3$$

Και, τέλος, η ροπή αδράνειας του Στοιχείου, δίνεται από τον τύπο

$$I_1 = \frac{\pi}{4} \left[\left(\left(\frac{D_1^{ex}}{2} \right) + t \right)^4 - \left(\frac{D_1^{in}}{2} \right)^4 \right] = 22.4577m^4$$

▪ Για το Πεπερασμένο Στοιχείο 2:

Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής: 4,5,6

Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 7,8,9

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, λαμβάνουμε

$$L_2 = \frac{L}{n} 15m$$

$$D_2^{ex} = \frac{(D_g^1 - D_e^1)}{2} + D_e^1 = 5.23m$$

$$D_2^{in} = D_2^{ex} - 2t = 4.75m$$

$$A_2 = \frac{\pi(D_2^{ex})^2}{4} - \frac{\pi(D_2^{in})^2}{4} = 4.76m^2$$

$$V_2 = A_2 \cdot L_2 = 71.39m^3$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \left[\left(\left(\frac{D_2^{ex}}{2} \right) + t \right)^4 - \left(\frac{D_2^{in}}{2} \right)^4 \right] = 15.2260m^4$$

▪ Για το Πεπερασμένο Στοιχείο 3:

Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής: 7,8,9

Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 10,11,12

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, λαμβάνουμε

$$L_3 = \frac{L}{n} 15m$$

$$D_3^{ex} = D_z^1 = 4.65m$$

$$D_3^{in} = D_3^{ex} - 2t = 4.05m$$

$$A_3 = \frac{\pi(D_3^{ex})^2}{4} - \frac{\pi(D_3^{in})^2}{4} = 4.10m^2$$

$$V_3 = A_3 \cdot L_3 = 61.50m^3$$

$$I_3 = \frac{\pi}{4} \left[\left(\left(\frac{D_3^{ex}}{2} \right) + t \right)^4 - \left(\frac{D_3^{in}}{2} \right)^4 \right] = 9.7434m^4$$

▪ Για το Πεπερασμένο Στοιχείο 4:

Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής: 10,11,12

Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 13,14,15

Ακολουθώντας την ίδια, λαμβάνουμε:

$$L_4 = \frac{L}{n} 15m$$

$$D_4^{ex} = D_h^1 - \frac{(D_a^1 - D_m^1) \cdot L_4}{L} = 3.95m$$

$$D_4^{in} = D_4^{ex} - 2t = 3.35m$$

$$A_4 = \frac{\pi(D_4^{ex})^2}{4} - \frac{\pi(D_4^{in})^2}{4} = 3.44m^2$$

$$V_4 = A_4 \cdot L_4 = 51.60m^3$$

$$I_4 = \frac{\pi}{4} \left[\left(\left(\frac{D_4^{ex}}{2} \right) + t \right)^4 - \left(\frac{D_4^{in}}{2} \right)^4 \right] = 5.7674m^4$$

▪ Για το Πεπερασμένο Στοιχείο 5:

Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής: 13,14,15

Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 16,17,18

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, λαμβάνουμε

$$L_5 = \frac{L}{n} 15m$$

$$D_5^{ex} = \frac{(D_k^1 - D_m^1)}{2} + D_m^1 = 3.25m$$

$$D_5^{in} = D_5^{ex} - 2t = 2.65m$$

$$A_5 = \frac{\pi(D_5^{ex})^2}{4} - \frac{\pi(D_5^{in})^2}{4} = 2.78m^2$$

$$V_5 = A_5 \cdot L_5 = 41.70m^3$$

$$I_5 = \frac{\pi}{4} \left[\left(\left(\frac{D_5^{ex}}{2} \right) + t \right)^4 - \left(\frac{D_5^{in}}{2} \right)^4 \right] = 3.0557m^4$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι τοπικοί άξονες των στοιχείων της καπνοδόχου ταυτίζονται με τον καθολικό άξονα. Δηλαδή, η γωνία φ όλων των στοιχείων είναι ίση με 0. Αν στη σχέση που δίνει το μητρώο περιστροφής 3.17 αντικατασταθούν το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας φ=0, τότε το μητρώο που θα προκύψει θα είναι το μοναδιαίο μητρώο. Όπως είναι γνωστό, το μοναδιαίο μητρώο, στον πολλαπλασιασμό μητρώων, είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Επομένως, εκτελώντας τις πράξεις των σχέσεων 3.18 και 3.19, τα μητρώα ακαμψίας και μάζας κάθε στοιχείου στον τοπικό άξονα είναι ίσα με τα μητρώα ακαμψίας και μάζας στον καθολικό άξονα. Για τον υπολογισμό των μητρώων ακαμψίας στον καθολικό άξονα, χρησιμοποιείται η σχέση 3.7. Για τον υπολογισμό του μητρώου μάζας του κάθε στοιχείου γίνεται η παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας και για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούνται οι σχέσεις 3.10 και 3.11.

- Μητρώο Ακαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου 1:

$$\bar{k}^1 = \begin{bmatrix} 7.59 \cdot 10^6 & & & & & & \\ & 0 & 1.68 \cdot 10^6 & & & & \\ & 0 & 1.26 \cdot 10^7 & 1.26 \cdot 10^8 & & & \\ -7.59 \cdot 10^6 & & 0 & 0 & 7.59 \cdot 10^6 & & \\ & 0 & -1.68 \cdot 10^6 & -1.26 \cdot 10^7 & 0 & 1.68 \cdot 10^6 & \\ & 0 & 1.26 \cdot 10^7 & 6.29 \cdot 10^7 & 0 & -1.26 \cdot 10^7 & 1.26 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ακαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου 2:

$$\bar{k}^2 = \begin{bmatrix} 6.66 \cdot 10^6 & & & & & & \\ & 0 & 1.14 \cdot 10^6 & & & & \\ & 0 & 8.53 \cdot 10^6 & 8.53 \cdot 10^7 & & & \\ -6.66 \cdot 10^6 & & 0 & 0 & 6.66 \cdot 10^6 & & \\ & 0 & -1.14 \cdot 10^6 & -8.53 \cdot 10^6 & 0 & 1.14 \cdot 10^6 & \\ & 0 & 8.53 \cdot 10^6 & 4.26 \cdot 10^7 & 0 & -8.53 \cdot 10^6 & 8.53 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ακαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου 3:

$$\bar{k}^3 = \begin{bmatrix} 5.73 \cdot 10^6 & & & & & & \\ & 0 & 7.27 \cdot 10^5 & & & & \\ & 0 & 5.46 \cdot 10^6 & 5.46 \cdot 10^7 & & & \\ -5.73 \cdot 10^6 & & 0 & 0 & 5.73 \cdot 10^6 & & \\ & 0 & -7.27 \cdot 10^5 & -5.46 \cdot 10^6 & 0 & 7.27 \cdot 10^5 & \\ & 0 & 5.46 \cdot 10^6 & 2.73 \cdot 10^7 & 0 & -5.46 \cdot 10^6 & 5.46 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ακαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου 4:

$$\bar{k}^4 = \begin{bmatrix} 4.82 \cdot 10^6 & & & & & & \\ & 0 & 4.31 \cdot 10^5 & & & & \\ & 0 & 3.23 \cdot 10^6 & 3.23 \cdot 10^7 & & & \\ -4.82 \cdot 10^6 & & 0 & 0 & 4.82 \cdot 10^6 & & \\ & 0 & -4.31 \cdot 10^5 & -3.23 \cdot 10^6 & 0 & 4.31 \cdot 10^5 & \\ & 0 & 3.23 \cdot 10^6 & 1.61 \cdot 10^7 & 0 & -3.23 \cdot 10^6 & 3.23 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ακαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου 5:

$$\bar{k}^5 = \begin{bmatrix} 3.89 \cdot 10^6 & & & & & & \\ & 0 & 2.28 \cdot 10^5 & & & & \\ & 0 & 1.71 \cdot 10^6 & 1.71 \cdot 10^7 & & & \\ -3.89 \cdot 10^6 & & 0 & 0 & 3.89 \cdot 10^6 & & \\ & 0 & -2.28 \cdot 10^5 & -1.71 \cdot 10^6 & 0 & 2.28 \cdot 10^5 & \\ & 0 & 1.71 \cdot 10^6 & 8.56 \cdot 10^6 & 0 & -1.71 \cdot 10^6 & 1.71 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου 1:

$$\bar{m}^1 = \begin{bmatrix} 66.29 & & & & & & \\ & 0 & 73.87 & & & & \\ & 0 & 156.26 & 426.15 & & & \\ 33.14 & & 0 & 0 & 66.29 & & \\ & 0 & 25.57 & 92.33 & 0 & 73.87 & \\ & 0 & -92.33 & -319.61 & 0 & -156.26 & 426.15 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου 2:

$$\bar{m}^2 = \begin{bmatrix} 58.22 & & & & & & \\ & 0 & 64.87 & & & & \\ & 0 & 137.23 & 374.27 & & & \\ 29.11 & & 0 & 0 & 28.22 & & \\ & 0 & 22.46 & 81.09 & 0 & 64.87 & \\ & 0 & -81.09 & -280.70 & 0 & -137.23 & 374.27 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου 3:

$$\bar{m}^3 = \begin{bmatrix} 50.15 & & & & & & \\ & 0 & 55.88 & & & & \\ & 0 & 118.21 & 322.39 & & & \\ 25.07 & & 0 & 0 & 50.15 & & \\ & 0 & 19.34 & 69.85 & 0 & 55.88 & \\ & 0 & -69.85 & -241.79 & 0 & -118.21 & 322.39 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου 4:

$$\bar{m}^4 = \begin{bmatrix} 42.08 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 46.89 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 99.19 & 270.51 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 21.04 & 0 & 0 & 42.08 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 16.23 & 58.61 & 0 & 46.89 & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & -58.61 & -202.88 & 0 & -99.19 & 270.51 & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου 5:

$$\bar{m}^5 = \begin{bmatrix} 34.01 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 37.90 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 80.17 & 218.63 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 17.00 & 0 & 0 & 34.01 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 13.12 & 47.37 & 0 & 37.90 & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & -47.37 & -163.98 & 0 & -80.17 & 218.63 & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, συντάσσονται τα μητρώα ένταξης για το κάθε στοιχείο, τα οποία έχουν 6 γραμμές και 18 στήλες:

- Μητρώο Ένταξης Πεπερασμένου Στοιχείου 1:

$$a^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ένταξης Πεπερασμένου Στοιχείου 2:

$$a^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ένταξης Πεπερασμένου Στοιχείου 3:

$$a^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ένταξης Πεπερασμένου Στοιχείου 4:

$$a^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Μητρώο Ένταξης Πεπερασμένου Στοιχείου 5:

$$a^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αφού έχουν συνταχθεί τα μητρώα ένταξης, ακολουθώντας τις σχέσεις 3.21 και 3.22, προκύπτουν τα Διευρυμένα Μητρώα Ακαμψίας και Μάζας, τα οποία είναι 18·18, από τις παρακάτω σχέσεις

- Διευρυμένα Μητρώα Ακαμψίας:

$$\hat{K}^1 = (a^1)^T \bar{k}^1 a^1$$

$$\hat{K}^2 = (a^2)^T \bar{k}^2 a^2$$

$$\hat{K}^3 = (a^3)^T \bar{k}^3 a^3$$

$$\hat{K}^4 = (a^4)^T \bar{k}^4 a^4$$

$$\hat{K}^5 = (a^5)^T \bar{k}^5 a^5$$

➤ Διευρυμένα Μητρώα Μάζας:

$$\hat{M}^1 = (a^1)^T \bar{k}^1 a^1$$

$$\hat{M}^2 = (a^2)^T \bar{k}^2 a^2$$

$$\hat{M}^3 = (a^3)^T \bar{k}^3 a^3$$

$$\hat{M}^4 = (a^4)^T \bar{k}^4 a^4$$

$$\hat{M}^5 = (a^5)^T \bar{k}^5 a^5$$

Τα μητρώα αυτά δεν παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό λόγω του μεγάλου μεγέθους τους.

➤ Ολικά Μητρώα Ακαμψίας και Μάζας.

Τα Ολικά Μητρώα Ακαμψίας και Μάζας προκύπτουν από το άθροισμα των Διευρυμένων Μητρώων Ακαμψίας και των Διευρυμένων Μητρώων Μάζας, αντίστοιχα.

$$\bar{K} = \sum_{n=1}^5 \hat{K}^n$$

$$\bar{M} = \sum_{n=1}^5 \hat{M}^n$$

Τα Ολικά Μητρώα είναι, επίσης, διαστάσεων 18·18.

➤ Αναδιατεταγμένα Μητρώα Ακαμψίας και Μάζας.

Η αναδιάταξη γίνεται ώστε οι γνωστές μετακινήσεις των δεσμευμένων βαθμών ελευθερίας(οι οποίες είναι μηδενικές) να καταλαμβάνουν τις τελευταίες θέσεις του διανύσματος των μετακινήσεων. Οι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας είναι οι 1,2,3.

Για την αναδιάταξη των Ολικών Μητρώων Ακαμψίας και Μάζας, όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 3, συντάσσεται το Μητρώο αναδιάταξης V.

Από τον πολλαπλασιασμό του μητρώου αυτού με τα Ολικά Μητρώα Ακαμψίας και Μάζας, όπως στις σχέσεις 3.26 και 3.27, προκύπτουν το Αναδιατεταγμένο Μητρώο Ακαμψίας και Αναδιατεταγμένο Μητρώο Μάζας, αντίστοιχα

$$\tilde{K} = V^T \bar{K} V$$

$$\tilde{M} = V^T \bar{M} V$$

Τα Μητρώα που προέκυψαν, χωρίζονται σε υπομητρώα, με βάση τους ελεύθερους και τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας. Τα υπομητρώα αυτά είναι τα:

$K_{ff}, K_{fs}, K_{sf}, K_{ss}$ για το Αναδιατεταγμένο Μητρώο Ακαμψίας

$M_{ff}, M_{fs}, M_{sf}, M_{ss}$ για το Αναδιατεταγμένο Μητρώο Μάζας.

Στα μητρώα K_{ss} και M_{ss} περιέχονται οι ακαμψίες και οι μάζες των δεσμευμένων, στην πάκτωση, βαθμών ελευθερίας ενώ στα K_{ff} και M_{ff} των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας. Τα μητρώα K_{ss} και M_{ss} είναι 3·3 ενώ τα K_{ff} και M_{ff} 15·15. Αυτό συμβαίνει διότι η κατασκευή έχει 3 δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας, στην πάκτωση της καπνοδόχου, ενώ οι υπόλοιποι 15 είναι ελεύθεροι.

➤ Στατική Συμπύκνωση.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η διαδικασία της Στατικής Συμπύκνωσης γίνεται ώστε να μειωθεί ο αριθμός των εξισώσεων κίνησης που πρέπει να επιλυθούν. Για αυτό το λόγο, όταν η επίλυση γίνεται με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, παραλείπονται οι δυνάμεις των στροφικών βαθμών ελευθερίας, για τις οποίες η κινητική ενέργεια είναι μικρή, σε σχέση με την κινητική ενέργεια των μεταφορικών βαθμών ελευθερίας.

Συντάσσεται ένα νέο μητρώο αναδιάταξης που έχει διαστάσεις 15·15, διότι αναφέρεται μόνο στα μητρώα K_{ff} και M_{ff} που περιέχουν τους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η σύνταξή του είναι ανάλογος με το προηγούμενο μητρώο αναδιάταξης,

$$\omega_2 = 19.37 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 49.65 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 388.30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_5 = 94.45 \text{ rad/s}$$

$$\omega_6 = 163.50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_7 = 72.01 \text{ rad/s}$$

$$\omega_8 = 194.37 \text{ rad/s}$$

$$\omega_9 = 502.98 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{10} = 644.21 \text{ rad/s}$$

και οι αντίστοιχες ιδιομορφές

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0355 \\ 0 \\ 0.1392 \\ 0 \\ 0.3077 \\ 0 \\ 0.5285 \\ 0 \\ 0.7781 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1372 \\ 0 \\ -0.3790 \\ 0 \\ -0.4269 \\ 0 \\ -0.0211 \\ 0 \\ 0.8092 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2739 \\ 0 \\ 0.3938 \\ 0 \\ -0.1711 \\ 0 \\ 0.4965 \\ 0 \\ 0.7029 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 0.4761 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5527 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6839 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4174 \\ 0 \\ -0.0582 \\ 0 \\ 0.5352 \\ 0 \\ -0.5778 \\ 0 \\ 0.4497 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6004 \\ 0 \\ -0.6151 \\ 0 \\ 0.4358 \\ 0 \\ -0.2313 \\ 0 \\ 0.1330 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_7 = \begin{bmatrix} 0.1595 \\ 0 \\ 0.3184 \\ 0 \\ 0.4573 \\ 0 \\ 0.5561 \\ 0 \\ 0.5957 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_8 = \begin{bmatrix} 0.3864 \\ 0 \\ 0.4752 \\ 0 \\ 0.1418 \\ 0 \\ -0.3876 \\ 0 \\ -0.6741 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_9 = \begin{bmatrix} -0.3864 \\ 0 \\ 0.4752 \\ 0 \\ -0.1418 \\ 0 \\ -0.3876 \\ 0 \\ 0.6741 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{10} = \begin{bmatrix} 1.1595 \\ 0 \\ -0.3185 \\ 0 \\ 0.4573 \\ 0 \\ -0.5561 \\ 0 \\ 0.5957 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $\omega_1 = 4.2498 \text{ rad/s}$

Στο τέλος κάθε προγράμματος, εν είδη επαλήθευσης, υπολογίζεται ο συνολικός όγκος της κατασκευής

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 307.483m^3$$

Η παραπάνω διαδικασία έχει γίνει για τα εξής:

1. Σύμφωνα με την *παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας*, έχουν γραφεί 10 προγράμματα σε γλώσσα MAPLE για 1,2,3,4,5,6,7,8,9 και 10 Πεπερασμένα Στοιχεία.
2. Σύμφωνα με την *παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών στους κόμβους*, έχουν γραφεί 10 προγράμματα σε γλώσσα MAPLE για τα ίδιο αριθμών στοιχείων.

5.3.1 Πίνακες Αποτελεσμάτων.

Παρακάτω, παρουσιάζονται οι πίνακες των αποτελεσμάτων για τις τρεις πρώτες ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές όλων των προγραμμάτων που συνετάχθησαν.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 1 Πεπερασμένο Στοιχείο:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	1.9668	2.2189
$\omega_2 (rad/s)$	55.2449	67.6609

Πιν. 5.1 Ιδιοσυχνότητες για 1 Πεπερασμένο Στοιχείο

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Πιν. 5.2 Ιδιομορφές για 1 Πεπερασμένο Στοιχείο

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359rad / s$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	$\omega_1 (rad/s)$	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	1.9668	57.57
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	2.2189	52.14

Πίν. 5.3 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 1 Πεπερασμένο Στοιχείο

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, η απόκλιση των αποτελεσμάτων που πάρθηκαν από την επίλυση με τη χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι πολύ μεγάλη. Όμως, συγκρίνοντας τις 2 αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Η διαδικασία συνεχίζεται, αφού η απόκλιση είναι τόσο μεγάλη.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 2 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	3.3387	3.5791
$\omega_2 (rad/s)$	12.4806	14.7932
$\omega_3 (rad/s)$	67.0263	71.5588

Πιν. 5.4 Ιδιοσυχνότητες για 2 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2539 \\ 0.9672 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2599 \\ 0.9656 \\ 0 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.8357 \\ 0.5492 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7419 \\ -0.6705 \\ 0 \end{bmatrix}$
φ_3	$\begin{bmatrix} -0.5342 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8453 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5342 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8453 \end{bmatrix}$

Πιν. 5.5 Ιδιομορφές για 2 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 rad / s$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	3.3387	27.98
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	3.5791	22.80

Πιν. 5.6 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 2 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, η απόκλιση των αποτελεσμάτων που πάρθηκαν από την επίλυση με τη χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι μεγάλη. Όμως, συγκρίνοντας τις 2 αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Η διαδικασία συνεχίζεται, αφού η απόκλιση είναι τόσο μεγάλη.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 3 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
ω_1 (rad/s)	3.8603	4.0077
ω_2 (rad/s)	15.1940	17.6939
ω_3 (rad/s)	37.1246	44.2832

Πιν. 5.7 Ιδιοσυχνότητες για 3 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1102 \\ 0 \\ 0.4246 \\ 0 \\ 0.8986 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1123 \\ 0 \\ 0.4282 \\ 0 \\ 0.8967 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.3613 \\ 0 \\ -0.5503 \\ 0 \\ 0.7528 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3498 \\ 0 \\ 0.4784 \\ 0 \\ -0.8054 \end{bmatrix}$
φ_3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.8020 \\ 0 \\ -0.5259 \\ 0 \\ 0.2832 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7059 \\ 0 \\ -0.5856 \\ 0 \\ 0.3985 \end{bmatrix}$

Πιν.5.8 Ιδιομορφές για 3 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 rad / s$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	$\omega_1 (rad/s)$	Διαφορά(%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	3.8603	16.73
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.0077	13.55

Πιν. 5.9 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 3 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, η απόκλιση των αποτελεσμάτων που πάρθηκαν από την επίλυση με τη χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι μεγάλη. Όμως, συγκρίνοντας τις δύο αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των δύο θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται, αφού η απόκλιση είναι μεγάλη ακόμα.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 4 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	4.0787	4.1718
$\omega_2 (rad/s)$	16.9043	18.8904
$\omega_3 (rad/s)$	40.1904	47.4980

Πιν. 5.10 Ιδιοσυχνότητες για 4 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.059 \\ 0 \\ -0.2284 \\ 0 \\ -0.4987 \\ 0 \\ -0.8340 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.059 \\ 0 \\ -0.2302 \\ 0 \\ -0.5004 \\ 0 \\ -0.8325 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2089 \\ 0 \\ 0.4964 \\ 0 \\ 0.2634 \\ 0 \\ -0.8003 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.2106 \\ 0 \\ -0.4790 \\ 0 \\ -0.2133 \\ 0 \\ -0.8250 \end{bmatrix}$
φ_3	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.4391 \\ 0 \\ -0.3439 \\ 0 \\ 0.6509 \\ 0 \\ -0.5151 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.3987 \\ 0 \\ -0.2353 \\ 0 \\ 0.6331 \\ 0 \\ -0.6204 \end{bmatrix}$

Πιν. 5.11 Ιδιομορφές για 4 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359rad / s$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	4.0787	12.02
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.1718	10.01

Πιν.5.12 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 4 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Όμως, συγκρίνοντας τις 2 αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 5 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
ω_1 (rad/s)	4.1870	4.2498
ω_2 (rad/s)	17.8831	19.3657
ω_3 (rad/s)	43.0053	49.6480

Πιν. 5.13 Ιδιοσυχνότητες για 5 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0352 \\ 0 \\ 0.1383 \\ 0 \\ 0.3065 \\ 0 \\ 0.5278 \\ 0 \\ 0.7792 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0355 \\ 0 \\ 0.1392 \\ 0 \\ 0.3078 \\ 0 \\ 0.5285 \\ 0 \\ 0.7781 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1348 \\ 0 \\ 0.3806 \\ 0 \\ 0.4463 \\ 0 \\ 0.0548 \\ 0 \\ -0.7968 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.1372 \\ 0 \\ -0.3790 \\ 0 \\ -0.4269 \\ 0 \\ -0.0211 \\ 0 \\ 0.8092 \end{bmatrix}$
φ_3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2868 \\ 0 \\ 0.4582 \\ 0 \\ -0.1048 \\ 0 \\ 0.5455 \\ 0 \\ 0.6319 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2739 \\ 0 \\ 0.3938 \\ 0 \\ -0.1711 \\ 0 \\ -0.4965 \\ 0 \\ 0.7029 \end{bmatrix}$

Πιν. 5.14 Ιδιομορφές για 5 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359rad / s$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά(%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	4.1870	9.68
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.2498	8.33

Πιν. 5.15 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 5 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Όμως, συγκρίνοντας τις 2 αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 6 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
ω_1 (rad/s)	4.2477	4.2927
ω_2 (rad/s)	18.4690	19.5843

ω_3 (rad/s)	44.9549	50.5257
--------------------	---------	---------

Πιν. 5.16 Ιδιοσυχνότητες για 6 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0230 \\ 0 \\ -0.0909 \\ 0 \\ -0.2028 \\ 0 \\ -0.3544 \\ 0 \\ -0.5359 \\ 0 \\ -0.7330 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0231 \\ 0 \\ -0.0913 \\ 0 \\ -0.2036 \\ 0 \\ -0.3551 \\ 0 \\ -0.5362 \\ 0 \\ -0.7322 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0929 \\ 0 \\ 0.2870 \\ 0 \\ 0.4280 \\ 0 \\ 0.3391 \\ 0 \\ -0.0865 \\ 0 \\ -0.7768 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0946 \\ 0 \\ -0.2887 \\ 0 \\ -0.4226 \\ 0 \\ -0.3114 \\ 0 \\ 0.1091 \\ 0 \\ 0.7836 \end{bmatrix}$

φ_3	0	0
	0.2020	0.1992
	0	0
	0.4274	0.3981
	0	0
	0.2104	0.1514
	0	0
	-0.3473	-0.3754
	0	0
	-0.3867	-0.3346
0	0	
0.6798	0.7253	

Πιν. 5.17 Ιδιομορφές για 6 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	$\omega_1 \text{ (rad/s)}$	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	4.2477	8.37
<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>	4.2927	7.40

Πιν. 5.18 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 6 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Όμως, συγκρίνοντας τις 2 αυτές αποκλίσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η απόκλιση που προκύπτει από τη σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που πάρθηκε χρησιμοποιώντας την παραδοχή της Συνεχούς Κατανομής της Μάζας είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο

αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 7 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	4.2850	4.3187
$\omega_2 (rad/s)$	18.8410	19.6994
$\omega_3 (rad/s)$	46.2855	50.8421

Πιν. 5.19 Ιδιοσυχνότητες για 7 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0160 \\ 0 \\ 0.0633 \\ 0 \\ 0.1419 \\ 0 \\ 0.2499 \\ 0 \\ 0.3830 \\ 0 \\ 0.5340 \\ 0 \\ 0.6938 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0161 \\ 0 \\ 0.0636 \\ 0 \\ 0.1423 \\ 0 \\ 0.2504 \\ 0 \\ 0.3834 \\ 0 \\ 0.5341 \\ 0 \\ 0.6932 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0671 \\ 0 \\ 0.2190 \\ 0 \\ 0.3671 \\ 0 \\ 0.4023 \\ 0 \\ 0.2290 \\ 0 \\ -0.1817 \\ 0 \\ -0.7520 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0682 \\ 0 \\ -0.2208 \\ 0 \\ -0.3664 \\ 0 \\ -0.3950 \\ 0 \\ -0.2142 \\ 0 \\ 0.1972 \\ 0 \\ 0.7560 \end{bmatrix}$

φ_3	0	0
	0.1491	0.1493
	0	0
	0.3694	0.3560
	0	0
	0.3370	0.3010
	0	0
	-0.0429	-0.0856
	0	0
	-0.4327	-0.4370
	0	0
	-0.2404	-0.1948
	0	0
0.6942	0.7239	

Πιν.5.20 Ιδιομορφές για 7 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	4.2850	7.57
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.3187	6.84

Πιν. 5.21 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 7 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Εξακολουθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων που έχουν παρθεί από την παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας να είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο

αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 8 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>		
	<i><u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u></i>	<i><u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u></i>
$\omega_1 (rad/s)$	4.3095	4.3356
$\omega_2 (rad/s)$	19.0899	19.7667
$\omega_3 (rad/s)$	47.2138	50.9391

Πιν. 5.22 Ιδιοσυχνότητες για 8 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0116 \\ 0 \\ -0.0461 \\ 0 \\ -0.1037 \\ 0 \\ -0.1833 \\ 0 \\ -0.2831 \\ 0 \\ -0.3995 \\ 0 \\ -0.5272 \\ 0 \\ -0.6601 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0117 \\ 0 \\ -0.0463 \\ 0 \\ -0.1039 \\ 0 \\ -0.1837 \\ 0 \\ -0.2835 \\ 0 \\ -0.3998 \\ 0 \\ -0.5271 \\ 0 \\ -0.6596 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0502 \\ 0 \\ 0.1701 \\ 0 \\ 0.3053 \\ 0 \\ 0.3870 \\ 0 \\ 0.3452 \\ 0 \\ 0.1326 \\ 0 \\ -0.2468 \\ 0 \\ -0.7266 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0509 \\ 0 \\ -0.1716 \\ 0 \\ -0.3060 \\ 0 \\ -0.3845 \\ 0 \\ -0.3376 \\ 0 \\ -0.1028 \\ 0 \\ 0.2576 \\ 0 \\ 0.7290 \end{bmatrix}$

φ_3	0	0
	0.1138	0.1148
	0	0
	0.3094	0.3052
	0	0
	0.3687	0.3492
	0	0
	0.1601	0.1267
	0	0
	-0.2205	-0.2468
	0	0
	-0.4319	-0.4239
	0	0
	-0.1028	-0.0835
0	0	
0.6928	0.7128	

Πιν. 5.23 Ιδιομορφές για 8 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	4.3095	7.04
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.3356	6.48

Πιν. 5.24 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 8 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Εξακολουθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων που έχουν παρθεί από την παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας να είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 9 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	4.3265	4.3472
$\omega_2 (rad/s)$	19.2638	19.8092
$\omega_3 (rad/s)$	47.8792	50.9511

Πιν.5.25 Ιδιοσυχνότητες για 9 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0088 \\ 0 \\ 0.0349 \\ 0 \\ 0.0784 \\ 0 \\ 0.1390 \\ 0 \\ 0.2156 \\ 0 \\ 0.3064 \\ 0 \\ 0.4084 \\ 0 \\ 0.5179 \\ 0 \\ 0.6307 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0088 \\ 0 \\ 0.0350 \\ 0 \\ 0.0785 \\ 0 \\ 0.1392 \\ 0 \\ 0.2159 \\ 0 \\ 0.3067 \\ 0 \\ 0.4086 \\ 0 \\ 0.5179 \\ 0 \\ 0.6303 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0387 \\ 0 \\ 0.1346 \\ 0 \\ 0.2524 \\ 0 \\ 0.3475 \\ 0 \\ 0.3704 \\ 0 \\ 0.2789 \\ 0 \\ 0.0528 \\ 0 \\ -0.2918 \\ 0 \\ -0.7021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0392 \\ 0 \\ -0.1357 \\ 0 \\ -0.2535 \\ 0 \\ -0.3470 \\ 0 \\ -0.3669 \\ 0 \\ -0.2718 \\ 0 \\ -0.0434 \\ 0 \\ 0.2996 \\ 0 \\ 0.7038 \end{bmatrix}$

φ_3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0892 \\ 0 \\ 0.2591 \\ 0 \\ 0.3581 \\ 0 \\ 0.2683 \\ 0 \\ -0.0125 \\ 0 \\ -0.3222 \\ 0 \\ -0.3906 \\ 0 \\ -0.0265 \\ 0 \\ 0.6837 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0902 \\ 0 \\ 0.2580 \\ 0 \\ 0.3482 \\ 0 \\ 0.2463 \\ 0 \\ -0.0391 \\ 0 \\ -0.3358 \\ 0 \\ -0.3774 \\ 0 \\ 0.0033 \\ 0 \\ 0.6976 \end{bmatrix}$
-------------	---	--

Πιν. 5.26 Ιδιομορφές για 9 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	$\omega_1 \text{ (rad/s)}$	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων</u> <u>Μαζών</u>	4.3265	6.67
<u>Παραδοχή Συνεχούς</u> <u>Κατανομής Μάζας</u>	4.3472	6.27

Πιν. 5.27 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 9 Πεπερασμένα Στοιχεία

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα, υπάρχει ακόμα απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Εξακολουθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων που έχουν παρθεί από την παραδοχή της συνεχούς κατανομής της μάζας να είναι μικρότερη.

Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μικρότερη γίνεται και η απόκλιση από την λύση που πάρθηκε με τις αναλυτικές μεθόδους. Ακόμη, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο μειώνεται και η διαφορά των αποκλίσεων μεταξύ των 2 θεωρήσεων.

Η διαδικασία συνεχίζεται.

- Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές για 10 Πεπερασμένα Στοιχεία:

<u>Ιδιοσυχνότητες</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
$\omega_1 (rad/s)$	4.3386	4.3556
$\omega_2 (rad/s)$	19.3898	19.8378
$\omega_3 (rad/s)$	48.3689	50.9312

Πιν. 5.28 Ιδιοσυχνότητες για 10 Πεπερασμένα Στοιχεία

<u>Ιδιομορφές</u>		
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>
φ_1	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0068 \\ 0 \\ -0.0271 \\ 0 \\ -0.0609 \\ 0 \\ -0.1082 \\ 0 \\ -0.1683 \\ 0 \\ -0.2403 \\ 0 \\ -0.3224 \\ 0 \\ -0.4125 \\ 0 \\ -0.5076 \\ 0 \\ -0.6049 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0068 \\ 0 \\ -0.0271 \\ 0 \\ -0.0610 \\ 0 \\ -0.1083 \\ 0 \\ -0.1685 \\ 0 \\ -0.2405 \\ 0 \\ -0.3226 \\ 0 \\ -0.4126 \\ 0 \\ -0.5075 \\ 0 \\ -0.6046 \end{bmatrix}$

φ_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0306 \\ 0 \\ 0.1083 \\ 0 \\ 0.2095 \\ 0 \\ 0.3038 \\ 0 \\ 0.3567 \\ 0 \\ 0.3348 \\ 0 \\ 0.2139 \\ 0 \\ -0.0121 \\ 0 \\ -0.3234 \\ 0 \\ -0.6791 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0309 \\ 0 \\ -0.1091 \\ 0 \\ -0.2105 \\ 0 \\ -0.3041 \\ 0 \\ -0.3553 \\ 0 \\ -0.3309 \\ 0 \\ -0.2075 \\ 0 \\ 0.0195 \\ 0 \\ 0.3291 \\ 0 \\ 0.6803 \end{bmatrix}$
φ_3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0714 \\ 0 \\ 0.2176 \\ 0 \\ 0.3308 \\ 0 \\ 0.3152 \\ 0 \\ 0.1344 \\ 0 \\ -0.1476 \\ 0 \\ -0.3677 \\ 0 \\ -0.3336 \\ 0 \\ 0.0471 \\ 0 \\ 0.6710 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0723 \\ 0 \\ 0.2178 \\ 0 \\ 0.3259 \\ 0 \\ 0.3017 \\ 0 \\ 0.1138 \\ 0 \\ -0.1666 \\ 0 \\ -0.3728 \\ 0 \\ -0.3188 \\ 0 \\ 0.0707 \\ 0 \\ 0.6011 \end{bmatrix}$

Πιν. 5.29 Ιδιομορφές για 10 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο 5.2, έχει υπολογιστεί , με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων, η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής και είναι η $\omega = 4.6359 \text{ rad / s}$.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ιδιοσυχνότητα που προέκυψε από την επίλυση με τις αναλυτικές μεθόδους θα γίνει με την ω_1 .

	ω_1 (rad/s)	Διαφορά (%)
<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	4.3386	6.41
<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	4.3556	6.05

Πιν. 5.30 Σύγκριση Αποτελεσμάτων για 10 Πεπερασμένα Στοιχεία

1 Πεπερασμένο Στοιχείο			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	1.9668	2.2189	11.36
ω_2 (rad/s)	55.2449	67.6609	18.35
ω_3 (rad/s)	-	-	-
2 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	3.3387	3.5791	6.72
ω_2 (rad/s)	12.4806	14.7932	15.63
ω_3 (rad/s)	67.0263	71.5588	6.33

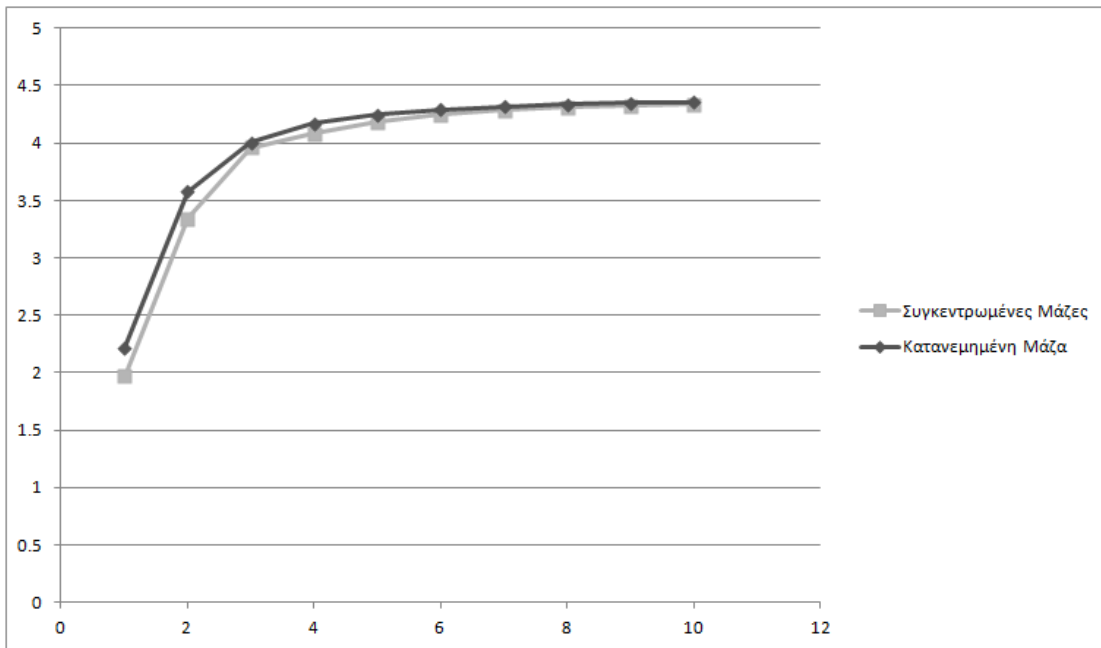
3 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
$\omega_1 (rad/s)$	3.9603	4.0077	1.18
$\omega_2 (rad/s)$	15.1940	17.6939	14.13
$\omega_3 (rad/s)$	37.1246	44.2832	16.17
4 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
$\omega_1 (rad/s)$	4.0787	4.1718	2.23
$\omega_2 (rad/s)$	16.9043	18.8904	10.51
$\omega_3 (rad/s)$	40.1904	47.4980	15.39
5 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
$\omega_1 (rad/s)$	4.1870	4.2498	1.48
$\omega_2 (rad/s)$	17.8831	19.357	7.66
$\omega_3 (rad/s)$	43.0053	49.6480	13.38
6 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
$\omega_1 (rad/s)$	4.2477	4.2927	1.05
$\omega_2 (rad/s)$	18.4690	19.5843	5.69

ω_3 (rad/s)	44.6549	50.5257	11.62
7 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	4.2850	4.3187	0.78
ω_2 (rad/s)	18.8410	19.6994	4.36
ω_3 (rad/s)	46.2855	50.8421	8.96
8 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	4.3095	4.3356	0.60
ω_2 (rad/s)	19.0899	19.7667	3.42
ω_3 (rad/s)	47.2138	50.9391	7.31
9 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	4.3265	4.3472	0.48
ω_2 (rad/s)	19.2638	19.8092	2.75
ω_3 (rad/s)	47.8792	50.9511	6.03
10 Πεπερασμένα Στοιχεία			
	<u>Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών</u>	<u>Παραδοχή Συνεχούς Κατανομής Μάζας</u>	Διαφορά(%)
ω_1 (rad/s)	4.3386	4.3556	0.39

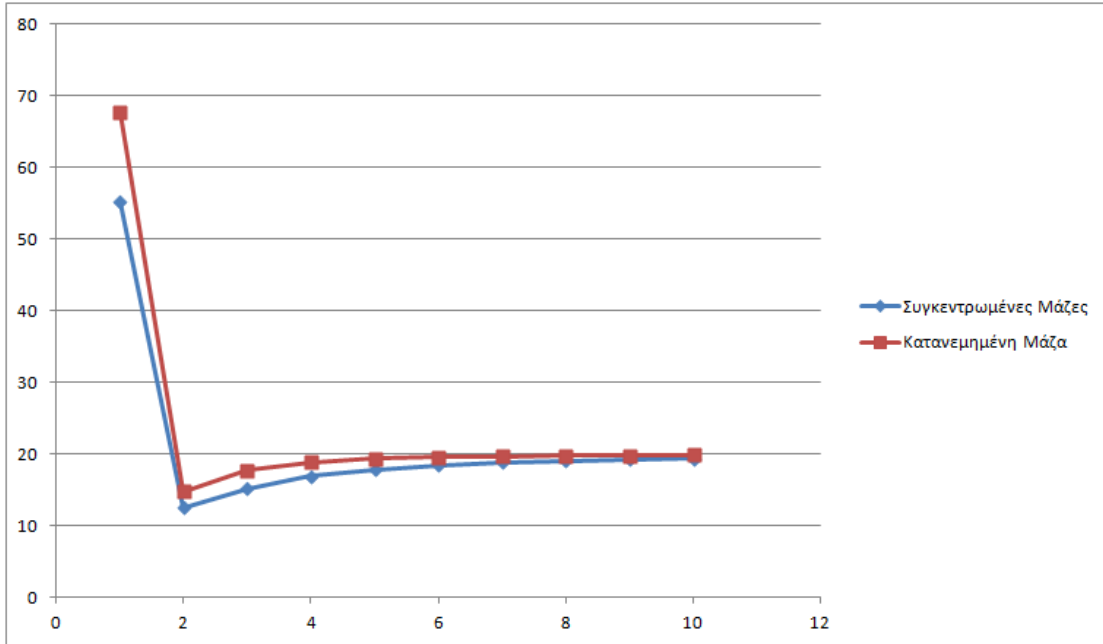
ω_2 (rad/s)	19.3898	19.8378	2.26
ω_3 (rad/s)	48.3689	50.9312	5.03

Πιν. 5.31 Σχετική διαφορά Ιδιοσυχνοτήτων

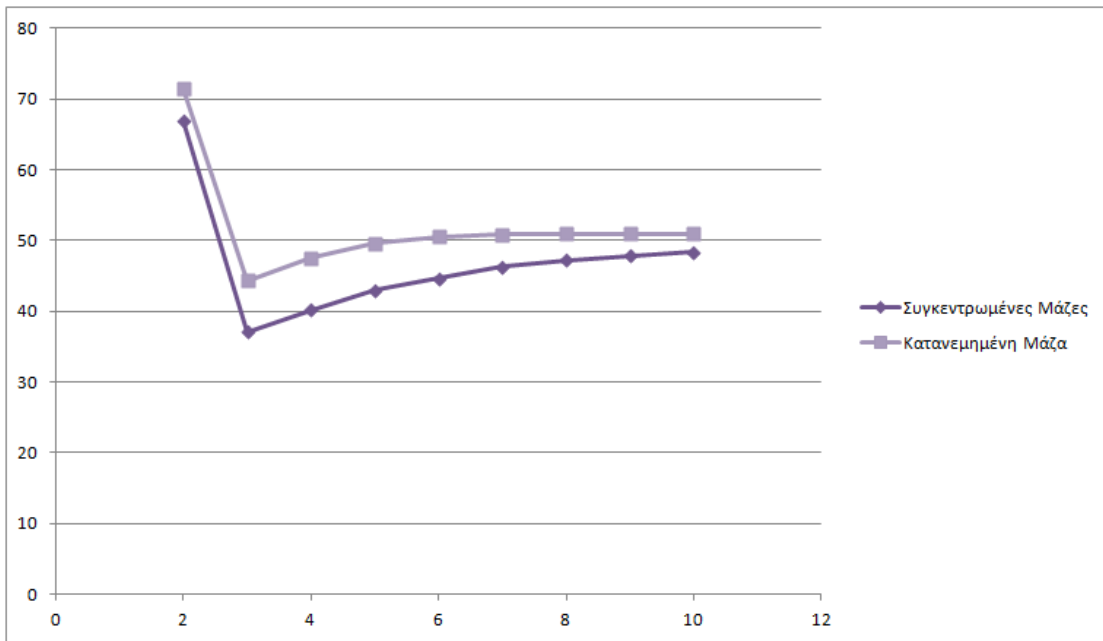
Παρακάτω, παρουσιάζονται οι παραπάνω διαφορές σε μορφή γραφημάτων.



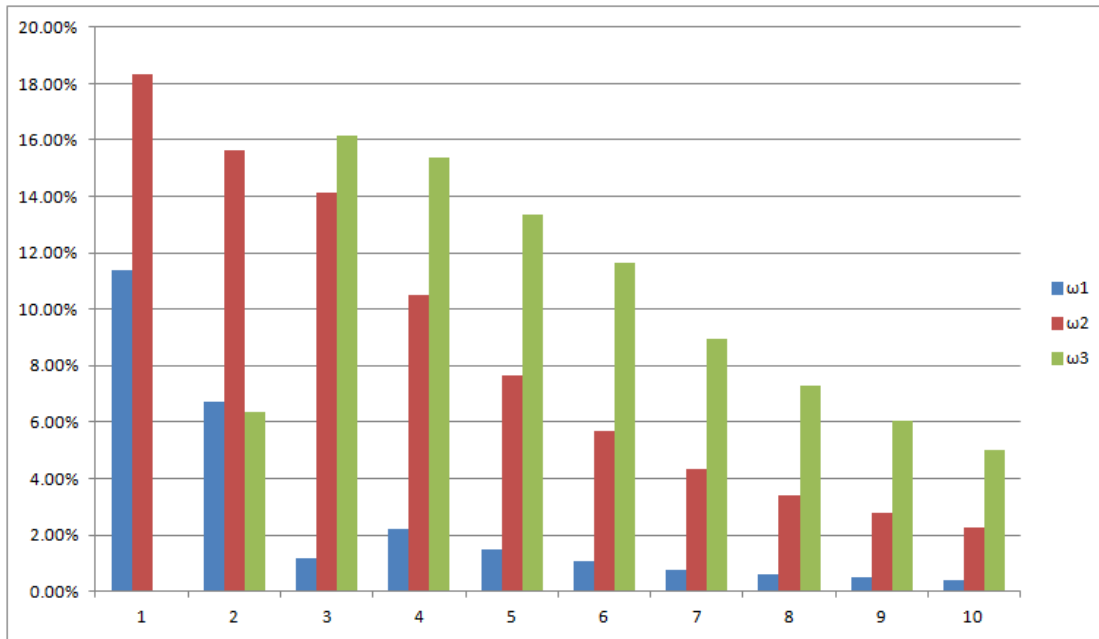
Σχ.5.4 Γραφική Παρουσίαση ω_1 και για τις 2 παραδοχές



Σχ. 5.5 Γραφική Παρουσίαση ω_2 και για τις 2 παραδοχές



Σχ.5.6 Γραφική Παρουσίαση ω_3 και για τις 2 παραδοχές



Σχ. 5.7 Σχετική Διαφορά Ιδιοσυχνοτήτων ανάλογα με τον Αριθμό των Πεπερασμένων Στοιχείων

5.4 Δυναμική Ανάλυση Πασσάλου με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Για τις ανάγκες της παραγράφου αυτής χρειάστηκε να συνταχθεί εκ νέου υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE.

Έγινε επιλογή τριών εδαφικών στρωμάτων, τα οποία είναι:

Αμμοχάλικο: $E_s = 150MPa$, $\nu=0.35$

Αργίλος CH μέτριας στιφρότητας: $E_s = 20MPa$, $\nu=0.20$

Μεσόκοκκη Άμμος Χαλαρή: $E_s = 35MPa$, $\nu=0.25$

Στο Σχ.5.8 φαίνεται η τομή του πασσάλου. Το μήκος του είναι 15m και η διάμετρός του 0.80m. Το μήκος κάθε εδαφικού στρώματος είναι 5m. Ο πάσσαλος θεωρείται πακτωμένος στον βράχο. Το σκυρόδεμα κατασκευής του πασσάλου έχει μέτρο ελαστικότητας $E_p = 32GPa$. Η ροπή αδράνειάς του (I_p) υπολογίζεται από τον τύπο της ροπής αδράνειας της κυκλικής διατομής.

Από τη σχέση 4.4,

$$\lambda = \left(\frac{k}{4E_p I_p} \right)^{1/4}$$

υπολογίζεται η παράμετρος Winkler (λ) για κάθε εδαφικό στρώμα.

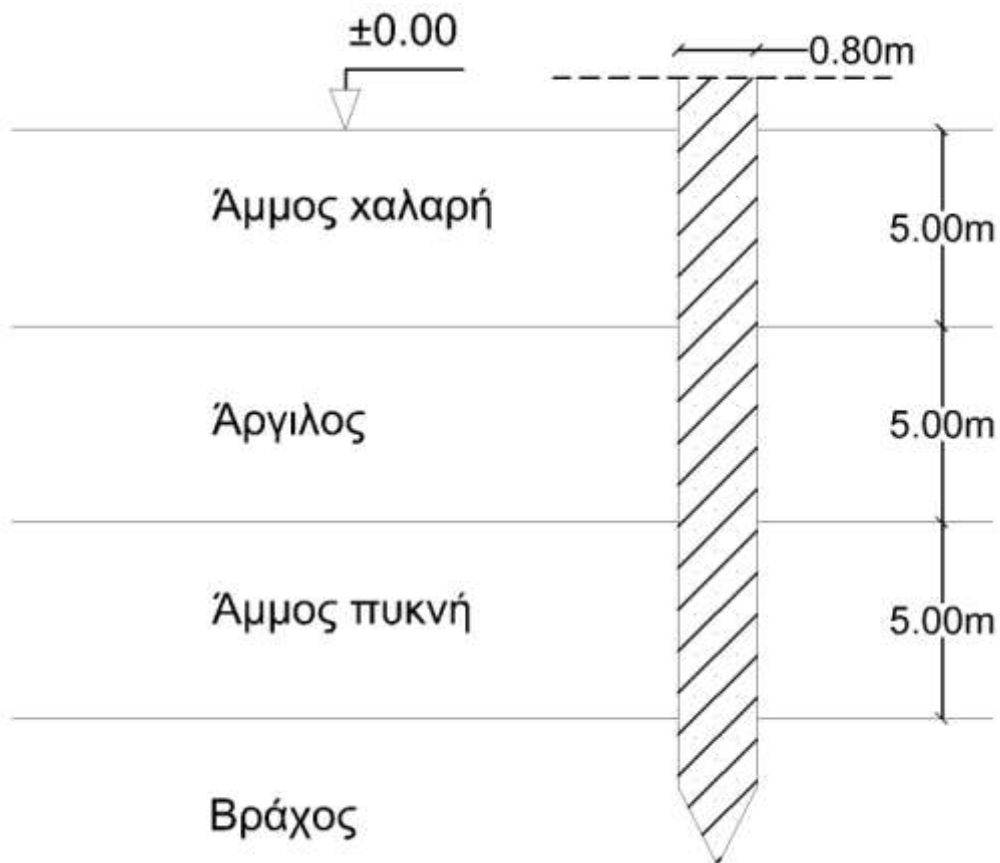
Από τη σχέση 4.1 υπολογίζεται η στατική ακαμψία του πασσάλου (K_{hh}) για κάθε εδαφικό στρώμα.

$$K_{hh} = 4E_p I_p \lambda^3$$

Υπολογίζονται τα α, β σύμφωνα με τους τύπους 4.18, 4.19

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta}$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta}$$



Σχ. 5.8 Τομή Πασσάλου αιχμής.

Το μητρώο ακαμψίας του κάθε στοιχείου μορφώνεται σύμφωνα με τις σχέσεις 4.20a-s.

Για το μητρώο μάζας του κάθε στοιχείου γίνεται η παραδοχή της συγκεντρωμένης μάζας στους κόμβους.

Στη συνέχεια του υπολογιστικού κώδικα ακολουθείται η ίδια διαδικασία με εκείνη που ακολουθήθηκε και για την δυναμική ανάλυση της καπνοδόχου, στην προηγούμενη παράγραφο.

Οι ιδιοσυχνότητες που λαμβάνονται είναι

Ιδιοσυχνότητες	
$\omega_1 (rad/s)$	133.2791
$\omega_2 (rad/s)$	167.2603
$\omega_3 (rad/s)$	256.7952
$\omega_4 (rad/s)$	366.8501
$\omega_5 (rad/s)$	1002.2694
$\omega_6 (rad/s)$	1369.1255

Πιν. 5.32 Ιδιοσυχνότητες για 3 εδαφικά στρώματα.

και οι αντίστοιχες ιδιομορφές:

Ιδιομορφές	
φ_1	$\begin{bmatrix} 0.0070 \\ 0 \\ 0.1722 \\ 0 \\ -0.9826 \\ 0 \end{bmatrix}$
φ_2	$\begin{bmatrix} 0.2835 \\ 0 \\ 0.8916 \\ 0 \\ 0.3530 \\ 0 \end{bmatrix}$

φ_3	$\begin{bmatrix} 0.9510 \\ 0 \\ -0.3080 \\ 0 \\ 0.0283 \\ 0 \end{bmatrix}$
φ_4	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.3536 \\ 0 \\ -0.6124 \\ 0 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$
φ_5	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$
φ_6	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.3536 \\ 0 \\ 0.6124 \\ 0 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$

Πιν.5.33 Ιδιομορφές για 3 εδαφικά στρώματα.

Η θεμελιώδης ιδιοπερίοδος του συστήματος είναι η:

$$T_1=0.0471s$$

Κρατώντας σταθερό το ύψος και τη διατομή του πασσάλου, έγινε αλλαγή στα εδαφικά στρώματα τα οποία διαπερνά.

Όταν ο πάσσαλος διαπερνά μόνο άργιλο CH μέτριας σφιφρότητας, η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega_1=109.3230 \text{ rad/s}$$

ενώ η ιδιοπερίοδος του συστήματος για την ιδιοσυχνότητα αυτή είναι:

$$T=0.0575s$$

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται οι θεμελιώδης ιδιοσυχνότητες 2 ακόμα συστημάτων καθώς και η ποσοστιαία διαφορά τους με την ιδιοσυχνότητα που υπολογίστηκε για το εδαφικό στρώμα της αργίλου.

Χάρη διευκόλυνσης, από εδώ και στο εξής το στρώμα της αργίλου θα συμβολίζεται ως CH, της μεσόκοκκης άμμου ως S και του αμμοχάλικου ως G.

Εδαφικό Στρώμα	$\omega_1(\text{rad/s})$	T(s)	Διαφορά (%)
Άργιλος (CH)	109.3230	0.0575	-
Άμμος μεσόκοκκη (S)	134.6837	0.0467	23.20%
Αμμοχάλικο (G)	231.8774	0.0271	112.10%

Πιν.5.34 Ιδιοσυχνότητες, ιδιοπερίοδοι και σχετικές διαφορές σε σχέση με την ω_1 της αργίλου

Έγινε, επίσης, εναλλαγή μεταξύ των στρωμάτων ώστε να παρατηρηθούν οι διαφορές της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας, ανάλογα με τη σειρά που βρίσκονται τα εδαφικά στρώματα. Το πρώτο στρώμα που αναγράφεται είναι αυτό που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος.

Εδαφικό Στρώμα	$\omega_1(\text{rad/s})$	T(s)	Διαφορά (%)
G- CH- S	133.2791	0.0471	21.19
G- S- CH	110.1353	0.0570	0.74
CH- S- G	184.0125	0.0341	68.32
CH- G- S	136.1785	0.0461	24.57
S-CH- G	173.3137	0.0363	58.53
S- G- CH	110.4333	0.0569	1.02

Πιν. 5.35 Ιδιοσυχνότητες, ιδιοπερίοδοι και σχετικές διαφορές σε σχέση με την ω_1 της αργίλου

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η ιδιοσυχνότητα των συστημάτων αυξάνεται σημαντικά όταν το μαλακότερο από τα στρώματα, δηλαδή η άργιλος, βρίσκεται χαμηλότερα ενώ το αμμοχάλικο ψηλότερα.

Κρατώντας και πάλι το ύψος και τη διάμετρο του πασσάλου σταθερά, έγινε επίλυση για διαφορετικά ύψη εδαφικών στρωμάτων: 6m το εδαφικό στρώμα που βρίσκεται στην αιχμή του πασσάλου, 6m το εδαφικό στρώμα που βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους και 3m το ενδιάμεσο στρώμα.

Εδαφικό Στρώμα	$\omega_1(\text{rad/s})$	T(s)	Διαφορά (%)
G- CH- S	112.4868	0.0559	2.89
G- S- CH	99.2531	0.0633	-9.21
CH-S- G	137.5817	0.0457	25.85
CH- G- S	124.0118	0.0507	13.44
S-CH- C	123.7650	0.0508	13.21
S- G- CH	100.7958	0.0623	-7.80

Πιν. 5.36 Ιδιοσυχνότητες, ιδιοπερίοδοι και σχετικές διαφορές σε σχέση με την ω_1 της αργίλου

Και πάλι, η μεγαλύτερη αύξηση παρατηρείται στις περιπτώσεις που η άργιλος βρίσκεται στην πάκτωση του πασσάλου ενώ το αμμοχάλικο στην επιφάνεια του εδάφους.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η ποσοστιαία μείωση που παρατηρείται όταν τα εδαφικά στρώματα είναι ανισοϋψή.

Εδαφικό Στρώμα	ω για ισοϋψή εδαφικά στρώματα	ω για ανισοϋψή στρώματα	Διαφορά (%)
G- CH- S	133.2791	112.4868	-18.48
G- S- CH	110.1353	99.2531	-10.96
CH-S- G	184.0125	137.5817	-33.75
CH- G- S	136.1785	124.0118	-9.81
S-CH- C	173.3137	123.7650	-40.03
S- G- CH	110.4333	100.7958	-9.56

Πιν. 5.37 Σύγκριση ιδιοσυχνοτήτων για ισοϋψή και ανισοϋψή στρώματα

Κεφάλαιο 6^ο: Συμπεράσματα

6.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη δυναμική ανάλυση της βιομηχανικής καπνοδόχου και του πάσσαλου αιχμής.

6.2 Συμπεράσματα

Για την βιομηχανική καπνοδόχο:

- Όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων, τόσο ακριβέστερη είναι η θεμελιώδης κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_1 συγκρινόμενη με την ακριβή ενεργειακή λύση του γενικευμένου μονοβάθμιου συστήματος. Τούτο συμβαίνει διότι όσο περισσότερα είναι τα πεπερασμένα στοιχεία που χωρίζεται η κατασκευή, τόσο ακριβέστερη είναι η προσομοίωση του συνεχούς συστήματος, δηλαδή τόσο ακριβέστερη είναι η κατανομή της μάζας και της ακαμψίας της κατασκευής.
- Διαπιστώθηκε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία χωρίζεται η κατασκευή, τόσο μειώνεται η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων για την θεμελιώδη κυκλική ιδιοσυχνότητα που υπολογίζονται για τη συνεχή κατανομή της μάζας και για την παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών στους κόμβους.

Για τον πάσσαλο αιχμής:

- Η μικρότερη τιμή της θεμελιώδους κυκλικής ιδιοσυχνότητας ήταν αυτή που υπολογίστηκε για την εδαφική στρώση της αργίλου, η οποία είναι και η μαλακότερη στρώση με μέτρο ελαστικότητας $E_s=20\text{MPa}$. Από την άλλη, η μεγαλύτερη ήταν εκείνη που υπολογίστηκε για την εδαφική στρώση του αμμοχάλικου, το οποίο έχει μέτρο ελαστικότητας 150MPa . Τούτο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο μαλακότερη είναι η εδαφική στρώση από την οποία διέρχεται ο πάσσαλος, τόσο μικρότερη είναι η θεμελιώδης κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος.
- Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος αυξάνει, όταν το μαλακότερο στρώμα βρίσκεται στην πάκτωση του πάσσαλου ενώ το σκληρότερο στην επιφάνεια του εδάφους.

- Σε σχέση με τα ισοϋψή εδαφικά στρώματα, παρατηρήθηκε μείωση της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας όταν τα εδαφικά στρώματα είναι ανισοϋψή. Δηλαδή, στην περίπτωση των ανισοϋψών στρωμάτων, η ακαμψία του συστήματος μειώνεται.

Βιβλιογραφία

- [1] Κατσικαδέλης, Ι.Θ. (2002) «Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών, Τόμος Ι» Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [2] Κατσικαδέλης, Ι.Θ. (2004) «Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ» Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [3] Καββαδάς, Μ. (2006) «Στοιχεία Εδαφομηχανικής» (<http://users.ntua.gr/kavvadas/>).
- [4] Αναγνωστόπουλος, Α. και Παπαδόπουλος, Β. (2004) «Θεμελιώσεις με Πασσάλους» Αθήνα, Εκδόσεις: Συμμετρίας.
- [5] Ζήνα, Α.Χ. και Μυλωνάκης, Γ.Ε. (2006) «Ενεργειακή Λύση για Δυσκαμψία Πασσάλων σε Ανομοιογενές Έδαφος», 5^ο Συνέδριο Γεωτεχνικής & Γεωπεριβαλλοντικής Μηχανικής, ΤΕΕ, Ξάνθη, (library.tee.gr/digital/m2134/m2134_zina.pdf).
- [6] Eisenberger, M. and Yankelevsky, D.Z. (1985) Exact Stiffness Matrix for Beam on Elastic Foundation, «*Computers & Structures*», Vol. 21, pp. 1355-1359.
- [7] Yankelevsky, D.Z. and Eisenberger, M. (1986) Exact Analysis of Beam Column on Elastic Foundation, «*Computers & Structures*», Vol. 23, pp. 351-356.

Παράρτημα Α

Υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13

A.1 Γενικά

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα MAPLE 13. Η MAPLE είναι ένα πακέτο για μαθηματικούς υπολογισμούς. Με πάνω από 3000 υπολογιστικές συναρτήσεις, τη δική της γλώσσα προγραμματισμού και πολλές άλλες δυνατότητες διασύνδεσης με άλλες εφαρμογές (Matlab, Excel) και με το Web, αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο.

A.2 Υπολογιστικός κώδικας για την ακριβή ενεργειακή λύση του μονοβάθμιου συστήματος.

A.2.1 Υπολογισμός για τη συνάρτηση σχήματος ελαστικής γραμμής προβόλου υπό ομοιόμορφη φόρτιση

```

> restart;
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
>
> R(x) := 3.05 - 0.0243·x : t(x) := 0.3 - 0.000·x : Rtheta(x) := 2.85 - 0.0233
·x : Rpi(x) := 2.75 - 0.0233·x : ttheta(x) := 0.10 : tpi(x) := 0.10 :
>
> Iz(x) := π·R(x)3·t(x) :
> psi(x) :=  $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$  :
> psidiff(x) := diff(psi(x), x) :
> psi2diff(x) := diff(psidiff(x), x) :
> psisq(x) := psi(x)·psi(x) :
> psi2diffsq(x) := psi2diff(x)·psi2diff(x) :
> kiff(x) := E·Iz(x)·psi2diffsq(x) :
> miff(x) := psisq(x)· $\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot R(x) \cdot t(x) \cdot \text{gamac}}{g} + \frac{2 \cdot \pi \cdot Rtheta(x) \cdot ttheta(x) \cdot \text{gamatheta}}{g} + \frac{2 \cdot \pi \cdot Rpi(x) \cdot tpi(x) \cdot \text{gamapi}}{g}\right)$  :
>
> kstar := int(kiff(x), x = 0 .. L) :
> mstar := int(miff(x), x = 0 .. L) :
> omega := sqrt( $\frac{kstar}{mstar}$ ) :
> E := 21000000 :

```

```

>
> L:= 75 :
> gamac:= 24 : gamatheta:= 0.0 : gamapi:= 0 :
> g:= 9.81 :
> evalf(omega);
4.754304146
> evalf(kstar);
3187.90855
> evalf(mstar);
141.0366332

```

A.2.2 Υπολογισμός για συνάρτηση σχήματος πρώτης ιδιομορφής ταλάντωσης προβόλου σταθερής διατομής

```

> restart;
> with(linalg) :
> with(LinearAlgebra) :
>
> R(x) := 3.05 - 0.0243·x : t(x) := 0.3 - 0.000·x : Rtheta(x) := 2.85 - 0.0233
·x : Rpi(x) := 2.75 - 0.0233·x : ttheta(x) := 0.10 : tpi(x) := 0.10 :
> Iz(x) := π·R(x)3·t(x) :
> psi(x) := (1/3)·( cosh((1.8751/L)·x) - cos((1.8751/L)·x)
- 0.7341( sinh((1.8751/L)·x) - sin((1.8751/L)·x) ) ) :
> psidiff(x) := diff(psi(x), x) :
> psi2diff(x) := diff(psidiff(x), x) :
> psisq(x) := psi(x)·psi(x) :
> psi2diffsq(x) := psi2diff(x)·psi2diff(x) :
> kiff(x) := E·Iz(x)·psi2diffsq(x) :
> miff(x) := psisq(x)·( 2·π·R(x)·t(x)·gamac/g
+ 2·π·Rtheta(x)·ttheta(x)·gamatheta/g + 2·π·Rpi(x)·tpi(x)·gamapi/g ) :
> kstar := int(kiff(x), x=0..L) :
> mstar := int(miff(x), x=0..L) :
> omega := sqrt( kstar/mstar ) :
> E:= 21000000 :
>
> L:= 75 :
> gamac:= 24 : gamatheta:= 0 : gamapi:= 0 :
> g:= 9.81 :
> evalf(omega);
4.635898865

```

```
> evalf(kstar);
1304.981747
> evalf(mstar);
60.72066666
```

A.3 Υπολογιστικός κώδικας για την βιομηχανική καπνοδόχο- 5 πεπερασμένα στοιχεία

```
> restart :
> with(linalg) :
> with(LinearAlgebra) :
> #Μετρο Ελαστικότητας Σκυροδεματος#
> E := 21000000 :
> #Ειδικό Βαρος Σκυροδεματος#
> gs := 24 :
> #Επιταγυνση Βαρυτητας#
> g := 9.81 :
> #Πυκνοτητα Σκυροδεματος#
> ρ :=  $\frac{gs}{g}$  :
> > # Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά Καπνοδόχου #

> #Υψος Καπνοδοχου#
> L := 75 :
> #Παχος Κελυφους#
> t := 0.30 :
> # Γεωμετρικά Στοιχεία Διατομων #

> #Διατομη Αρχης#
> #Εξωτερικη Διαμετρος#
> Da1 := 6.40 :
> #Εσωτερικη Διαμετρος#
> Da2 := Da1 - 2 t :
> #Διατομη Περαιτος#
> #Εξωτερικη Διαμετρος#
> Dm1 := 2.90 :
> #Εσωτερικη Διαμετρος#
> Dm2 := Dm1 - 2 t :
> #Διατομη στο Μεσον της Καπνοδόχου#
> #Εξωτερικη Διαμετρος#
> Dz1 :=  $\frac{(Da1 - Dm1)}{2} + Dm1$  :
> #Εσωτερικη Διαμετρος#
> Dz2 := Dz1 - 2 t :
> # Πεπερασμένα Στοιχεία #
> n := 5 :
> #Πεπερασμενο Στοιχειο 1#
>
```



```

> #Βαθμοι Ελευθερίας Αρχής:1,2,3
> #Βαθμοι Ελευθερίας Περαιτός:4,5,6
>
> #Μήκος Στοιχείου 1#
> L1:= evalf  $\left(\frac{L}{n}\right)$  :
>
> # Διαμετρος στο Πέρασ του στοιχειου 1#
> Dg1 := Da1 -  $\frac{(Da1 - Dm1) \cdot L1}{L}$  :
>
> #Εξωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 1#
> D1x :=  $\frac{(Da1 - Dg1)}{2}$  + Dg1 :
>
> #Εσωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 1#
> D1e := D1x - 2 t :
>
> #Εμβαδον Κοιλης Κυκλικης Διατομης Στοιχειου 1#
> A1 := evalf  $\left(\frac{\pi \cdot D1x^2}{4} - \frac{\pi \cdot D1e^2}{4}\right)$  :
>
> #Ογκος Στοιχειου 1#
> V1 := A1 \cdot L1 :
>
> #Ροπη Αδρανειας Στοιχειου 1#
> I1 := eval  $\left(\frac{evalf(\pi)}{4} \left( \left( \left( \frac{D1e}{2} \right) + t \right)^4 - \left( \frac{D1e}{2} \right)^4 \right) \right)$  :
>
>
> #Πεπερασμενο Στοιχειο 2#
>
>
> #Βαθμοι Ελευθερίας Αρχής:4,5,6
> #Βαθμοι Ελευθερίας Περαιτός:7,8,9
>
>
> #Μήκος Στοιχείου 2#
> L2:= evalf  $\left(\frac{L}{n}\right)$  :
>
> # Διαμετρος στο Πέρασ του στοιχειου 2#
> Del := Dg1 -  $\frac{(Da1 - Dm1) \cdot L2}{L}$  :
>
> #Εξωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 2#
> D2x :=  $\frac{(Dg1 - Del)}{2}$  + Del :
>
> #Εσωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 2#
> D2e := D2x - 2 t :
>
> #Εμβαδον Κοιλης Κυκλικης Διατομης Στοιχειου 2#
> A2 := evalf  $\left(\frac{\pi \cdot D2x^2}{4} - \frac{\pi \cdot D2e^2}{4}\right)$  :
>
> #Ογκος Στοιχειου 2#
> V2 := A2 \cdot L2 :
>
> #Ροπη Αδρανειας Στοιχειου 2#
> I2 := eval  $\left(\frac{evalf(\pi)}{4} \left( \left( \left( \frac{D2e}{2} \right) + t \right)^4 - \left( \frac{D2e}{2} \right)^4 \right) \right)$  :
>
>
> #Πεπερασμενο Στοιχειο 3#
>
>
> #Βαθμοι Ελευθερίας Αρχής:7,8,9
> #Βαθμοι Ελευθερίας Περαιτός: 10,11,12

```

```

>
> #Μηκος Στοιχειου 3#
> L3:= evalf(  $\frac{L}{n}$  ) :
> # Διαμετρος στο Πέρασ του στοιχειου 3#
> Dh1 := De1 -  $\frac{(Da1 - Dm1) \cdot L3}{L}$  :
> #Εξωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 3#
> D3x := Dz1 :
> #Εσωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 3#
> D3e := D3x - 2 t :
> #Εμβαδον κοιλης κυκλικης Διατομης Στοιχειου 3#
> A3 := evalf(  $\frac{\pi \cdot D3x^2}{4} - \frac{\pi \cdot D3e^2}{4}$  ) :
>
> #Ογκος Στοιχειου 3#
> V3 := A3 \cdot L3 :
>
> #Ροπη Αδρυνειας Στοιχειου 3#
> I3 := eval(  $\frac{evalf(\pi)}{4} \left( \left( \left( \frac{D3e}{2} \right) + t \right)^4 - \left( \frac{D3e}{2} \right)^4 \right) \right)$  :
> #Πεπερασμενο Στοιχειο 4#
>
> #Βαθμοι Ελευθεριας Αρχης: 10,11,12
> #Βαθμοι Ελευθεριας Περατος: 13,14,15
>
> #Μηκος Στοιχειου 4#
> L4:= evalf(  $\frac{L}{n}$  ) :
> # Διαμετρος στο Πέρασ του στοιχειου 4#
> Dk1 := Dh1 -  $\frac{(Da1 - Dm1) \cdot L4}{L}$  :
> #Εξωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 4#
> D4x :=  $\frac{(Dh1 - Dk1)}{2} + Dk1$  :
>
> #Εσωτερικη Διαμετρος Διατομης Στοιχειου 4#
> D4e := D4x - 2 t :
>
> #Εμβαδον Κοιλης Κυκλικης Διατομης Στοιχειου 4#
> A4 := evalf(  $\frac{\pi \cdot D4x^2}{4} - \frac{\pi \cdot D4e^2}{4}$  ) :
> #Ογκος Στοιχειου 4#
> V4 := A4 \cdot L4 :
>
> #Ροπη Αδρυνειας Στοιχειου 4#
> I4 := eval(  $\frac{evalf(\pi)}{4} \left( \left( \left( \frac{D4e}{2} \right) + t \right)^4 - \left( \frac{D4e}{2} \right)^4 \right) \right)$  :
>
> #Πεπερασμενο Στοιχειο 5#
>

```

```

> #Βαθμοί Ελευθερίας Αρχής:13,14,15
> #Βαθμοί Ελευθερίας Πέρατος: 16,17,18
>
> #Μήκος Στοιχείου 5#
> L5:= evalf(  $\frac{L}{n}$  ) :
>
> #Εξωτερική Διάμετρος Διατομής Στοιχείου 5#
> D5x:=  $\frac{(Dk1 - Dm1)}{2} + Dm1$  :
>
> #Εσωτερική Διάμετρος Διατομής Στοιχείου 5#
> D5e:= D5x - 2 t :
>
> #Εμβαδόν κοίλης κυκλικής Διατομής Στοιχείου 5#
> A5:= evalf(  $\frac{\pi \cdot D5x^2}{4} - \frac{\pi \cdot D5e^2}{4}$  ) :
>
> #Όγκος Στοιχείου 5#
> V5:= A5 \cdot L5 :
>
> #Ροπή αδράνειας Στοιχείου 5#
> I5:= eval(  $\frac{evalf(\pi)}{4} \left( \left( \left( \frac{D5e}{2} \right) + t \right)^4 - \left( \frac{D5e}{2} \right)^4 \right)$  ) :
>
> # _____ Μητρώα Ακαμψίας στο Καθολικό Σύστημα _____ #
> #Μητρώο Ακαμψίας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 1#
> EA:= E \cdot A1 :
> EI:= E \cdot I1 :
>
> k1bar:= Matrix( 6, 6, [ [ (  $\frac{EA}{L1}$  ), 0, 0, (  $-\frac{EA}{L1}$  ), 0, 0 ], [ 0, (  $\frac{12 \cdot EI}{L1^3}$  ), (  $\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ),
> 0, (  $-\frac{12 \cdot EI}{L1^3}$  ), (  $\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ) ], [ 0, (  $\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ), (  $\frac{4 \cdot EI}{L1}$  ), 0, (  $-\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ), (  $\frac{2 \cdot EI}{L1}$  ) ],
> [ (  $-\frac{EA}{L1}$  ), 0, 0, (  $\frac{EA}{L1}$  ), 0, 0 ], [ 0, (  $-\frac{12 \cdot EI}{L1^3}$  ), (  $-\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ), 0, (  $\frac{12 \cdot EI}{L1^3}$  ), (
>  $-\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ) ], [ 0, (  $\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ), (  $\frac{2 \cdot EI}{L1}$  ), 0, (  $-\frac{6 \cdot EI}{L1^2}$  ), (  $\frac{4 \cdot EI}{L1}$  ) ] ] ] ) :
>
>
> #Μητρώο Ακαμψίας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 2#
> EA:= E \cdot A2 :
> EI:= E \cdot I2 :
>
> k2bar:= Matrix( 6, 6, [ [ (  $\frac{EA}{L2}$  ), 0, 0, (  $-\frac{EA}{L2}$  ), 0, 0 ], [ 0, (  $\frac{12 \cdot EI}{L2^3}$  ), (  $\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ),
> 0, (  $-\frac{12 \cdot EI}{L2^3}$  ), (  $\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ) ], [ 0, (  $\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ), (  $\frac{4 \cdot EI}{L2}$  ), 0, (  $-\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ), (  $\frac{2 \cdot EI}{L2}$  ) ],
> [ (  $-\frac{EA}{L2}$  ), 0, 0, (  $\frac{EA}{L2}$  ), 0, 0 ], [ 0, (  $-\frac{12 \cdot EI}{L2^3}$  ), (  $-\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ), 0, (  $\frac{12 \cdot EI}{L2^3}$  ), (
>  $-\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ) ], [ 0, (  $\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ), (  $\frac{2 \cdot EI}{L2}$  ), 0, (  $-\frac{6 \cdot EI}{L2^2}$  ), (  $\frac{4 \cdot EI}{L2}$  ) ] ] ] ) :
>
>
> #Μητρώο Ακαμψίας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 3#

```

> EA := E·A3 :

> EI := E·I3 :

>

$$k3bar := Matrix \left(6, 6, \left[\left[\left(\frac{EA}{L3} \right), 0, 0, \left(-\frac{EA}{L3} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L3^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), 0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L3^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L3} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L3} \right) \right], \left[\left(-\frac{EA}{L3} \right), 0, 0, \left(\frac{EA}{L3} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L3^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), 0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L3^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L3} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L3^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L3} \right) \right] \right] \right) :$$

> #Μητρώο Ακαμψίας στο καθολικό Σύστημα Στοιχείου 4#

> EA := E·A4 :

> EI := E·I4 :

>

$$k4bar := Matrix \left(6, 6, \left[\left[\left(\frac{EA}{L4} \right), 0, 0, \left(-\frac{EA}{L4} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L4^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), 0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L4^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L4} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L4} \right) \right], \left[\left(-\frac{EA}{L4} \right), 0, 0, \left(\frac{EA}{L4} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L4^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), 0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L4^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L4} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L4^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L4} \right) \right] \right] \right) :$$

>

> #Μητρώο Ακαμψίας στο καθολικό Σύστημα Στοιχείου 5#

> EA := E·A5 :

> EI := E·I5 :

>

$$k5bar := Matrix \left(6, 6, \left[\left[\left(\frac{EA}{L5} \right), 0, 0, \left(-\frac{EA}{L5} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L5^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), 0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L5^3} \right), \left(\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L5} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L5} \right) \right], \left[\left(-\frac{EA}{L5} \right), 0, 0, \left(\frac{EA}{L5} \right), 0, 0 \right], \left[0, \left(-\frac{12 \cdot EI}{L5^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), 0, \left(\frac{12 \cdot EI}{L5^3} \right), \left(-\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right) \right], \left[0, \left(\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), \left(\frac{2 \cdot EI}{L5} \right), 0, \left(-\frac{6 \cdot EI}{L5^2} \right), \left(\frac{4 \cdot EI}{L5} \right) \right] \right] \right) :$$

> # _____ Μητρώα Μάζας στο Καθολικό Σύστημα _____ #

> #Μητρώο Μάζας στο καθολικό Σύστημα Στοιχείου 1#

> m1 := ρ·A1·L1 :

>

$$B := Matrix \left(6, 6, \left[[140, 0, 0, 70, 0, 0], [0, 156, 22 \cdot L1, 0, 54, -13 \cdot L1], [0, 22 \cdot L1, 4 \cdot L1^2, 0, 13 \cdot L1, -3 \cdot L1^2], [70, 0, 0, 140, 0, 0], [0, 54, 13 \cdot L1, 0, 156, -22 \cdot L1], [0, -13 \cdot L1, -3 \cdot L1^2, 0, -22 \cdot L1, 4 \cdot L1^2] \right] \right) :$$

> m1bar := Multiply(c, B) :

>

> #Μητρώο Μάζας στο καθολικό Σύστημα Στοιχείου 2#

> m2 := ρ·A2·L2 :

> c := $\frac{m2}{420}$:

>

$$B := Matrix \left(6, 6, \left[[140, 0, 0, 70, 0, 0], [0, 156, 22 \cdot L2, 0, 54, -13 \cdot L2], [0, 22 \cdot L2, 4 \cdot L2^2, 0, 13 \cdot L2, -3 \cdot L2^2], [70, 0, 0, 140, 0, 0], [0, 54, 13 \cdot L2, 0, 156, -22 \cdot L2], [0, -13 \cdot L2, -3 \cdot L2^2, 0, -22 \cdot L2, 4 \cdot L2^2] \right] \right) :$$

```

> m2bar := Multiply(c, B) :
>
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 3#
> m3 := ρ·A3·L3 :
> c :=  $\frac{m3}{420}$  :
> B := Matrix(6, 6, [[140, 0, 0, 70, 0, 0], [0, 156, 22·L3, 0, 54, -13·L3], [0, 22
·L3, 4·L32, 0, 13·L3, -3·L32], [70, 0, 0, 140, 0, 0], [0, 54, 13·L3, 0, 156,
-22·L3], [0, -13·L3, -3·L32, 0, -22·L3, 4·L32]]) :
>
> m3bar := Multiply(c, B) :
>
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 4#
> m4 := ρ·A4·L4 :
> c :=  $\frac{m4}{420}$  :
> B := Matrix(6, 6, [[140, 0, 0, 70, 0, 0], [0, 156, 22·L4, 0, 54, -13·L4], [0, 22
·L4, 4·L42, 0, 13·L4, -3·L42], [70, 0, 0, 140, 0, 0], [0, 54, 13·L4, 0, 156,
-22·L4], [0, -13·L4, -3·L42, 0, -22·L4, 4·L42]]) :
>
> m4bar := Multiply(c, B) :
>
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχείου 5#
> m5 := ρ·A5·L5 :
> c :=  $\frac{m5}{420}$  :
> B := Matrix(6, 6, [[140, 0, 0, 70, 0, 0], [0, 156, 22·L5, 0, 54, -13·L5], [0, 22
·L5, 4·L52, 0, 13·L5, -3·L52], [70, 0, 0, 140, 0, 0], [0, 54, 13·L5, 0, 156,
-22·L5], [0, -13·L5, -3·L52, 0, -22·L5, 4·L52]]) :
>
> m5bar := Multiply(c, B) :
>
> # _____ Μητρώο Ενταξέως _____ #
>
> a1 := Matrix(6, 18, [[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :
>
> a2 := Matrix(6, 18, [[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :
>
> a3 := Matrix(6, 18, [[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :

```

```
> a4 := Matrix(6, 18, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]]) :
```

```
> a5 := Matrix(6, 18, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]]) :
```

```
> # Διευρυμένα Μητρώα Ακαμψίας #
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Ακαμψίας Στοιχείου 1#
```

```
> k1t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a1), k1bar)), a1) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Ακαμψίας Στοιχείου 2#
```

```
> k2t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a2), k2bar)), a2) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Ακαμψίας Στοιχείου 3#
```

```
> k3t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a3), k3bar)), a3) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Ακαμψίας Στοιχείου 4#
```

```
> k4t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a4), k4bar)), a4) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Ακαμψίας Στοιχείου 5#
```

```
> k5t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a5), k5bar)), a5) :
```

```
> # Διευρυμένα Μητρώα Μάζας #
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 1#
```

```
> m1t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a1), m1bar)), a1) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 2#
```

```
> m2t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a2), m2bar)), a2) :
```

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 3#
```

```
> m3t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a3), m3bar)), a3) :
```

Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 4#
> m4t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a4),
    m4bar)), a4) :
>
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 5#
> m5t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a5),
    m5bar)), a5) :
>
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 5#
> m5t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a5),
    m5bar)), a5) :
>
>
> > # Ολικό Μητρώο Ακαμψίας στο καθολικό Σύστημα #
>
> Ktot := k1t + k2t + k3t + k4t + k5t :
>
> # Ολικό Μητρώο Μάζας στο καθολικό Σύστημα #
>
> Mtot := m1t + m2t + m3t + m4t + m5t :
>
> #Δεσμευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας: 1, 2, 3
> #Ελεύθεροι Βαθμοί Ελευθερίας: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
    17, 18
>
> # Μητρώο Αναδιατάξης #
>
>
V := Matrix(18, 18, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]] :
>
>
> # Αναδιατεταγμένο Μητρώο Ακαμψίας #
>
> Kan := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(V), Ktot)),
    V) :
>
> #Υπομητρώα#
>
> Kff := SubMatrix(Kan, 1..15, 1..15) :
>
```

Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```
> Kfs := SubMatrix(Kan, 1..15, 16..18) :
>
> Ksf := SubMatrix(Kan, 16..18, 1..15) :
>
> Kss := SubMatrix(Kan, 16..18, 16..18) :
>
> >

> # Αναδιατεταγμένο Μητρώο Μάζας #
>
> Man := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(v), Mtot),
>   v) :
>
> # Υπομητρώα#
>
> Mff := SubMatrix(Man, 1..15, 1..15) :
>
> Mfs := SubMatrix(Man, 1..15, 16..18) :
>
> Msf := SubMatrix(Man, 16..18, 1..15) :
>
> Mss := SubMatrix(Man, 13..15, 13..15) :
> # Στατική Συμπληκνωση #
>
> # Μητρώο Αναδιατάξης#
>
>
> v := Matrix(15, 15, [[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0,
>   0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
>   0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
>   0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0,
>   1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
>   0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
>   0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
>   0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0,
>   0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
>   0, 1]]):
>
>
> # Συμπληκνωμένο Μητρώο Ακαμψίας#
>
> Ksum := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(v), Kff),
>   v) :
>
> # Υπομητρώα#
>
> Ktt := SubMatrix(Ksum, 1..10, 1..10) :
>
>
> Ktθ := SubMatrix(Ksum, 1..10, 11..15) :
>
>
> Kθt := SubMatrix(Ksum, 11..15, 1..10) :
>
```



```
> K00:= SubMatrix(Ksum, 11..15, 11..15) :
>
>
> #Συμπυκνωμενο Μητρωο Μάζας#
>
> Msum:= MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(v), MfF)),
> v) :
>
>
> #Υπομητρώα#
>
> Mtt:= SubMatrix(Msum, 1..10, 1..10) :
>
> C:= MatrixMatrixMultiply(Kt0, MatrixMatrixMultiply((MatrixInverse(K00),
> K0t))) :
>
> Kttstar:= Ktt - C :
>
>
> #Εξίσωση κίνησης, μετά τη στατική συμπίκνωση#
>
> # Mstar·u"+Kttstar·u=0
>
> C:= MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(K00), K0t) :
>
> C:= MatrixMatrixMultiply(SubMatrix(Msum, 11..15, 11..15), C) :
>
> C:= MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(K00), C) :
>
> C:= MatrixMatrixMultiply(Kt0, C) :
>
> Mstar:= MatrixAdd(Mtt, C) :
>
> Kstar:= Kttstar :
>
>
> # Ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφες #
>
> e, v:= Eigenvectors(Kstar, Mstar) :
> e :
>
> v :
>
> o1:= 10 : o2:= 9 : o3:= 8 : o4:= 7 : o5:= 6 : o6:= 5 : o7:= 4 : o8:= 3 : o9
> := 2 : o10:= 1 :
>
>
> #Ιδιοσυχνότητες#
> omega1:= Re(sqrt(e[o1]));
```

```

> omega2 := Re(sqrt(e[o2]));
> omega3 := Re(sqrt(e[o3]));
> omega4 := Re(sqrt(e[o7]));
> omega5 := Re(sqrt(e[o4]));
> omega6 := Re(sqrt(e[o5]));
> omega7 := Re(sqrt(e[o6]));
> omega8 := Re(sqrt(e[o8]));
> omega9 := Re(sqrt(e[o9]));
> omega10 := Re(sqrt(e[o10]));

```

$\omega 1 := 4.249840984$
 $\omega 2 := 19.36569506$
 $\omega 3 := 49.64803134$
 $\omega 4 := 72.00965556$
 $\omega 5 := 94.45295112$
 $\omega 6 := 163.5010251$
 $\omega 7 := 194.3710854$
 $\omega 8 := 338.3045965$
 $\omega 9 := 502.9841754$
 $\omega 10 := 644.2118878$

```

>
> #Θεμελιώδης Ιδιοσυχνότητα είναι η ω1#
>
> #Ιδιομορφες#
> # (Πραγματικό μέρος) #
>
> phi1 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o1));

```

$$\phi 1 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0.0355181321637882408 \\ 0. \\ 0.139214742094817434 \\ 0. \\ 0.307759718592276132 \\ 0. \\ 0.528466954870340232 \\ 0. \\ 0.778051637806348894 \end{bmatrix}$$

```

> phi2 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o2));

```

$$\phi 2 := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.137221161123027984 \\ 0. \\ -0.378983655589488544 \\ 0. \\ -0.426897326640428454 \\ 0. \\ -0.0211238925837941502 \\ 0. \\ 0.809230619419111786 \end{bmatrix}$$

```

> phi3 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o3));

```

$$\phi_3 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0.273938986584288890 \\ 0. \\ 0.393782069442637939 \\ 0. \\ -0.171148169846738918 \\ 0. \\ -0.496537486340614066 \\ 0. \\ 0.702888285598289531 \end{bmatrix}$$

> `phi4 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o7));`

$$\phi_4 := \begin{bmatrix} 0.159513008242057274 \\ 0. \\ 0.318466449955450926 \\ 0. \\ 0.457265500697633388 \\ 0. \\ 0.556080519897149794 \\ 0. \\ 0.595665541824436872 \\ 0. \end{bmatrix}$$

> `phi5 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o4));`

$$\phi_5 := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.417367778727603722 \\ 0. \\ -0.0582474493451530309 \\ 0. \\ 0.535181393274866468 \\ 0. \\ -0.577737684358437088 \\ 0. \\ 0.449679237111625606 \end{bmatrix}$$

> `phi6 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o5));`

$$\phi_6 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0.600412907797025497 \\ 0. \\ -0.615109176246818712 \\ 0. \\ 0.435853644730262224 \\ 0. \\ -0.231278296770659336 \\ 0. \\ 0.132992448153607612 \end{bmatrix}$$

> `phi7 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o6));`

$$\phi_7 := \begin{bmatrix} 0.386456511866579700 \\ 0. \\ 0.475222673047286548 \\ 0. \\ 0.141827881841624231 \\ 0. \\ -0.387620802100286154 \\ 0. \\ -0.674128875786489945 \\ 0. \end{bmatrix}$$

> `phi8 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o8));`

$$\phi_8 := \begin{bmatrix} 0.476138865995039740 \\ 0. \\ 1.42906959555744768 \cdot 10^{-10} \\ 0. \\ -0.552758913347963676 \\ 0. \\ -3.10850460897408271 \cdot 10^{-11} \\ 0. \\ 0.683922045267833178 \\ 0. \end{bmatrix}$$

> `phi9 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o9));`

$$\phi_9 := \begin{bmatrix} -0.386456511908713884 \\ 0. \\ 0.475222672975907756 \\ 0. \\ -0.141827881672120071 \\ 0. \\ -0.387620802187713608 \\ 0. \\ 0.674128875798045368 \\ 0. \end{bmatrix}$$

> `phi10 := Re(SubMatrix(v, 1..10, o10));`

$$\phi_{10} := \begin{bmatrix} 0.159513008311067960 \\ 0. \\ -0.318466450063027152 \\ 0. \\ 0.457265500693064652 \\ 0. \\ -0.556080519864919132 \\ 0. \\ 0.595665541782037788 \\ 0. \end{bmatrix}$$

> `A := V1 + V2 + V3 + V4 + V5;`

$$A := 307.4833810$$

A.4 Υπολογιστικός κώδικας για πάσσαλο αιγής-3 εδαφικά στρώματα

```
> restart:
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
> #Εδαφικό Στρώμα 1- Αμμοχαλίκι#
> Es1 := 150000 :
> v1 := 0.35 :
> L1 := 5 :
> #Εδαφικό Στρώμα 2 - Αργίλος CH#
> Es2 := 20000 :
> v2 := 0.20 :
> L2 := 5 :
> #Εδαφικό Στρώμα 3- Μεσοκοκκή Αμμος#
> Es3 := 35000 :
> v3 := 0.35 :
> L3 := 5 :
```

```

>
> δ1 := 1.2 :
> k1 := δ1·Es1 :
> k2 := δ1·Es2 :
> k3 := δ1·Es3 :
> #Μετρο Ελαστικότητας Οπλισμενου Σκυροδεματος#
> Ep := 32000000 :
> #Ακτινα Διατομης Πασσαλου, Εμβαδον·#
> R := 0.40 : A1 := evalf(π·R²) :
> #Υψος Πασσαλου#
> L := 15 :
> #Ροπη Αδρανειας Διατομης Πασσαλου#
> Ip := evalf(π·R⁴/4) :
> λ1 := evalf( (k1 / (4·Ep·Ip))1/4 ) :
> λ2 := evalf( (k2 / (4·Ep·Ip))1/4 ) :
> λ3 := evalf( (k3 / (4·Ep·Ip))1/4 ) :
> Khh1 := 4·Ep·Ip·λ1³ :
> Khh2 := 4·Ep·Ip·λ2³ :
> Khh3 := 4·Ep·Ip·λ3³ :
> R := Matrix(6, 6, [[c, s, 0, 0, 0, 0], [-s, c, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0],
[ 0, 0, 0, c, s, 0], [0, 0, 0, -s, c, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]]):
> δ := 0 :
> #Μητρώο Ακαμψιας Στο Καθολικο Συστημα του Στοιχειου 1#
> α1 := (λ1² + δ)1/2 :
> β1 := (λ1² - δ)1/2 :
> DD := β1² sinh²(α1·L1) - α1² sin²(β1·L1) :
> s00 := Ep·A1 / L1 :
> s11n := 4·α1·β1·λ1²·Ep·Ip / DD · (β1·sinh(α1·L1)·cosh(α1·L1) + α1·sin(β1·L1)·cos(β1·L1)) :
> s12n := 2·λ1²·Ep·Ip / DD (α1² (sin(β1·L1))² + β1² · (sinh(α1·L1))²) :
> s31n := -4·α1·β1·λ1²·Ep·Ip / DD (α1·sin(β1·L1)cosh(α1·L1) + β1·cos(β1·L1)sinh(α1·L1)) :
> s41n := 4·α1·β1·λ1²·Ep·Ip / DD (sin(β1·L1)sinh(α1·L1)) :
> s21n := s12n :
> s22n := 2·α1·β1·Ep·Ip / DD (β1·sinh(α1·L1)·cosh(α1·L1) - α1·sin(β1·L1)·cos(β1·L1)) :
> s32n := -s41n :
> s42n := -2·α1·β1·Ep·Ip / DD (β1·sinh(α1·L1)cos(α1·L1) - α1·sin(β1·L1)·cosh(β1·L1)) :
> s13n := s31n :
> s23n := s32n :
> s33n := s11n :

```

```

> s43n := -s12n :
> s14n := s41n :
> s24n := s42n :
> s34n := s43n :
> s44n := s22n :
>
kspringn1 := Matrix(6, 6, [[s00, 0, 0, -s00, 0, 0], [0, s11n, s12n, 0, s13n,
s14n], [0, s21n, s22n, 0, s23n, s24n], [-s00, 0, 0, s00, 0, 0], [0, s31n,
s32n, 0, s33n, s34n], [0, s41n, s42n, 0, s43n, s44n]]):
>
ID := Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]]):
>
c := 0 : s := 1 :
>
k11 := MatrixMatrixMultiply(ID, kspringn1):
>
K11 := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(R), k11)), R):
>
a1 := Matrix(6, 12, [[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0]]):
>
>
k1t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a1), K11)), a1):
>
>
#Μητρώο Ακαμψιας Στο καθολικο Συστημα του Στοιχειου 2#
>
α2 := (λ22 + δ)1/2 :
>
β2 := (λ22 - δ)1/2 :
>
DD := β22 sinh2(α2·L2) - α22 sin2(β2·L2) :
>
s00 :=  $\frac{E_p \cdot A1}{L2}$  :
>
s11n :=  $\frac{4 \cdot \alpha2 \cdot \beta2 \cdot \lambda2^2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} \cdot (\beta2 \cdot \sinh(\alpha2 \cdot L2) \cdot \cosh(\alpha2 \cdot L2) + \alpha2 \cdot \sin(\beta2 \cdot L2) \cdot \cos(\beta2 \cdot L2))$  :
>
s12n :=  $\frac{2 \cdot \lambda2^2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} (\alpha2^2 (\sin(\beta2 \cdot L2))^2 + \beta2^2 \cdot (\sinh(\alpha2 \cdot L2))^2)$  :
>
s31n :=  $-\frac{4 \cdot \alpha2 \cdot \beta2 \cdot \lambda2^2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} (\alpha2 \cdot \sin(\beta2 \cdot L2) \cosh(\alpha2 \cdot L2) + \beta2 \cdot \cos(\beta2 \cdot L2) \sinh(\alpha2 \cdot L2))$  :
>
s41n :=  $\frac{4 \cdot \alpha2 \cdot \beta2 \cdot \lambda2^2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} (\sin(\beta2 \cdot L2) \sinh(\alpha2 \cdot L2))$  :
>
s21n := s12n :
>
s22n :=  $\frac{2 \cdot \alpha2 \cdot \beta2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} (\beta2 \cdot \sinh(\alpha2 \cdot L2) \cdot \cosh(\alpha2 \cdot L2) - \alpha2 \cdot \sin(\beta2 \cdot L2) \cdot \cos(\beta2 \cdot L2))$  :
>
s32n := -s41n :
>
s42n :=  $-\frac{2 \cdot \alpha2 \cdot \beta2 \cdot E_p \cdot I_p}{DD} (\beta2 \cdot \sinh(\alpha2 \cdot L2) \cos(\alpha2 \cdot L2) - \alpha2 \cdot \sin(\beta2 \cdot L2) \cdot \cosh(\beta2 \cdot L2))$  :
>
s13n := s31n :
>
s23n := s32n :
>
s33n := s11n :
>
s43n := -s12n :
>
s14n := s41n :
>
s24n := s42n :
>
s34n := s43n :
>
s44n := s22n :

```

Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```

> kspringn2:=Matrix(6, 6, [[s00, 0, 0, -s00, 0, 0], [0, s11n, s12n, 0, s13n,
    s14n], [0, s21n, s22n, 0, s23n, s24n], [-s00, 0, 0, s00, 0, 0], [0, s31n,
    s32n, 0, s33n, s34n], [0, s41n, s42n, 0, s43n, s44n]]):

> ID:=Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0,
    0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]]):

> c:=0: s:=1:

> k22:=MatrixMatrixMultiply(ID, kspringn2):

>

> K22:=MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(R), k22)), R):

> a2:=Matrix(6, 12, [[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
    0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
    0, 0]]):

> k2t:=MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a2), K22)), a2):

>

> #Μητρώο Ακαμψιας Στο καθολικό Σύστημα του Στοιχείου 3#

> α3:=(λ32 + δ)1/2:

> β3:=(λ32 - δ)1/2:

> DD:=β32sinh2(α3·L3) - α32sin2(β3·L3):

> s00:= $\frac{E_P \cdot A1}{L3}$ :

> s11n:= $\frac{4 \cdot \alpha3 \cdot \beta3 \cdot \lambda3^2 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} \cdot (\beta3 \cdot \sinh(\alpha3 \cdot L3) \cdot \cosh(\alpha3 \cdot L3) + \alpha3 \cdot \sin(\beta3 \cdot L3) \cdot \cos(\beta3 \cdot L3))$ :

> s12n:= $\frac{2 \cdot \lambda3^2 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} (\alpha3^2 \cdot (\sin(\beta3 \cdot L3))^2 + \beta3^2 \cdot (\sinh(\alpha3 \cdot L3))^2)$ :

> s31n:=- $\frac{4 \cdot \alpha3 \cdot \beta3 \cdot \lambda3^2 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} (\alpha3 \cdot \sin(\beta3 \cdot L3) \cosh(\alpha3 \cdot L3) + \beta3 \cdot \cos(\beta3 \cdot L3) \sinh(\alpha3 \cdot L3))$ :

> s41n:= $\frac{4 \cdot \alpha3 \cdot \beta3 \cdot \lambda3^2 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} (\sin(\beta3 \cdot L3) \sinh(\alpha3 \cdot L3))$ :

> s21n:=s12n:

> s22n:= $\frac{2 \cdot \alpha3 \cdot \beta3 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} (\beta3 \cdot \sinh(\alpha3 \cdot L3) \cdot \cosh(\alpha3 \cdot L3) - \alpha3 \cdot \sin(\beta3 \cdot L3) \cdot \cos(\beta3 \cdot L3))$ :

> s32n:=-s41n:

> s42n:=- $\frac{2 \cdot \alpha3 \cdot \beta3 \cdot E_P \cdot I_P}{DD} (\beta3 \cdot \sinh(\alpha3 \cdot L3) \cos(\alpha3 \cdot L3) - \alpha3 \cdot \sin(\beta3 \cdot L3) \cdot \cosh(\beta3 \cdot L3))$ :

> s13n:=s31n:

> s23n:=s32n:

> s33n:=s11n:

> s43n:=-s12n:

> s14n:=s41n:

> s24n:=s42n:

> s34n:=s43n:

> s44n:=s22n:

> kspringn3:=Matrix(6, 6, [[s00, 0, 0, -s00, 0, 0], [0, s11n, s12n, 0, s13n,
    s14n], [0, s21n, s22n, 0, s23n, s24n], [-s00, 0, 0, s00, 0, 0], [0, s31n,
    s32n, 0, s33n, s34n], [0, s41n, s42n, 0, s43n, s44n]]):

> ID:=Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0,
    0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]]):

> c:=0: s:=1:

```

Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```
> k33 := MatrixMatrixMultiply(ID, kspring3) :
>
> K33 := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(R), k33)), R) :
>
> a3 := Matrix(6, 12, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
0, 1]]) :
>
> k3t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a3), K33)), a3) :
>
>
>
>
> c := 0 : s := 1 :
> #Ειδικό Βαρος Σκυροδεματος#
> gs := 25 :
> #Επιταχυνση Βαρυτητας#
> g := 9.81 :
> #Πυκνοτητα Σκυροδεματος#
> ρ :=  $\frac{gs}{g}$  :
> #
> Μητρωα Μάζας στο Καθολικο Σύστημα #
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχειου 1#
>
> m1 := ρ·A1·L1 :
> c :=  $\frac{m1}{2}$  :
>
> B := Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :
>
> M1 := Multiply(c, B) :
>
>
>
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχειου 2#
>
>
> m2 := ρ·A1·L2 :
> C :=  $\frac{m2}{2}$  :
>
> B := Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :
>
> M2 := Multiply(c, B) :
>
>
>
> #Μητρώο Μάζας στο Καθολικό Σύστημα Στοιχειου 3#
>
>
> m3 := ρ·A1·L3 :
> C :=  $\frac{m3}{2}$  :
>
> B := Matrix(6, 6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0,
0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0]]) :
>
> M3 := Multiply(c, B) :
>
>
>
```


Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```
>
> # Διευρυμένα Μητρώα Μάζας #
>
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 1#
> m1t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a1), M1)), a1):
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 2#
> m2t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a2), M2)), a2):
> #Διευρυμένο Μητρώο Μάζας Στοιχείου 3#
> m3t := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(a3), M3)), a3):
> # Ολικό Μητρώο Ακαμψίας στο Καθολικό Σύστημα #
> Ktot := k1t + k2t + k3t:
> Mtot := m1t + m2t + m3t:
> #Δεσμευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας: 1, 2, 3
> #Ελεύθεροι Βαθμοί Ελευθερίας: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
>
> # Μητρώο Αναδιατάξης #
>
>
> V := Matrix(12, 12, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
> 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
> 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
> 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
> 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
> 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]])):
>
> # Αναδιατεταγμένο Μητρώο Ακαμψίας #
>
> Kan := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(V), Ktot)), V):
> #Υπομητρώα#
>
> Kff := SubMatrix(Kan, 1..9, 1..9):
> Kfs := SubMatrix(Kan, 1..9, 10..12):
> Ksf := SubMatrix(Kan, 10..12, 1..9):
> Kss := SubMatrix(Kan, 10..12, 10..12):
> # Αναδιατεταγμένο Μητρώο Μάζας #
>
> Man := MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(V), Mtot)), V):
> #Υπομητρώα#
>
> Mff := SubMatrix(Man, 1..9, 1..9):
> Mfs := SubMatrix(Man, 1..9, 10..12):
> Msf := SubMatrix(Man, 10..12, 1..9):
> Mss := SubMatrix(Man, 10..12, 10..12):
>
>
> # Στατική Συνομπληκνωση #
>
> #Μητρώο Αναδιατάξης#
>
```

Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Κατανεμημένη Μάζα και Ακαμψία

```
> V:=Matrix(9,9,[[1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,1,0]]):
> #Συμπληκνωμενο Μητρωο Ακαμψιας#
>
> Ksum:=MatrixMatrixMultiply(MatrixMatrixMultiply(Transpose(V),Kff),V):
> #Υπομητρωα#
> Ktt:=SubMatrix(Ksum,1..6,1..6):
> Ktθ:=SubMatrix(Ksum,1..6,7..9):
> Kθt:=SubMatrix(Ksum,7..9,1..6):
> Kθθ:=SubMatrix(Ksum,7..9,7..9):
>
>
> #Συμπληκνωμενο Μητρωο Μάζας#
>
> Msum:=MatrixMatrixMultiply((MatrixMatrixMultiply(Transpose(V),Mff),V):
> #Υπομητρωα#
>
> Mtt:=SubMatrix(Msum,1..6,1..6):
>
> C:=MatrixMatrixMultiply(Ktθ,MatrixMatrixMultiply((MatrixInverse(Kθθ),
Kθt))):
>
>
> Kttstar:=Ktt-C:
> #Εξίσωση κίνησης, μετά τη στατική συμπύκνωση#
>
> # Mstar·u"+Kttstar·u=0
>
> C:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(Kθθ),Kθt):
>
> C:=MatrixMatrixMultiply(SubMatrix(Msum,7..9,7..9),C):
> C:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(Kθθ),C):
> C:=MatrixMatrixMultiply(Ktθ,C):
>
> Mstar:=MatrixAdd(Mtt,C):
>
> Kstar:=Kttstar:
>
>
> # Ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφες #
>
> e,v:=Eigenvectors(Kstar,Mstar):
>
>
>
> e:
> v:
```

```

>
> o1:= 3 : o2:= 2 : o3:= 1 : o4:= 5 : o5:= 4 : o6:= 6 :
>
> #Ιδιοσυχνότητες#
> omega1 := Re(sqrt(e[o2]));
omega1 := 133.2791010

> omega2 := Re(sqrt(e[o1]));
omega2 := 167.2602613

> omega3 := Re(sqrt(e[o3]));
omega3 := 256.7952238

> omega4 := Re(sqrt(e[o4]));
omega4 := 366.8560710

> omega5 := Re(sqrt(e[o5]));
omega5 := 1002.269425

> omega6 := Re(sqrt(e[o6]));
omega6 := 1369.125496

>
> #Θεμελιώδης Ιδιοσυχνότητα είναι η ω1#
> #Ιδιομορφες#
> # (Πραγματικό μέρος) #
>
> phi1 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o2));
phi1 :=
[
0.0703728281404814582
0.
0.172126069811209315
0.
-0.982558029406333411
0.
]

> phi2 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o1));
phi2 :=
[
0.283511721029889585
0.
0.891631983408989970
0.
0.353006388328625576
0.
]

> phi3 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o3));
phi3 :=
[
0.950969982454942575
0.
-0.307984388020823842
0.
0.0283144698888228783
0.
]

> phi4 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o4));
phi4 :=
[
0.
-0.353553390593273786
0.
-0.612372435695794248
0.
-0.707106781186547684
]

> phi5 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o5));

```

$$\phi^5 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0.707106781186547906 \\ 0. \\ 6.66133814775093924 \cdot 10^{-16} \\ 0. \\ -0.707106781186547128 \end{bmatrix}$$

> phi6 := Re(SubMatrix(v, 1..6, o6));

$$\phi^6 := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.353553390593275230 \\ 0. \\ 0.612372435695794914 \\ 0. \\ -0.707106781186546462 \end{bmatrix}$$

> T := evalf($\frac{2 \cdot \pi}{\text{omega1}}$);

T := 0.04714306490