ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΙΣ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΚΑΡΛΟΣ ΠΕΣΤΙΜΑΛΤΖΙΑΝ
ΥΠΟ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΧΡΗΣΤΟΥ ΚΑΡΑΙΣΚΟΥ

ΦΩΤΟ :Οι πέντε Βούδες του στοχασμού

Πρόλογος

Στις τηλεπικοινωνίες η μετάδοση μιας πληροφορίας δεν είναι ποτέ ιδανική. Το σήμα που εκπέμπεται ή αποστέλλεται δεν είναι δυνατόν να φτάσει στον προορισμό του αναλλοίωτο. Σε κάθε περίπτωση το σήμα που λαμβάνουμε θα έχει μια διαφορετική μορφή και μέσα από αυτό εμείς θα πρέπει να αναπαράγουμε την πληροφορία που εκπέμφθηκε.

Σε αυτό συντελούν δύο βασικοί παράγοντες. Ο πρώτος είναι ότι τα κυκλώματα δεν είναι γραμμικά και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραμόρφωση της πληροφορίας και ο δεύτερος και πιο καθοριστικός είναι ο θόρυβος. Οι μη γραμμικότητες αποτελούν πρόβλημα νομοτελειακό και μπορούν να προβλεφθούν και να αντιμετωπιστούν κατά την σχεδίαση των συστημάτων μετάδοσης. Ως εκ τούτου είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε ένα κύκλωμα και να το λειτουργούμε στην γραμμική του περιοχή. Παρόλα αυτά το ερώτημα που τίθεται είναι πώς θα αντιμετωπίσουμε τον θόρυβο.

Ο θόρυβος έχει ένα κοινό χαρακτηριστικό με την πληροφορία στις τηλεπικοινωνίες και αυτό είναι η τυχαιότητα. Αναφορικά με την τυχαιότητα είναι ότι αφενός δεν γνωρίζουμε από πού θα υπάρξει μια παρεμβολή στην μετάδοση και αφετέρου τι σήμα θα μας στείλουν. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να **εκτιμήσουμε** τι θα λάβουμε και σε αυτό μας βοηθά η πιθανοθεωρία και οι στοχαστικές ανελίξεις

Οι στοχαστικές ανελίξεις αποτελούν μαθηματικά μοντέλα που αναπαριστούν τον θόρυβο και την πληροφορία και μας βοηθούν στην μελέτη και τον σχεδιασμό τον συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Για την ανάλυση των στοχαστικών ανελίξεων θα πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε τις έννοιες της πιθανότητας, της τυχαίας μεταβλητής , των συναρτήσεων κατανομής πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής κατανομής. Σε αυτές θα αναφερθούμε κατά την εισαγωγή και θα ορίσουμε και κάποια μεγέθη χρήσιμα στην στατιστική ανάλυση όπως πχ. την μέση τιμή. Θα περιγράψουμε την κανονική κατανομή η οποία αναφέρεται και ως Gaussian κατανομή και αποτελεί την βασικότερη κατανομή στης τηλεπικοινωνίες και στην επιστήμη γενικότερα , δεδομένου ότι αποτελεί την κατανομή στην οποία καταλήγουμε μέσο του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Και τέλος περιγράφουμε τις στοχαστικές ανελίξεις που αποτελούν μαθηματικές εκφράσεις ικανές να αναπαραστήσουν μοντέλα θορύβου ή πληροφορίας. επίσης αναφέρουμε κάποιες εφαρμογές με φίλτρα με τα οποία επεξεργαζόμαστε τις στοχαστικές ανελίξεις.

Πιθανότητα

Αν αρχίσουμε να εκτελούμε ένα πείραμα και καταγράψουμε τα αποτελέσματα που εξάγονται για κάθε μία εκτέλεση του πειράματος το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων που έχουμε καταγράψει ονομάζεται δειγματικός χώρος. Πείραμα μπορούμε να αποκαλέσουμε και την ρήψη μιας ζαριάς ή το τράβηγμα ενός χαρτιού από μία τράπουλα , σε αυτές τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα που αναμένουμε είναι συγκεκριμένα , η ζαριά θα μας δώσει έναν αριθμό από τους έξι και η τράπουλα ένα χαρτί από τα 52 με συγκεκριμένο χρώμα και φιγούρα. Άρα το ζάρι έχει δειγματικό χώρο με έξι αποτελέσματα και η τράπουλα με 52, Κάθε ένα από τα αποτελέσματα ονομάζεται σημείο του δειγματικού χώρου ή ενδεχόμενο και τα αποτελέσματα αυτά θεωρούμε ότι είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, δηλαδή δεν μπορούν να εμφανιστούν ταυτόχρονα.

Τα σημεία ενός δειγματικού χώρου που έχουν κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό μπορούν να αποτελέσουν μέρη ενός γεγονότος. Γεγονός μπορώ να ορίσω το κάθε αποτέλεσμα που μπορώ να περιμένω από το πείραμα πχ. στην τράπουλα «να βγάλω φιγούρα» είναι ένα γεγονός και το πραγματοποιούν τα χαρτιά που δεν έχουν αριθμό αλλά τα γράμματα (K,Q,J).Βεβαίως κάθε ένα σημείο μπορεί να αποτελεί και από μόνο του ένα γεγονός.

Ορισμός: Πιθανότητα σημείου ενός δειγματικού χώρου ονομάζουμε την αναλογία εμφάνισης του σημείου (αποτελέσματος) σε μια ορισμένη σειρά πειραμάτων.
Ή με τον κλασσικό ορισμό ο λόγος

$$P(A) = \frac{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \epsilon\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu\ \alpha\pi o\tau\epsilon\lambda\epsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ \epsilon\nu\delta\epsilon\chi\acute{o}\mu\epsilon\nu o\ \mathrm{A}}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\ \alpha\pi o\tau\epsilon\lambda\epsilon\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu}$$

μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου Α.

Νόμος πρόσθεσης πιθανοτήτων

Η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των σημείων που το αποτελούν.

Νόμος του πολλαπλασιασμού

Δύο γεγονότα τα ονομάζουμε στατιστικά ή στοχαστικά ανεξάρτητα αν η πιθανότητα να εμφανιστούν και τα δύο είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων να συμβεί το καθένα ξεχωριστά.

Πχ Πραγματοποιούμε ένα πείραμα με την χρήση ενός ζαριού. Κάνουμε ρίψεις και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι τα (1,2,3,4,5,6) και περιέχει όλα τα αποτελέσματα που μπορώ να πάρω από μία ζαριά. Συμφώνα με τον ορισμό η πιθανότητα κάθε σημείου είναι ίση με 1/6. Με βάση αυτά τα ενδεχόμενα, θα μπορούσα να ορίσω μια σειρά από γεγονότα όπως πχ «ζαριά με ζυγό αποτέλεσμα» ή «ζαριά μικρότερη του 3». Τα σημεία που περιλαμβάνονται στο πρώτο γεγονός είναι τα (2,4,6) και έχουν πιθανότητα να συμβούν το κάθε ένα 1/6 οπότε η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος σύμφωνα με τον νόμο της πρόσθεσης είναι 1/6+1/6+1/6=3/6. Τα αποτελέσματα που περιλαμβάνονται στο δεύτερο γεγονός είναι το 1 και το 2 και του δίνουν στο γεγονός πιθανότητα εμφάνισης 2/6.

Πχ. Πραγματοποιώ το παραπάνω πείραμα με την χρήση δυο ζαριών. Ρίχνω και καταγράφω. Ο νέος δειγματικός χώρος έχει τώρα περισσότερα σημεία και είναι τα παρακάτω [(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5) (3,6) (4,1)(4,2)............... (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)]. Σύνολο 36 πιθανά αποτελέσματα. Από όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορών να επιλέξω και να ορίσω ένα γεγονός πχ. «και τα δυο ζάρια να φέρουν ΄3΄». Οπότε σε αυτό το πείραμα ρίχνοντας τη ζαριά η πιθανότητα να φέρουν και τα δύο 3 είναι 1/36.

Αναλύοντας τα παραπάνω, στην θεωρία πιθανοτήτων βάση του νόμου του πολλαπλασιασμού, τα δύο ζάρια αποτελούν ανεξάρτητα γεγονότα (δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του ενός, το αποτέλεσμα του άλλου) οπότε και η πιθανότητα να φέρουν και τα δύο 3 βγαίνει από το γινόμενο 1/6 *1/6 =1/36

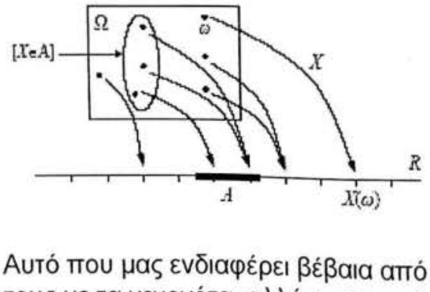
Τυχαίες μεταβλητές

Σε ένα πείραμα ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές. Ορίζουμε δύο μεταβλητές, την Χ1 στην οποία τοποθετούμε το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και την Χ2 με το αποτέλεσμα της δεύτερης. Ορίζουμε επίσης και την Χ3=Χ1+Χ2 που θα περιέχει το άθροισμα τον δυο ρίψεων .Σε αυτό το πείραμα τα αποτελέσματα είναι αριθμοί και αν επιθυμούσαμε να τα καταγράψουμε απλά θα τα καταχωρούσαμε στις μεταβλητές. Σε ένα άλλο πείραμα αν αντί για ζάρια χρησιμοποιούσαμε μια τράπουλα, από την οποία θα τραβούσαμε δυο χαρτιά και παρατηρούσαμε το χρώμα. Πλέον θα είχαμε ένα μη αριθμητικό γεγονός με δειγματικό χώρο τα(καρό ,σπαθί ,μπαστούνι και κούπα). Για να τα καταγράψουμε σε αυτή την περίπτωση θα φτιάχναμε μια μεταβλητή Τ(χρώμα) η τιμή της οποίας θα οριζότανε από εμάς και θα καθόριζε το χρώμα έτσι θα μπορούσαμε να είχαμε Τ(καρό)=1,Τ(σπαθί)=2, Τ(μπαστούνι)=3,Τ(κούπα)=4.

Οι παραπάνω ποσότητες Χ1,Χ2,Χ3,Τ(χρώμα) ονομάζονται τυχαίες μεταβλητές. Τυχαία μεταβλητή καλείται μία μεταβλητή η τιμή της οποίας καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου πειράματος. Και αποτελούν μια αντιστοίχηση των πειραματικών δεδομένων στο επίπεδο R.

Ορισμός. Κάθε απεικόνιση Χ από το δειγματικό χώρο Ω (σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης) σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών R θα καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.).

Αν Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος, τότε η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Χ καθορίζεται από το ενδεχόμενο $\omega \in \Omega$ που πραγματοποιήθηκε, δηλ. Χ = Χ(ω). ‘Οπου η Χ λαμβάνει τιμές από το σύνολο του R.



Αυτό που μας ενδιαφέρει βέβαια από τις τυχαίες μεταβλητές δεν είναι κατά βάση η αντιστοίχιση τους με τα γεγονότα, αλλά η αντιστοίχηση τους με κάποια συγκεκριμένη πιθανότητα ή ακριβέστερα η αντιστοίχηση (μέσω των τυχαίων μεταβλητών) της πιθανότητας στο κάθε γεγονός. Η πιθανότητα μιας τυχαίας μεταβλητής (χ) περιγράφεται $P(x)$.

Οι τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε διακριτές, συνεχείς και μικτές.

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Εάν η μεταβλητή Χ παίρνει τιμές $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ εφόσον πραγματοποιηθεί ένα από τα γεγονότα $E_1, E_2, E_3, ...E_n$ που αποκλείονται αμοιβαία με αντίστοιχες πιθανότητες $P(\chi_i), P(\chi_2), P(\chi_3), ..., P(\chi_n)$, αυτή την αποκαλούμε διακριτή. Η διαφορετικά διακριτές καλούνται οι τυχαίες μεταβλητές που έχουν πεδίο τιμών κάποιο υποσύνολο του Ζ ή του Ν ή γενικότερα έχουν αριθμήσιμο πεδίο τιμών

Για αυτές ισχύει $P(\chi_i) > 0$ για κάθε i

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$$

Δηλαδη η πιθανότητα μιας ΤΧ είναι πάντα θετικός αριθμός και ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων των ΤΧ (των γεγονότων ενός πειράματος) είναι ίση με την μονάδα

.

Έχοντας λοιπόν μια μεταβλητή Χ η έκφραση (Χ=χ) μας ορίζει ένα γεγονός και σε αυτό το γεγονός προσδιορίζουμε μια πιθανότητα $P(X = x)$. Και αυτό που εξετάζουμε είναι η συναρτησιακή σχέση της πιθανότητας με το γεγονός $F_x(x)$ την οποία ονομάζουμε κατανομή της πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής ή συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας ορίζετε σαν μια συνάρτηση που διαιρεί το σύνολο των τιμών της Χ σε δύο μέρη. Σε μια ομάδα που είναι μεγαλύτερη του x και σε μια ομάδα που είναι μικρότερη ή ίση του x . Η πιθανότητα η Χ να πάρει μια τιμή μικρότερη ή ίση με την x συμβολίζεται με

$F_x(x) = P(X \le x)$ για όλα τα χ.

Και έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$0 \le F_x \le 1$$

$$F_x(x_1) \le F_x(x_2) \quad για\ \chi_1 < \chi_2$$

$$\lim_{x \to \infty} F_\chi(x) = F_x(\infty) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_\chi(x) = F_x(-\infty) = 0$$

$$\lim_{x \to a^+} F_\chi(x) = F_x(a^+) = F_x(a) \quad a^+ = \lim_{0<\varepsilon \to 0} \alpha + \varepsilon$$

Παράδειγμα :

Ας υποθέσουμε ένα πείραμα με δύο ζάρια. Ορίζουμε τυχαία μεταβλητή Χ το άθροισμα των δύο ζαριών που πετύχαμε. Πια είναι η πιθανότητα το Χ πάρει τιμές μεταξύ 5 και 7 και πια είναι η πιθανότητα το Χ να είναι μεγαλύτερο του 6.

Λύση:

Εδώ θα δανειστούμε τον δειγματικό χώρο του παραπάνω παραδείγματος
[(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)
(4,1)(4,2)............... (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)]

Θα πρέπει πρώτα να βρούμε τις πιθανότητες σε κάθε αποτέλεσμα, που έχουν ως εξής

$$P(x=1)=0,\ P(x=2)=\frac{1}{36},\ P(x=3)=\frac{2}{36},\ P(x=4)=\frac{3}{36},$$

$$P(x=5)=\frac{4}{36},\ P(x=6)=\frac{5}{36},\ P(x=7)=\frac{6}{36},\ P(x=8)=\frac{5}{36},$$

$$P(x=9)=\frac{4}{36},\ P(x=10)=\frac{3}{36},\ P(x=11)=\frac{2}{36},\ P(x=12)=\frac{1}{36}$$

Εφόσον τα αποτελέσματα είναι στατιστικά ανεξάρτητα η πιθανότητα

$$P(5\le X\le 7)=P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=0,416$$

Αντίστοιχα $P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-[P(X=2)+P(x=3)]=1-\frac{1}{36}-\frac{2}{36}=0,916$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνεχείς ονομάζονται οι τυχαίες μεταβλητές που έχουν ως πεδίο τιμών ένα διάστημα του R ή όλο το R ενώ επιπλέον έχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις κατανομής.

Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές η συνάρτηση κατανομής ορίζετε ως

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

Όπου η f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Χ με την οποία ένα ενδεχόμενο $(a\le x\le \delta)$ εκφράζεται με το εμβαδόν το οποίο περιλαμβάνεται μεταξύ του άξονα χ , της καμπύλης $y=f(x)$ και των τεταγμένων στα σημεία α και δ.

Και αντίστοιχα για την f_X ισχύουν τα :

$f_X(x)\ge 0$ για όλα τα χ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$$

$$P(a\le x\le b)=\int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

Παράδειγμα :
1. Να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε η παρακάτω συνάρτηση να αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x)=\begin{cases} cx, & 0<x<4 \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \acute{\alpha}\lambda\lambda o \end{cases}$$

2.να υπολογιστεί η P(1<X<2)

3.να βρεθεί συνάντηση αθροιστικής πιθανότητας

Λύση:

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$$

$$\int_0^4 cxdx=1 \Rightarrow c\int_0^4 xdx=c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=c8=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{8}$$

άρα

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}x, & 0<x<4 \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \acute{\alpha}\lambda\lambda o \end{cases}$$

2)

$$P(1<x<2)=\int_1^2 \frac{1}{8}x\,dx=\frac{1}{8}\int_1^2 x\,dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{8}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]=0{,}1875$$

3)

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du=$$

$$\int_0^x \frac{1}{8}u\,du=\frac{1}{8}\int_0^x u\,du=\frac{1}{8}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]=\frac{x^2}{16}$$

Οπότε η ΣΑΠ είναι $F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{16} & 0\le x<4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$

Για επαλήθευση θα βρούμε την $P(1<x<2)$ από την ΣΑΠ

$$P(1\le X\le 2)=P(X\le 2)-P(X\le 1)=\frac{2^2}{16}-\frac{1^2}{16}=\frac{3}{16}=0{,}1875$$

Επίσης η ΣΠΠ υπολογίζεται και από τις σχέσεις που την συνδέουν με την συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_X(x) - F_X(-\infty) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{16}\right] = \frac{1}{16}(x^2)' = \frac{2}{16}x = \frac{1}{8}x$$

$$P(x \le X \le x + \Delta x) = P(X \le x + \Delta x) - P(X \le x) = F_x(x + \Delta x) - F_x(x)$$

Στατιστικές παράμετροι

Μέση τιμή

Μια από τις βασικότερες έννοιες στην θεωρία πιθανοτήτων είναι αυτή της Μέσης τιμής ή αναμενομένης τιμής (mean value, expected value).
Η μέση τιμή αποτελεί μια από τις στατιστικές παραμέτρους που σκοπό έχουν να αντιπροσωπεύουν έναν πληθυσμό (μετρήσεων) με τον πιο εύκολο και σύντομο τρόπο. Και περιγράφουν τη θέση, τη διασπορά και τη μορφολογία του πληθυσμού.

Με την μέση τιμή ορίζεται μια θέση γύρω από την οποία κατανέμεται ένα πλήθος παρατηρήσεων. Και η μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής συμβολίζεται με E[X] ή m_x και υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο.

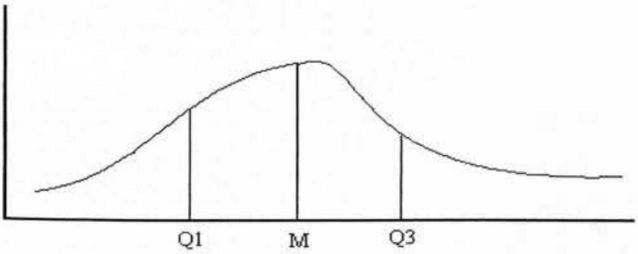
$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

Μέτρα διασποράς

Η διασπορά αποτελεί την παράμετρο που μας πληροφορεί αν οι τιμές της μεταβλητής είναι συγκεντρωμένες ή διασκορπισμένες γύρω από την μέση τιμή.
Ακριβέστερα, η διασπορά μιας μεταβλητής περιγράφεται με ένα πλήθος άλλων παραμέτρων που αποκαλούμε μέτρα διασποράς και είναι το εύρος μεταβολής ,το ημιενδοτεταρτομοριακό εύρος, μέση απόκλιση, τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητότητας.

Α) το εύρος μεταβολής μας δίνει την διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη τιμή.

Β)Το ημιενδοτεταρτομοριακό εύρος ορίζεται ως το ημιάθροισμα της διαφοράς μεταξύ τρίτου και πρώτου τεταρτημόριου $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$



Όσο μικρότερη είναι η τιμή του Q τόσο μεγαλύτερη είναι και η συγκέντρωση των τιμών της μεταβλητής.

Γ) Η <u>μέση απόκλιση</u> ορίζεται ως ο μέσος όρος όλων των διαφορών των τιμών μίας μεταβλητής από τον μέσο όρο της μεταβλητής.

$$M_{\alpha\pi} = \frac{\sum |x_i - \mu|}{N}$$

Παράδειγμα: Παίρνουμε τις εξής μετρήσεις 2,5,6,8,15,17
Ο μέσος όρος είναι

$$\mu = \frac{2+5+6+8+15+18}{6} = 9$$

Η μέση απόκλιση

$$M_{\alpha\pi} = \frac{|2-9|+|5-9|+|6-9|+|8-9|+|15-9|+|18-9|}{6} = 5$$

Για να αποφύγουμε τις περιπτώσεις αρνητικών αποτελεσμάτων μπορούμε να υψώσουμε τις διαφορές στο τετράγωνο οπότε και ορίζουμε ένα νέο μέτρο της διασποράς το οποίο ονομάζεται
Δ) <u>Διακύμανση</u> ή <u>διασπορά</u> : είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων από την μέση τιμή

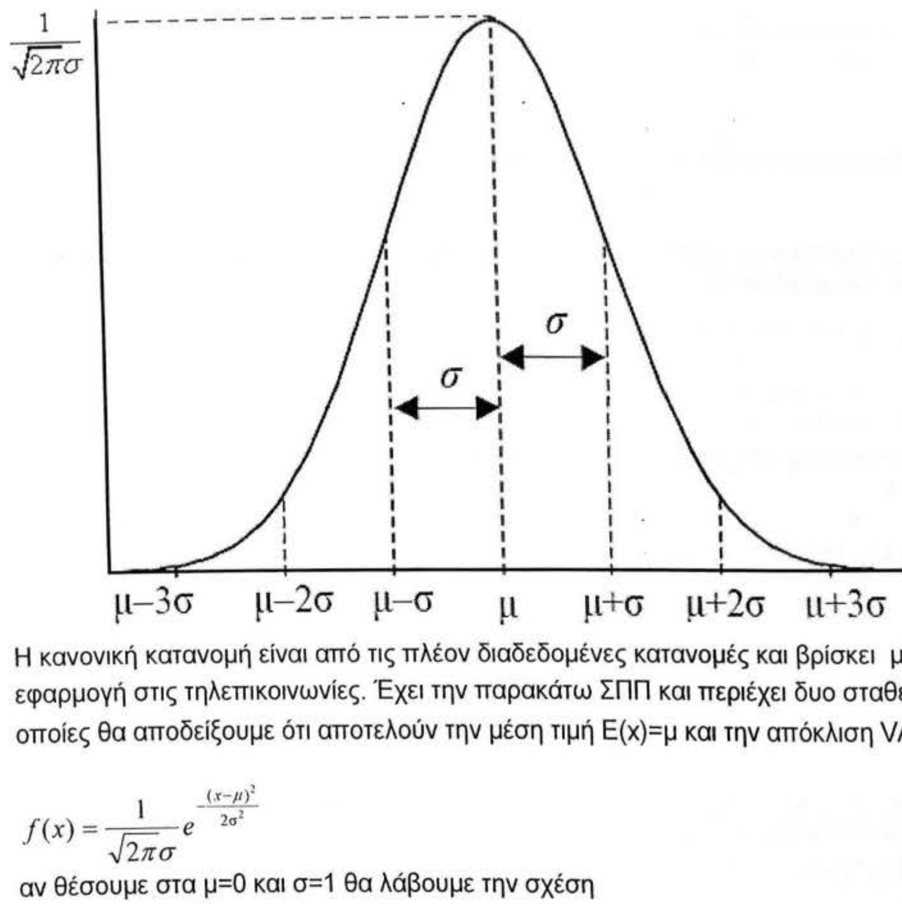
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

Ε) η <u>τυπική απόκλιση</u> $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Και τέλος
ΣΤ) ο <u>συντελεστής μεταβλητότητας</u>: είναι το πηλίκο της τυπικής απόκλισης μίας κατανομής προς τον μέσο όρο αυτής και εκφράζει την τυπική απόκλιση σαν ποσοστό επί της εκατό του μέσου όρου .

$$\Sigma_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{\sigma}{\mu}100$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS



Η κανονική κατανομή είναι από τις πλέον διαδεδομένες κατανομές και βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στις τηλεπικοινωνίες. Έχει την παρακάτω ΣΠΠ και περιέχει δυο σταθερές μ και σ^2, οι οποίες θα αποδείξουμε ότι αποτελούν την μέση τιμή Ε(x)=μ και την απόκλιση VAR(x)= σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

αν θέσουμε στα μ=0 και σ=1 θα λάβουμε την σχέση

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ την οποία ονομάζουμε και τυπική.

Για να αποτελεί η $f(x)$ συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει

$f(x)$>0 και το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

Ο πρώτος όρος ισχύει, το ολοκλήρωμα παραμένει πάντα θετικό, για όλες τις τιμές του χ. Ο δεύτερος θα αποδειχθεί ακολούθως.

Θέτουμε $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Οπότε $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy$

Αντικαθιστούμε τις μεταβλητές σε πολικές συντεταγμένες, $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, οπότε το άθροισμα $x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2\cdot 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rd\theta dr=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}r\int_{0}^{2\pi}d\theta\,dr=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}r\left[\theta\right]_0^{2\pi}dr=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,\cancel{2\pi}\,dr=-\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}d(\frac{r^2}{2})=$$

$$-\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{-\infty}=-\left[0-1\right]=1$$

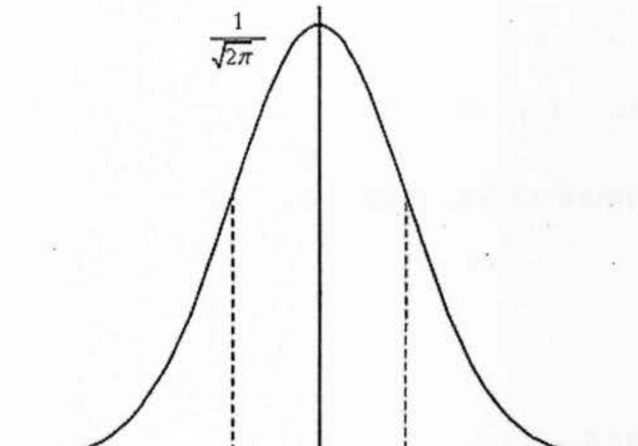
Άρα $\mathrm{I}^2=1\Rightarrow \mathrm{I}=\sqrt{1}\Rightarrow \mathrm{I}=1$

Επομένως $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$ και από αυτό τον τύπο λαμβάνουμε και την ισότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

Η γραμμένο σε μορφή τύπου που θα χρειαστούμε παρακάτω

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$



Η γραφική είναι συμμετρική ως προς το μέσον της και έχει κωδωνοειδή μορφή .

Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο της σχέσης λαμβάνουμε

$$f_x'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Η οποία μας δίνει τοπικό μέγιστο στο $f_x'(x) = 0 \rightarrow \gamma\iota\alpha \ldots \mathrm{x} = 0$ που είναι ίσο με $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Η συνάρτηση $f_x'(x)$ για χ<0 είναι αύξουσα ενώ για χ>0 η συνάρτηση είναι φθίνουσα κάτι που επαληθεύεται και από την καμπύλη.

Η δεύτερη παράγωγος

$$f_x''(x) = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]' = \left(-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)'\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) + \left(-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{\frac{-x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} (x^2 - 1)}$$

$f_x'' = 0 \rightarrow (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow |x| = 1$ μηδενίζεται στα σημεία καμπής στο ±1

Και για

$$\begin{aligned} &x < -1 \rightarrow f''(x) > 0 \\ &-1 < x < 1 \rightarrow f''(x) < 0 \\ &x > 1 \rightarrow f''(x) > 0 \end{aligned}$$

Οπότε από -∞ έως -1 έχουμε κοίλα, από -1 εως1 κυρτά και από 1 έως +∞ πάλι κοίλα.

Εάν τώρα ακολουθούσαμε τις ίδιες διαδικασίες στην $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ χωρίς να θέσουμε τα μ=0 και σ=1 θα καταλήγαμε στα παρακάτω συμπεράσματα

Πρώτη παράγωγο

$$f_x'(x) = -\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$f_x'(x) = 0 \rightarrow \gamma\iota\alpha \ldots \mathrm{x\text{-}\mu} = 0$$

Ότι δηλαδή θα υπάρχει τοπικό μέγιστο στο σημείο χ=μ και θα ισούται με $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

Δεύτερη παράγωγο

$$f_x''(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left[1 - \frac{(x^2-1)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$f_x'' = 0 \rightarrow \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = 1 \Rightarrow \chi = \begin{cases} \mu - \sigma \\ \mu + \sigma \end{cases}$$

υπάρχουν σημεία καμπής στα μ+σ και μ-σ .

Θα αποδείξουμε ότι Ε(χ)=μ

Κανονικά ακολουθώντας τον τύπο $\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathrm{x}}(x)dx = m$ θα καταλήγαμε σε αυτό το αποτέλεσμα, αλλά ας κάνουμε ένα τρικ για να αποφύγουμε κάποιες πράξεις.

Έχοντας την δυνατότητα από τον ορισμό Ε(χ)=Ε(χ+μ-μ)=Ε(χ-μ)+Ε(μ)=Ε(χ-μ)+μ

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x-m})^2}{2\mathrm{s}^2}} \mathrm{d}\chi + \mu = \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x-m})^2}{2\mathrm{s}^2}} \mathrm{d}\chi$$

Θέτω χ-μ=τ άρα dx=dτ και

$$x \to -\infty \ldots \tau \to -\infty$$
$$\chi \to +\infty \ldots \tau \to +\infty$$

Οπότε αντικαθιστώντας λαμβάνουμε $\mathrm{E}(\chi) = \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}^2}{2\mathrm{s}^2}} \mathrm{d}\tau$

Αλλά το $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}^2}{2\mathrm{s}^2}} \mathrm{d}\tau$ είναι περιττό και ισούται με μηδέν οπότε και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $\mathrm{E}(\chi) = \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * 0 = \mu$

Θα αποδείξουμε ότι $Var(x) = \sigma^2$

$$Var(x) = \mathrm{E}[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_{\mathrm{x}}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu)$$

Θέτω χ-μ=τ άρα dx=dτ και

$$x \to -\infty \ldots \tau \to -\infty$$
$$\chi \to +\infty \ldots \tau \to +\infty$$

Αντικαθιστώντας

$$Var(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad \cdots A$$

Ψάχνω το

$$\int x^2 e^{-ax^2}dx=\int xe^{-ax^2}xdx=\int xe^{-ax^2}d\frac{x^2}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\int xe^{-ax^2}dx^2=\frac{1}{2a}\int xe^{-ax^2}dax^2=$$

$$-\frac{1}{2a}\int xe^{-ax^2}d-ax^2=-\frac{1}{2a}\int xde^{-ax^2}$$

$$\boxed{\int f\cdot dg=f\cdot g-\int g\cdot df}$$

$$-\frac{1}{2a}[xe^{-ax^2}-\int e^{-ax^2}dx$$

Αντικαθιστώντας στο Α έχουμε

$$Var(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\{[\frac{-t}{2\frac{1}{2\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\}$$

Θέλω την τιμή του $te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $\quad για \quad t=+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}}=\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to+\infty}\frac{t'}{(e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}})'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sigma^2}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Επίσης θέλω και το $te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $\quad για \quad t=-\infty$

$$\lim_{t\to-\infty}te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}}=\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to-\infty}\frac{t'}{(e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}})'}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sigma^2}}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Άρα

$$Var(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\{[\frac{-t}{2\frac{1}{2\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}+\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\{[0]-[0]+\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\}=$$

$$\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=$$

$$\sigma^2\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}=\sigma^2\cdot 1=\sigma^2$$

Ώστε $\boxed{Var(x)=\sigma^2}$

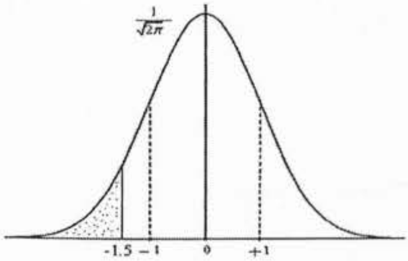
Η αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής έχει την μορφή

$$F_x(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

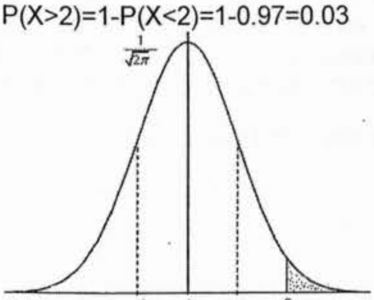
το ολοκλήρωμα δεν έχει αριθμητική λύση και υπολογίζεται από πίνακες σαν αυτόν στο τέλος των σημειώσεων.

Παράδειγμα: Έστω ΤΜ Χ N(0,1), να βρεθούν οι πιθανότητες 1). Το Χ να είναι μικρότερο του -1.5, 2). Να είναι μεγαλύτερο του 2, 3). Να είναι μεγαλύτερο του -1 και μικρότερο του 1.

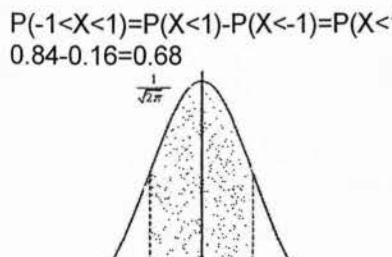
1. P(X<-1.5)=1-P(X<1.5)=1-0.93=0.07



2. P(X>2)=1-P(X<2)=1-0.97=0.03



3. P(-1<X<1)=P(X<1)-P(X<-1)=P(X<1)-[1-P(X<1)]=0.84-(1-0.84)= 0.84-0.16=0.68



Συναρτήσεις μια μεταβλητής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X με σππ fx(x) . εάν δημιουργήσω την μεταβλητή Y=g(X) μια νέα συνάρτηση της X (πχ $Y = X^2, Y = \frac{1}{1+X^3}, Y = \sigma\upsilon\nu(X+2)$) ποια θα ήταν η σππ της fy(y);

Σαν παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε τις μετρήσεις της θερμοκρασίας μιας ημέρας, από το θερμόμετρο που μετράει σε βαθμούς κελσίου δημιουργώ την μεταβλητή X, κατόπιν με την μετατροπή τους σε Φαρενάιτ λαμβάνω την μεταβλητή Y.
$Y = 1.82X + 32$
Εφόσον η X αποτελεί τυχαία μεταβλητή έτσι και η Y είναι μια νέα τυχαία μεταβλητή.
Σε περίπτωση που η X ήταν διακριτή με ΣΠΠ $f_x(x)$ τότε θα υπολογίζαμε την $f_y(y)$ προσθέτοντας τις πιθανότητες για όλες τις τιμές του x που θα αντιστοιχούσαν σε κάθε y=g(x) .

Παράδειγμα

Έχω την $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{11} \gamma\iota\alpha \quad -5 \le x \le 5 \\ 0 \quad \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$

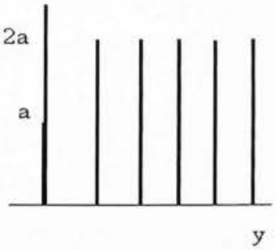
Από την X ορίζω $Y = |X|$. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστή η ΣΠΠ της Y.

Λύση;
Η Y λαμβάνοντας τις απόλυτες τιμές του X θα έχει πιθανά αποτελέσματα τα [0,1,2,3,4,5]. Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες θα πρέπει να αθροίσουμε για κάθε y όλες τις τιμές του x για τις οποίες y=|x|. Άρα για τις τιμές του y=[1,2,3,4,5] έχω δυο τιμές του x= [-1,1 -2,2 -3,3 -4,4 και -5,5] και μόνο στην τιμή y=0 έχω x=0. Οπότε για κάθε μια από τις τιμές [1,2,3,4,5] θα αθροίζω $\frac{1}{11}+\frac{1}{11}$ δηλ $f_y(1) = f_x(-1) + f_x(1) = \frac{1}{11}+\frac{1}{11}$. Και μόνο για την y=0 θα έχω $f_y(0) = \frac{1}{11}$

Άρα $f_y(y) = \begin{cases} \frac{2}{11} \gamma\iota\alpha \ y = 1,2,3,4,5, \\ \frac{1}{11} \quad \gamma\iota\alpha \quad y = 0 \\ 0 \quad \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$

Η ΣΠΠ της X έχει την παρακάτω μορφή

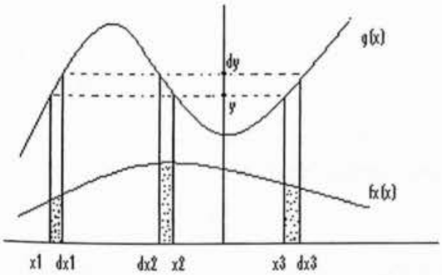
Και η Y



Για τον υπολογισμό της $f_y(y)$ σε συνεχείς μεταβλητές, λύνουμε την $y = g(x)$ συμβολίζοντας τις πραγματικές ρίζες με x_n,όποτε έχουμε

$y = g(x_1) = ... = g(x_n) = ...$

Στο παρακάτω παράδειγμα η εξίσωση $y = g(x)$ έχει τρείς ρίζες



Όπως είναι γνωστό $f_y(y) = \{y \le y \le y + dy\}$ οπότε θα πρέπει να αθροίσουμε το σύνολο των τιμών του χ για το οποίο $y \le y \le y + dy$,και στο παραπάνω σχήμα έχουμε τα

$x_1 \le x \le x_1 + dx_1$

$x_2 + dx_2 \le x \le x_2$

$x_3 \le x \le x_3 + dx_3$

Τα οποία αθροίζουμε για να λάβουμε το διάστημα $y + dy$.Αντίστοιχα η πιθανότητα θα ισούται με

$P\{y \le y \le y + dy\} = P\{x_1 \le x \le x_1 + dx_1\} + P\{x_2 + dx_2 \le x \le x_2\} + P\{x_3 \le x \le x_3 + dx_3\}$

Η πιθανότητα σε κάθε x φαίνεται σκιασμένη στο σχήμα και είναι ίση με

$P\{x_1 \le x \le x_1 + dx_1\} = f_x(x_1) \cdot dx_1$

$P\{x_2 + dx_2 \le x \le x_2\} = f_x(x_2) \cdot |dx_2|$

$P\{x_3 \le x \le x_3 + dx_3\} = f_x(x_3) \cdot dx_3$

Επίσης από την γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού πάνω στην καμπύλη έχουμε

$$dx_1 = \frac{dy}{f'(x_1)}$$

$$dx_2 = \frac{dy}{f'(x_2)}$$

$$dx_3 = \frac{dy}{f'(x_3)}$$

Και κάνοντας την αντικατάσταση καταλήγουμε στον ορισμό

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} + \cdots + \frac{f_x(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

<u>Εφαρμογή :</u>

Χ Ω Ν(0,1) .Ψάχνω την σππ της $Y = g(x) = X^2$

Λύνω την $y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ για την πρώτη δεν ορίζεται ,για την δεύτερη

Έχουμε $x_1 = \sqrt{y}, x_2 = -\sqrt{y}$

$$g'(x) = (x^2)' = 2x$$

$$g'(x_1(y)) = 2x_1(y) = 2\sqrt{y}$$

$$g'(x_2(y)) = 2x_2(y) = -2\sqrt{y}$$

Άρα εφαρμόζοντας τον ορισμό με $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f_Y'(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}}{|2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}}{|-2\sqrt{y}|} = 2\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Θα μπορούσαμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα και με τον εξής τρόπο.
Από τον ορισμό της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας

$$F_y(y) = P(Y \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$P(X \le \sqrt{y}) - P(X \le -\sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη λαμβάνω

$$F_y(y)' = f_y(y) = [F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})]' = [f_x(\sqrt{y})\cdot(\sqrt{y})' - f_x(-\sqrt{y})\cdot(-\sqrt{y})'] =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) + f_x(-\sqrt{y})]$$

αντικαθιστώντας για $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) - f_x(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}] = \frac{1}{2\sqrt{y}}[2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}] =$$
$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Καταλήγω στο ίδιο αποτέλεσμα

Μέση τιμή συνάρτησης ΤΜ

Έχοντας δημιουργήσει μια μεταβλητή $'y'$ από μια άλλη τυχαία μεταβλητή $y = g(x)$ η μέση τιμή της υπολογίζετε από τον τύπο

$$E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y) dy$$

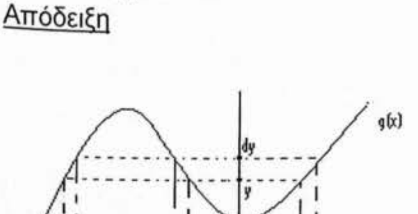
Οπότε για να την υπολογίσω θα πρέπει πρώτα να βρω την ΣΠΠ της $f_y(y)$.

Ωστόσο αυτό δεν είναι απαραίτητο βάση του επομένου θεωρήματος

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x) dx$$

Το οποίο μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της Υ άμεσα από την $g(x)$ και την ΣΠΠ $f_x(x)$ της Χ.

Απόδειξη



Θα κάνουμε χρήση της παραπάνω καμπύλης στην οποία το
$y = g(x_1) = g(x_3) = g(x_3)$
Παρατηρούμε ότι

$f_y(y)dy = f_x(x_1)dx_1 + f_x(x_2)dx_2 + f_x(x_3)dx_3$

Κάτι που έχουμε δει και στην προηγούμενη μας απόδειξη.

Πολλαπλασιάζοντας με y προκύπτει

$y f_y(y)dy = g(x_1)f_x(x_1)dx_1 + g(x_2)f_x(x_2)dx_2 + g(x_3)f_x(x_3)dx_3$

Οπότε σε κάθε ένα από τα διαφορικά της $E[y]$ αντιστοιχεί ένα ή περισσότερα διαφορικά της $E[g(x)]$. Καθώς το dy καλύπτει των άξονα y τα αντίστοιχα dx είναι μη επικαλυπτόμενα και καλύπτουν όλο τον άξονα x. Οπότε τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

$E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)dx$

Οπότε

Έστω X τυχαία μεταβλητή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_x(x)$

Και g(x) μια συνάρτηση της X. Εφαρμόζοντας τον ορισμό

Αν στην θέση του $g(x)$=χ έχω την μέση τιμή της $f_x(x)$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)dx = m$

Αν στην θέση του $g(x) = x^2$ έχω την μέση τετραγωνική τιμή της $f_x(x)$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_x(x)dx$

Αν στην θέση του $g(x) = (x-\mu)^2$ έχω την διακύμανση VAR(σ^2) της $f_x(x)$

$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_x(x)dx$

Αναλύοντας περισσότερο την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην ακόλουθη

$$VAR[X] = \mathrm{E}[(\mathrm{X}-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2xm + m^2) f_x(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (2xm) f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} m^2 f_x(x)dx =$$

$$E(X^2) - 2mE(X) + m^2 = E(X^2) - 2mm + m^2 = \boxed{E(X^2) - m^2} \ldots \cdot ή \boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [E(X)]^2}$$

Ιδιότητες:

$$\mathrm{E}(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\, f_x(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = c1 = c$$

$$\mathrm{E}[(a\mathrm{X} - \beta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+\beta) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ax\, f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta\, f_x(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)dx + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx =$$

$$a\mathrm{E}(x) + \beta$$

$$\mathrm{E}[(\mathrm{X}-m)^2] = E(X^2) - m^2 \ldots \cdot ή\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [E(X)]^2$$

Η διακύμανση είναι πάντα θετική Var(x)≥0 .

Από την εξίσωση $\mathrm{E}[(\mathrm{X}-m)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f_x(x)dx$ όπου τα $(x-m)^2$ και f(x) πάντα θετικά, οπότε και το ολοκλήρωμα πάντα θετικό

Αντίστοιχα εφόσον $Var \geq 0 \rightarrow \mathrm{E}(x^2)-[\mathrm{E}(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}(x^2) \geq [\mathrm{E}(x)]^2$

Παράδειγμα :
Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση της ΤΜ. με ΣΠΠ

$$f_X(x)=\frac{1}{8}x \quad \gamma\iota\alpha \quad 0<x<4$$

Λύση :

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)dx=\int_0^4 x\frac{1}{8}xdx=\frac{1}{8}\int_0^4 x^2dx=$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{1}{8}[21.33-0]=2.66$$

Για να βρω την διακύμανση θα πρέπει να υπολογίσω και την μέση τετραγωνική τιμή

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^4 x^2\frac{1}{8}xdx=\frac{1}{8}\int_0^4 x^3dx=$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4=\frac{1}{8}(64)=8$$

Οπότε η διακύμανση VAR[X]

$$VAR[X]=E[X^2]-E[X]^2=8-(2.66)^2=0.92$$

Παράδειγμα
Αν η χ είναι μεταβλητή ομοιόμορφη στο διάστημα [–c,c]. Να βρεθεί η $VAR[x]$

Λύση:
Εφόσον η χ είναι ομοιόμορφη στο διάστημα [-c,c} άρα η m=0

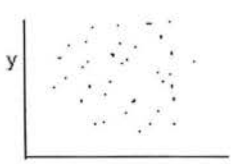
Και η $f_x(x)=\dfrac{1}{2c}$ οπότε

$$VAR[x]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2\, f_x(x)dx=\int_{-c}^{c}(x-0)^2\,\frac{1}{2c}dx=$$

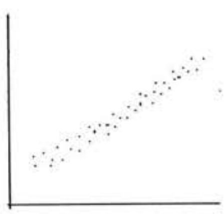
$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}x^2\,dx=\frac{1}{2c}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-c}^{c}=\frac{1}{2c}\left[\frac{c^3}{3}-\frac{(-c)^3}{3}\right]=$$

$$\frac{1}{2c}\left[\frac{c^3+c^3}{3}\right]=\frac{2c^3}{6c}=\frac{c^2}{3}$$

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την μελέτη μιας μόνο μεταβλητής. Σε πολλές περιπτώσεις όμως ασχολούμαστε με τη μελέτη δύο μεταβλητών ψάχνοντας να βρούμε αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους, αν δηλαδή οι τιμές της μίας μεταβλητής επηρεάζουν τις τιμές της άλλης. Χαρακτηριστικότατο παράδειγμα η τιμές της προσφοράς και της ζήτησης των αγαθών.
Αν τοποθετήσουμε τις τιμές δύο μεταβλητών σε ένα ορθογώνιο σύστημα και πάρουμε μια τέτοια απεικόνιση εύκολα φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι οι δυο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.



Αν όμως λαμβάναμε μια τέτοια απεικόνιση



Θα λέγαμε ότι οι δύο μεταβλητές κατά κάποιο τρόπο ακολουθούν η μία την άλλη ή καλύτερα ότι συσχετίζονται. Αυτό που θα θέλαμε να μάθουμε είναι ποιος είναι ο βαθμός αυτής της συσχέτισης και αν υπάρχει κάποια συνάρτηση την οποία ακολουθεί.
Για να μελετήσουμε την εξάρτηση των δύο μεταβλητών κάνουμε τα παρακάτω βήματα
Α) με δεδομένο ότι από διαφορετικές παρατηρήσεις, σε κάθε τιμή του $X=x_i$ αντιστοιχούν παραπάνω από μία τιμές του Υ. για κάθε x_i υπολογίζουμε την μέση τιμή του Y_{x_i}. η οποία ονομάζεται και δεσμευμένη μέση τιμή $E(Y/x_i)$.

Β)Τοποθετούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα τα ζευγάρια τον τιμών μας $F_i(x_i, y_{x_i})$

Γ) δημιουργούμε μια καμπύλη που περνάει πάνω ή κοντά από τα σημεία F. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η καμπύλη έχει την εξίσωση y=f(x) θα μπορούμε πλέον για κάθε τιμή του χ να έχουμε μια εικόνα (εκτίμηση) για τις τιμές του Y. Η συνάρτηση y=f(x) θα μας δίνει την αλληλεξάρτηση των μεταβλητών X και Y. Η f(x) ονομάζεται γραμμή παλινδρόμησης.

Μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, έχοντας δηλαδή δημιουργήσει τα σημεία πάνω στον πίνακα πως θα μπορέσουμε να φτιάξουμε την γραμμή παλινδρόμησης; Πως δηλαδή θα βρούμε εκείνη την γραμμή που περνάει πιο κοντά από τα σημεία που έχουμε; Για αυτό το πρόβλημα δίνει λύση η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Το πρόβλημα πιο αναλυτικά εστιάζεται στο εξής: Αν έχω μια συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας τα σημεία για τα $x_1, x_2, x_3 .... x_n$ είναι τα $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3 .... \hat{Y}_n$. ενώ τα σημεία που έχουμε πάνω στον πίνακα μετρήσεων μας είναι τα $Y_1, Y_2, Y_3 .... Y_n$. (το ιδανικό θα ήταν να συμπίπτανε τα δύο σημεία αλλά αυτό δεν είναι δυνατόν), οπότε πως μπορώ να πω ότι οι δύο καμπύλες είναι κοντά; Θα ορίσω ένα μέτρο 'ε' (σφάλμα) το οποίο θα παίρνει την διαφορά κάθε σημείου και όταν αυτό το μέτρο είναι ελάχιστο τότε θα έχω την καμπύλη που αναζητώ.

Δηλ $\varepsilon = (Y_1 - \hat{Y}_1)^2 + (Y_2 - \hat{Y}_2)^2 + (Y_3 - \hat{Y}_3)^2 + ... + (Y_n - \hat{Y}_n)^2 = \min$

Για να κάνουμε όμως τη διαδικασία θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε, τι γραμμή θα είναι αυτή που θα προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε στις μετρήσεις μας ,και αν κάνουμε χρήση ευθείας ή κάποιας καμπύλης.

Αν κάνουμε χρήση ευθείας θα πρέπει από όλες τις ευθείες του επιπέδου να βρούμε την $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ που μας βγάζει το μικρότερο σφάλμα ή απόκλιση.

Οπότε η ευθεία όπου το

$$\sum \hat{\varepsilon}^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = \min$$

Βρίσκεται όταν οι μερικές παράγωγοι ως προς α και β είναι ίσες με μηδέν

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} (\sum \varepsilon_i^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{b}} (\sum \varepsilon_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum \varepsilon_i^2 =.-2 \sum (y_i - \hat{a} - \hat{b}x)_i = 0 \Rightarrow \sum y_i = n\hat{a} + \hat{b}x_i$$

Αντίστοιχα

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum \varepsilon_i^2 = -2 \sum (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)(-x) = 0 \Rightarrow \sum x_i y_i = \hat{a} \sum x_i y_i + \hat{b} \sum x_i^2$$

Επομένως από το σύστημα

$$\sum y_i = n\hat{a} + \hat{b} \sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{a} \sum x_i + \hat{b} \sum x_i^2$$

μπορώ να υπολογίσω τα a και b και θα έχω την ευθεία που αναζητώ.

Στην παρακάτω διεύθυνση υπάρχει λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων
http://www.khanacademy.org/math/statistics/v/squared-error-of-regression-line

Κατανομή δύο μεταβλητών

Σε πολλές εφαρμογές παρατηρούμε την ύπαρξη περισσοτέρων της μίας τυχαίων μεταβλητών. Ένα παράδειγμα είναι η καταγραφή και η μελέτη του βάρους και του ύψους ενός πληθυσμού όπου θα θεωρούμε σαν τυχαίες μεταβλητές και το βάρος και το ύψος, είναι διαφορετικό να έχουμε μια εξαρτημένη μεταβλητή πχ ύψος και να μελετάμε την μεταβολή του βάρους . Ένα δεύτερο παράδειγμα αποτελεί καταγραφή της πτώσης μετεωριτών οπού μεταβλητές θεωρούμε τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη. Και στις δυο αυτές περιπτώσεις μελετάμε την συχνότητα εμφάνισης ενός ζεύγους τιμών. Ότι περιγράφουμε παρακάτω θα μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερες των δύο τυχαίες μεταβλητές.

Μας δύνονται δυο ΤΜ x , y Οι εκφράσεις $\{x \le X\} \; \kappa\alpha\iota \; \{y \le Y\}$ μας ορίζουν κάποια γεγονότα τα οποία έχουν πιθανότητα να συμβούν

$F_x(x) = \{x \le X\} \quad \kappa\alpha\iota \quad F_y(y) = \{y \le Y\}$

Βάση αυτών των γεγονότων μπορώ να ορίσω ένα νέο γεγονός το οποίο θα περιλαμβάνει όλα τα παραπάνω

$$F_{xy}(x,y) = P[X \le x \quad \kappa\alpha\iota \quad Y \le y]$$

Και το οποίο ορίζει την 'Από κοινού συνάρτηση (αθροιστική) κατανομής' των δύο μεταβλητών. Η νέα από κοινού συνάρτηση δεν μπορεί να υπολογιστεί από την γνώση μόνο των $F_x(x) \kappa\alpha\iota F_y(y)$ που ονομάζονται 'περιθώριες'.

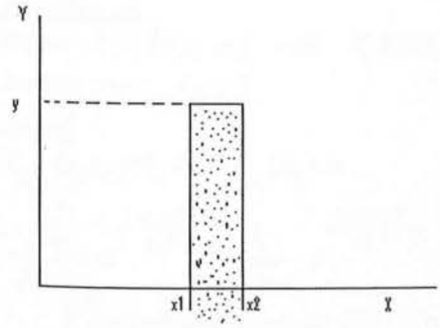
Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας υπολογίζεται από το

$$P[(X \le x, Y \le y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{xy}(u,q)\,du\,dq$$

Και ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

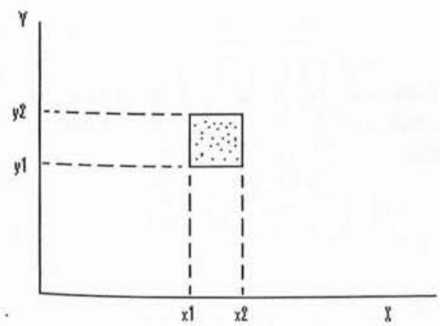
$$F_{XY}(+\infty,+\infty) = P(S) = 1,$$
$$F_{XY}(x,-\infty) = 0 \quad , F_{XY}(-\infty,y) = 0$$
$$F_{XY}(x,+\infty) = F_X(x) \quad \delta\iota o\tau\iota \quad F_{XY}(x,+\infty) = P[X \le x \quad Y \le +\infty] = P[X \le x] = F_X(x),$$
$$F(+\infty,y) = F_Y(y),$$
$$P[x_1 \le X \le x_2 \quad Y \le y] = P[X \le x_2 \quad Y \le y] - P[X \le x_1 \quad Y \le y] = F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y),$$

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε και την περιοχή που ορίζεται από το ενδεχόμενο



$$P[X \leq x \quad y_1 \leq Y \leq y_2] = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1),$$

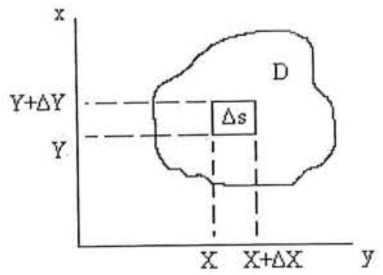
$$P[x_1 \leq X \leq x_2 \quad y_1 \leq Y \leq y_2] =$$
$$P[X \leq x_2 \quad y_1 \leq Y \leq y_2] - P[X \leq x_1 \quad y_1 \leq Y \leq y_2] =$$
$$\{P[X \leq x_2 \quad Y \leq y_2] - P[X \leq x_1 \quad Y \leq y_2]\} - \{P[X \leq x_1 \quad Y \leq y_2] - P[X \leq x_1 \quad Y \leq y_1]\}$$
$$F_{XY}(x_{2,} y_2) - F_{XY}(x_{1,} y_2) - F_{XY}(x_{1,} y_2) + F_{XY}(x_{2,} y_1),$$



Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας υπολογίζεται από την παράγωγο της συνάρτηση κατανομής

$$\mathrm{f}_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{xy}(x, y)}{\partial_x \partial_y}$$

Η οποία όπως και με την μία μεταβλητή
$$P[x \leq X \leq x + dx \quad \kappa\alpha\iota \quad y \leq Y \leq y + dy] = \mathrm{f}_{xy}(x, y)dxdy$$



Αντίστοιχα η πιθανότητα, η δυο διαστάσεων τυχαία μεταβλητή (δηλ. τα δυο γεγονότα που ορίζονται από τα X και Y) που έχει σππ f(x,y) να πάρει τιμές μέσα στο χωρίο D βρίσκεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$P[(X,Y)\in D]=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Αν πχ. το χωρίο D ορίζεται από τις ευθείες χ=α, χ=β και y=γ ,y=δ το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$P[(\alpha\le X\le\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma\le Y\le\delta]=\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta f(x,y)dxdy$$

Κατά την μελέτη πολλαπλών μεταβλητών η στατιστική της κάθε μίας μεταβλητής μεμονομένα μέσο της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ονομάζεται περιθώρια στατιστική. Οι περιθωριακές συναρτήσεις των X και Y υπολογίζονται από

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Οι δύο μεταβλητές ονομάζονται στατιστικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν
$P[X\le x,Y\le y]=P[X\le x]\cdot P[Y\le y]$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial_x\partial_y}=\frac{\partial^2[F_x(x)\cdot F_Y(y)]}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial}{\partial y}[(F_x(x)\cdot F_Y(y)]\}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_X(x)\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}]=\frac{\partial}{\partial x}[F_X(x)\frac{dF_Y(y)}{dy}]=\frac{\partial}{\partial x}[F_X(x)\mathrm{f}_Y(y)]=$$

$$\mathrm{f}_Y(y)\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}=\mathrm{f}_Y(y)\frac{dF_X(x)}{dx}=\mathrm{f}_Y(y)\cdot\mathrm{f}_X(x)$$

Ώστε αν X,Y ανεξάρτητες
$\mathrm{f}_{XY}(\mathrm{x,y})=\mathrm{f}_X(\mathrm{x})\cdot\mathrm{f}_Y(y)$

Παράδειγμα:

Έστω $X_1 \,\Omega\, \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1) \quad \kappa\alpha\iota \quad X_2 \,\Omega\, \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2)$ ανεξάρτητες μεταξύ τους

Ζητάμε την $\mathrm{f}_{x_1x_2}(x_1,x_2)$

Λύση:

$$\mathrm{f}_{x_1x_2}(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)=\mathrm{f}_{x_1}(\mathrm{x}_1)\cdot\mathrm{f}_{x_2}(x_2)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1^2})^2\ -(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2^2})^2]}.$$

Αν οι δύο μεταβλητές δεν ήταν ανεξάρτητες η συνάρτηση $\mathrm{f}_{x_1x_2}(x_1,x_2)$ θα είχε διαφορές από την προηγούμενη. Στον μαθηματικό τύπο υπεισέρχεται μια σταθερά ρ η οποία θα δούμε ότι είναι ο συντελεστής συσχέτισης των $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2$

$$\mathrm{f}_{x_1x_2}(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1^2})^2-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(\chi_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2^2})^2]}$$

Μια συνάρτηση δυο τυχαίων μεταβλητών

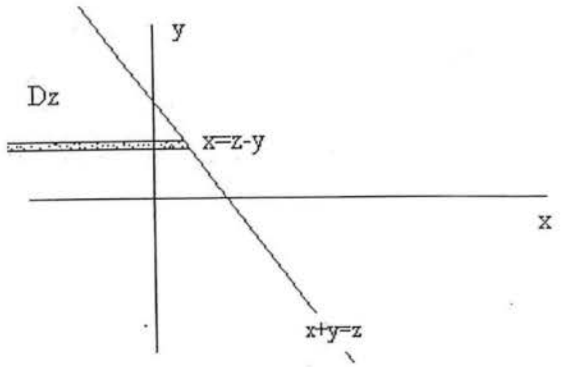
Έχουμε δυο ΤΜ χ,y και γνωρίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. με αυτές δημιουργούμε μια νέα ΤΜ z από την συνάρτηση z= $g(x,y)$. αυτό που επιθυμούμε είναι να βρούμε την στατιστική της z δηλαδή την κατανομή $F_z(z)$ και την πυκνότητα $f_z(z)$ σαν συνάρτηση της από κοινού στατιστικής των Χ και Υ.

Η συνάρτηση κατανομής της z είναι

$$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(x,y)\le z=P\{(x,y)\in D_z\}=\iint_{D_z}f_{x,y}(x,y)dxdy$$

Οπού D_z ορίζεται το χορείο στο οποίο ισχύει η ανισότητα $\{g(x,y)\le z\}$.

Θα δούμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα που έχει μεγάλη σημασία στις τηλεπικοινωνίες και αφορά την $z=g(x,y)=x+y$ δηλ την πρόσθεση των δύο ΤΜ. Οι δύο μεταβλητές θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν το ωφέλιμο σήμα και τον θόρυβο . Οπότε η στατιστική του αθροίσματος τους όπως πραγματοποιείτε κατά την μεταφορά είναι σημαντική για την σχεδίαση του δέκτη.



Η περιοχή D_Z για την οποία ισχύει η ανισότητα $x+y \leq z$ είναι το κομμάτι του επιπέδου XY αριστερά της ευθείας. Για να καλύψουμε την περιοχή αυτή, ολοκληρώνουμε στην οριζόντια λωρίδα πρώτα (εσωτερικό ολοκλήρωμα) και κατόπιν την μετακινούμε κατά μήκος του άξονα Y υπολογίζοντας το εξωτερικό ολοκλήρωμα από το $+\infty$ $\sigma\tau o$ $-\infty$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x,y)dx$$

Για τον υπολογισμό της $f_z(z)$ κάνουμε διαφόριση της $F_z(z)$ και με την χρήση του κανόνα Leibnitz καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x,y)dx \right) dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 f_{xy}(z-y,y) - 0 + \int_{-\infty}^{z-y} \frac{\partial f_{xy}(x,y)dx}{\partial z} \right) dy =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(z-y,y)dy}$$

Στην περίπτωση όπου οι X,Y μεταβλητές είναι ανεξάρτητες , αντικαθιστούμε την $f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ στην παραπάνω σχέση και καταλήγουμε στο

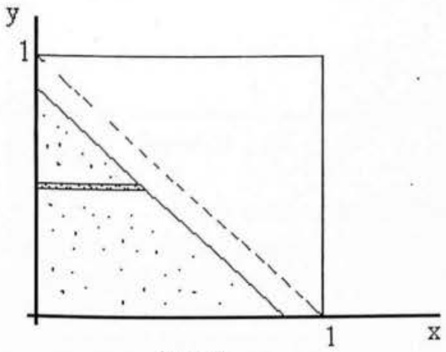
$$f_z(z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_x(z-x) f_y(y)dy = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-y)dx = f_x(x) * f_y(y)$$

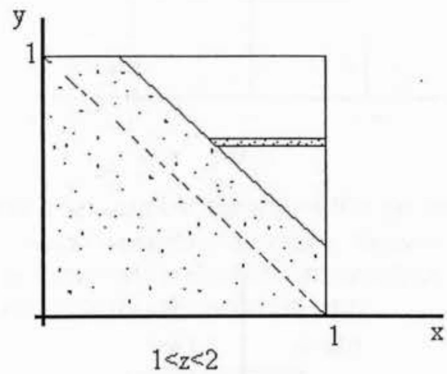
Οπότε εάν δυο ΤΜ είναι ανεξάρτητες , τότε η πυκνότητα του αθροίσματος τους ισούται με την συνέλιξη των συναρτήσεων πυκνότητας τους.

<u>Παράδειγμα</u>

Έχουμε δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y. Να προσδιοριστεί η $f_z(z)$ όπου Z=X+Y, οι δυο μεταβλητές X και Y είναι ομοιόμορφες στο κοινό διάστημα (0,1)

Λύση:
Εφόσον οι X και Y λαμβάνουν τιμές από 0 έως 1 , τα άθροισμα τους θα λαμβάνει τιμές από 0 έως 2 , $z = x + y \Rightarrow 0 \le z \le 2$





Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε δύο διαφορετικές περιοχές
Για $0 \le z \le 1$

$$F_z(z) = \int_0^z \int_0^{z-y} 1dxdy = \int_0^z [x]_0^{z-y} dy = \int_0^z (z-y)dy = z\int_0^z 1dy - \int_0^z ydy =$$

$$z[y]_0^z - [\frac{y^2}{2}]_o^z = z^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}$$

Αντίστοιχα για $1 \le z \le 2$

$$F_z(z) = 1 - P\{z \le z\} = 1 - \int_{z-1}^1 \int_{z-y}^1 1dxdy =$$

$$1 - \int_{z-1}^1 (1 - z + y)dy = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

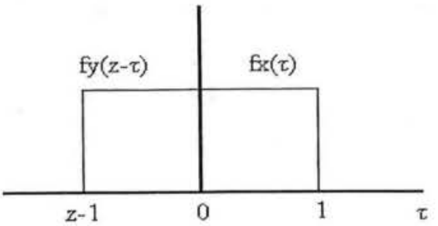
Οπότε με την παράγωγο

$$f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = \begin{cases} z & 0 \le z \le 1 \\ 2 - z & 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

Στο παραπάνω αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να φτάσουμε και με την συνέλιξη των δυο ΤΜ

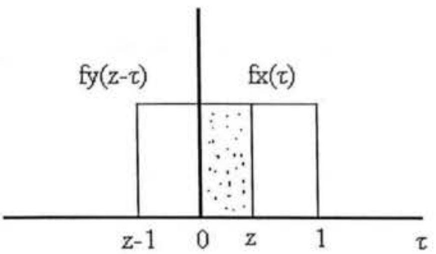
Παράδειγμα συνέλιξης

$$f_z(z) = f_x(x) * f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\tau) \cdot f_y(z-\tau) d\tau$$



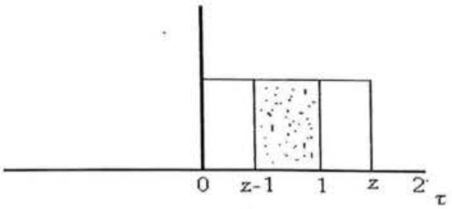
z<0

Όπου για z<0 δεν έχουμε αλληλοεπικάλυψη οπότε και το γινόμενο είναι μηδέν



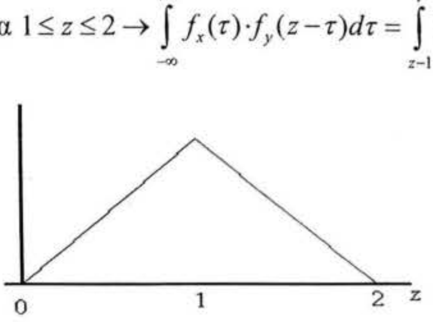
0<z<1

Για $0 \le z \le 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\tau)\cdot f_y(z-\tau)d\tau = \int_{0}^{z} 1\cdot 1\, d\tau = [\tau]_0^z = z$



1<z<2

Για $1 \le z \le 2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\tau)\cdot f_y(z-\tau)d\tau = \int_{z-1}^{1} 1\cdot 1\, d\tau = [\tau]_{z-1}^{1} = 1 - z + 1 = 2 - z$



Οπότε και φτάσαμε στο ίδιο αποτέλεσμα

Από κοινού κανονικότητα

Ισχυριζόμαστε ότι δυο δύο ΤΜ x,y είναι από κοινού κανονικές όταν η από κοινού πυκνότητα τους είναι ίση με

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-n_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}-2\rho\frac{(\chi-n_1)(y-n_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-n_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)\right\}}$$

Ο συντελεστής ΄ρ΄ είναι ο συντελεστής αυτοσυσχέτησης των δύο μεταβλητών x και y . Όταν οι δυο μεταβλητές είναι από κοινού κανονικές τότε αυτές ακολουθούν την κανονική κατανομή, με άλλα λόγια οι περιθώριες της παραπάνω κατανομής είναι και αυτές κανονικές. Για να το αποδείξουμε αυτό θα κάνουμε χρήση της ισότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx=f_y(y)$$

και με αντικατάσταση

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-n_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(\chi-n_1)(y-n_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-n_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-n_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Θα βρούμε ότι η $f_y(y)$ είναι κανονική ΤΜ με μέση τιμή n_2 και διακύμανση σ_2.

Απόδειξη:

Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε αντίστροφη διαδικασία. Θα αναζητήσουμε την αρχική από κοινού συνάρτηση , έχοντας δεδομένη την περιθώρια. Και συγκεκριμένα θα έχω σαν άγνωστο το πρώτο 'άρρητο' μέρος της συνάρτησης.

Η παραπάνω παρένθεση μέσα στην αγκύλη μπορεί να γραφεί

$$\frac{(x-n_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-n_1)(y-n_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-n_2)^2}{\sigma_2^2}=$$

$$\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2+\rho^2\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2-\rho^2\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2=$$

$$\left[\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)+\rho^2\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2\right]+\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2-\rho^2\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2=$$

$$\left[\left[\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)\right]^2+\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2\left(1-\rho^2\right)\right]$$

Οπότε θεωρώντας άγνωστο το πρώτο σκέλος την συνάρτησης ως ΄Β΄ κάνουμε μερικές πράξεις

$$\mathrm{B}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left[\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)\right]^2+\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2\left(1-\rho^2\right)\right\}}=\mathrm{B}e^{-\frac{1}{2\cancel{(1-\rho^2)}}\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)^2\cancel{(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)\right]^2}=$$

$$Be^{\frac{(y-n_2)^2}{2\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-n_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right)\right]^2}$$

και λύνουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x-n_1}{\sigma_1}-r\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right]^2}dx=\sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x-n_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right]^2}d(\frac{x-n_1}{\sigma_1})=$$

$$\sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x-n_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-n_2}{\sigma_2}\right]^2}d(\frac{x-n_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-n_2}{\sigma_2})=$$

εδώ κάνω χρήση του τύπου που είδαμε νωρίτερα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Στον οποίο $a=\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}$

$$=\sigma_1\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2(1-\rho^2)}}}=\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}=\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_1^{\,2}}$$

Οπότε για να ισούται το ολοκλήρωμα με 1

$$\mathrm{B}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1\, e^{-\frac{(y-n_2)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-n_2)^2}{2\sigma^2}}\xrightarrow{\int}1$$

θα πρέπει

$$\mathrm{B}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\Rightarrow \mathrm{B}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Έτσι καταλήγουμε στην αρχική συνάρτηση της από κοινού κανονικότητας που επαληθεύει τον ισχυρισμό μας. Ότι η περιθώρια συνάρτηση αποτελεί κανονική ΤΜ με μέση τιμή n και τυπική απόκλιση σ.

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\mathrm{f}_{XY}(x,y)dxdy$ ετεροσυσχέτιση των X και Y

Μέση τιμή της X

$$n_x=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{f}_{XY}(x,y)dxdy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}_{XY}(x,y)dy)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x[\mathrm{f}_X(x)]dx=$$

Αντίστοιχα μέση τιμή της Y

$$n_Y=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{f}_{XY}(x,y)dxdy$$

Διακύμανση της X VAR(X)

$$VAR(X)=E[(X-n_X)^2]=E[X^2+n_X^2-2Xn_X]$$
$$E[X^2]+E[n_X^2]-E[2Xn_X]=E[X^2]+E[n_X^2]-2E[n_X^2]=$$
$$E[X^2]-E[n_X^2]=E[X^2]+n_X^2$$

Τα παραπάνω λαμβάνοντας υπόψη ότι $E[X]=n_X$ και ότι το n_X είναι η μέση τιμή του X άρα σταθερός συντελεστής

Θα μπορούσαμε να βρούμε και πιο αναλυτικά την παραπάνω λύση από τον ορισμό

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-n_X)^2 \mathrm{f}_{XY}(x,y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+n_X^2\text{-}2xn_X)\mathrm{f}_{XY}(x,y)dydx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}_{XY}(x,y)dydx + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} n_X^2\mathrm{f}_{XY}(x,y)dydx - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 2xn_X\mathrm{f}_{XY}(x,y)dy)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}_{XY}(x,y)dydx + n_X^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}_{XY}(x,y)dydx - 2n_X\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}_{XY}(x,y)dy)dx =$$

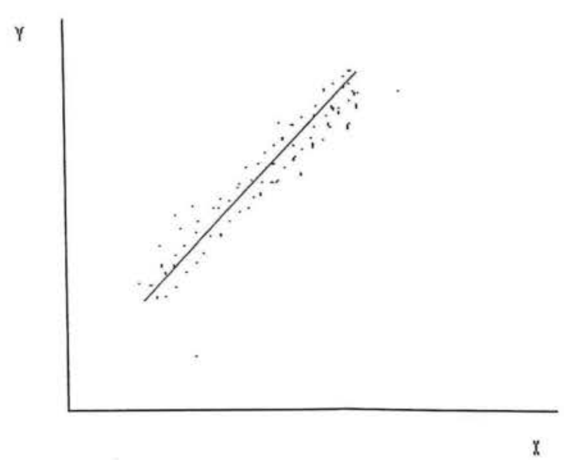
$$E[X^2]+n_X^2\cdot 1-2n_X\cdot n_X = E[X^2]-n_X^2 = \sigma_{\mathrm{X}}^2$$

Αντίστοιχα $VAR(Y) = E[Y^2]+n_Y^2 = \sigma_{\mathrm{Y}}^2$

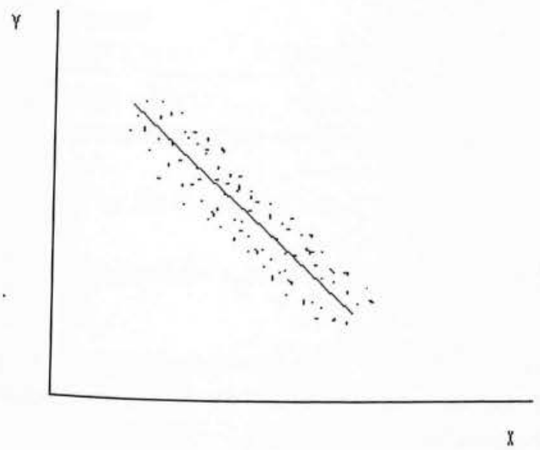
Γραμμική συμμεταβολή

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε μετρήσεις από ένα πείραμα και καταγράφουμε ζεύγη τιμών. Πχ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ldots(x_n,y_n)$

Τοποθετούμε τις μετρήσεις σε ένα διάγραμμα, αν αυτές ακολουθούν μια ευθεία γραμμή τότε λέμε ότι έχουν γραμμική συμμεταβολή ή ότι είναι συσχετισμένες.
Καλούμε θετικά συσχετισμένες τις μεταβλητές όταν η αύξηση τιμών της μιας έχει συνέπεια την αύξηση τιμών της άλλης.



Αρνητικά συσχετισμένες όταν η αύξηση των τιμών της μίας έχει συνέπεια την μείωση των τιμών της άλλης



Την γραμμή αυτή την μελετήσαμε παραπάνω και ονομάζεται ευθεία παλινδρόμησης.

Συμμεταβλητότητα (covariance) ή συνδιακύμανση των X,Y ονομάζεται ο αριθμός που δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$COV(X,Y)=\frac{(x_1-m_x)(y_1-m_y)+(x_2-m_x)(y_2-m_y)\cdots(x_n-m_x)(y_n-m_y)}{N}=\frac{1}{N}\sum_i x_i y_i - m_x m_y$$ η

οποία για συνεχείς μεταβλητές μετατρέπεται σε

$$COV(X,Y)=E[(X-n_X)\cdot(Y-n_Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-n_X)\cdot(Y-n_Y)\mathrm{f}_{XY}(x,y)dxdy$$

Και η οποία και αναλύεται ως

$$\begin{aligned}
&E[(X-n_X)(Y-n_Y)]=E[XY-Xn_Y-Yn_X+n_Xn_Y]=\\
&E[XY]-E[Xn_Y]-E[Yn_X]+E[n_Xn_Y]=\\
&E[XY]-n_YE[X]-n_XE[Y]+n_Xn_Y=\\
&E[XY]-n_Xn_Y-\cancel{n_X}\cancel{n_Y}+\cancel{n_X}\cancel{n_Y}=\\
&E[XY]-n_Xn_Y
\end{aligned}$$

Επειδή η συμμεταβλητότητα εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των X και Y (COV είναι ίσο με το γινόμενο των X και Y) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντικειμενικά για την σύγκριση διαφορετικών κατανομών, οπότε κάνουμε χρήση ενός αλλού συντελεστή απαλλαγμένου από τις μονάδες μέτρησης.

Συντελεστής συσχέτισης (correlation factor)
Ορίζουμε την ποσότητα

$$\rho = E\left[\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)dxdy =$$

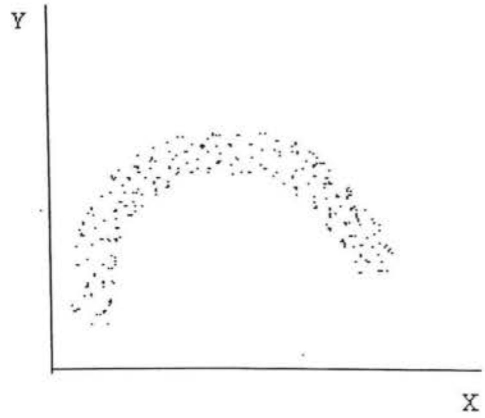
$$\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-m_x)(Y-m_y)dxdy \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(x)}\cdot\sqrt{Var(y)}} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$-1 \le \rho \le 1$$

Όταν οι μεταβλητές Χ και Υ είναι ανεξάρτητες ο συντελεστής είναι μηδέν. Αν $p = \pm 1$ τότε έχουμε γραμμική εξάρτηση (συμμεταβολή) των δύο μεταβλητών.

Μια μη γραμμική συμμεταβολή έχει συντελεστή ρ=0 χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχει στατιστική εξάρτηση.
Στην παρακάτω αποτύπωση παρατηρούμε έντονη συμμεταβολή των μεταβλητών οι οποίες όμως δεν σχηματίζουν γραμμή αλλά καμπύλη , οι μεταβλητές έχουν στατιστική εξάρτηση αλλά Συντελεστής συσχέτισης ρ=0



<u>παράδειγμα</u>
Κάνω ένα πείραμα σημαδεύοντας σε στόχο γύρω από το 0. Τα νούμερα που λαμβάνω δημιουργούν μια τυχαία μεταβλητή Χ που έχει μέση τιμή μ και απόκλιση σ.
Αν από την μεταβλητή Χ δημιουργήσω την Y=2X, οι μεταβλητές Χ και Υ είναι στατιστικά μη ανεξάρτητες και έχουν ρ=1 , εάν δημιουργούσα την Y=-3X θα είχαμε ρ=-1.
Αν συνεχίζοντας το πείραμα έφερνα και ένα δεύτερο σκοπευτή να στοχεύει γύρω από ένα δεύτερο ίδιο στόχο δημιουργώντας μια μεταβλητή Υ αυτή θα ήταν ανεξάρτητη από την Χ.
Ψάχνω τώρα την κατανομή του ζευγαριού (χ,y). Θα ήταν και αυτή κανονική με ρ=0 εφόσον Χ και Υ είναι ανεξάρτητες ή θα ήταν ρ≠0 αν η επίδοση του ενός επηρέαζε την επίδοση του άλλου.

Για να αποδείξουμε τα παραπάνω θα υπολογίσουμε τον συντελεστή συσχέτισης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών Χ και Υ.

Από τον ορισμό

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(x)} \cdot \sqrt{Var(y)}} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Θα υπολογίσω αρχικά την συνδιακύμανση των X και Y.

$$COV(X,Y) = E[(X - n_X)\cdot(Y - n_Y)] = E[XY] - n_X n_Y =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{xyf}_{XY}(x,y)dxdy - n_X n_Y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{xyf}_X(x)\mathrm{f}_Y(y)dxdy - n_X n_Y =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{xf}_X(x)\,\mathrm{yf}_Y(y)\,dxdy - n_X n_Y = \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{xf}_X(x)[\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{yf}_Y(y)dy]dx - n_X n_Y =$$

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{xf}_X(x)[n_Y]dx - n_X n_Y = n_Y \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{xf}_X(x)dx - n_X n_Y = n_Y n_X - n_X n_Y = 0$$

Άρα βλέπουμε ότι σε δυο ανεξάρτητες στατιστικά μεταβλητές η συνδιακύμανση τους είναι ίση με μηδέν και κατ επέκταση και ο συντελεστής συσχέτισής τους είναι μηδέν.

<u>ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΗΣΗΣ ΔΥΟ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΝΩΝΙΚΩΝ ΤΜ</u>

Θα υποθέσουμε ότι $n_x n_y = 0$ οπότε από τον ορισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E\left[(x-n_x)(y-n_y)\right]}{\sigma_x \sigma_y} \xrightarrow{n_x n_y = 0} \rho = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} \Rightarrow E[xy] = \rho \sigma_x \sigma_y$$

$$E[xy] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{(\frac{x}{\sigma_1}-\rho\frac{y}{\sigma_2})^2+(1-\rho^2)\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}} dxdy =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\; e^{-\frac{1}{2\cancel{(1-\rho^2)}}\cancel{(1-\rho^2)}\frac{y^2}{\sigma_2^2}} x\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x}{\sigma_1}-\rho\frac{y}{\sigma_2})^2} dxdy =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x}{\sigma_1}-\rho\frac{y}{\sigma_2})^2} dx \right) dy =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}(x-\frac{\rho y \sigma_1}{\sigma_2})^2} dx \right) dy =$$

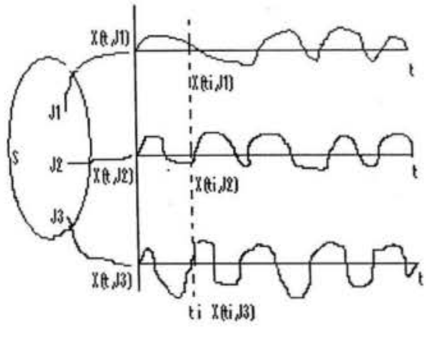
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-\frac{\rho y\sigma_1}{\sigma_2})^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}} dx \right) dy =$$

Εδώ θα παρατηρήσουμε ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα μοιάζει με κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $(\sigma_1\sqrt{1-\rho^2})$ και μέση τιμή $\left(\dfrac{\rho y \sigma_1}{\sigma_2}\right)$. επίσης στο εσωτερικό ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι στην θέση της $g(x)$ υπάρχει το x οπότε και το ολοκλήρωμα είναι ίσο με την μέση τιμή της κατανομής.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \rho\, y \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\, dy = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\, dy \right) =$$

$$\rho \frac{\sigma_1}{\cancel{\sigma}_2}(\sigma_2{}^{\cancel{2}}) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ



Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα και παίρνουμε τα J αποτελέσματα. Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων μας δημιουργούν τον χώρο S. Τα J αποτελέσματα αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου και μας δίνουν ένα σύνολο συναρτήσεων $\{X(t,J_1), X(t,j_2),.....X(t,J_n)\}$

Το σύνολο των συναρτήσεων αυτών ονομάζεται στοχαστική διαδικασία.

Κάθε συνάρτηση $X(t,J_i)$ ονομάζεται μέλος της διαδικασίας. Για κάθε $t = t_i$ σταθερό και το J να μεταβάλλεται ορίζεται μια τυχαία μεταβλητή $X(t_i, J)$. Και έχοντας σταθερά και τα δύο $t = t_i \quad J = J_n$ μας δίνουν έναν αριθμό πχ το αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής του πειράματος την χρονική στιγμή t=2sec

Εξ ορισμού δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία σημαίνει, την ύπαρξη άπειρου αριθμού τυχαίων μεταβλητών, μία για κάθε t στο διάστημα $-\infty < t < +\infty$ και ορίζεται η από κοινού συνάρτηση κατανομής σαν

$$F_{x(t_1),x(t_2)..x(t_n)} = P[(x_{t_1}) \le x_1, (x_{t_2}) \le x_2 \ldots (x_{t_n}) \le x_n]$$

Και αντίστοιχα η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{x(t)}(x)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n}F_{x(t)}(x)$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι είναι δύσκολο να έχουμε μια από κοινού κατανομή που να περιγράφει πλήρως μια διαδικασία οπότε και κάνουμε χρήση της μέσης τιμής και των συναρτήσεων συσχέτισης και συμμεταβλητότητας για να έχουμε μια πιο γενική αλλά ικανοποιητική περιγραφή της ανέλιξης

Μέση τιμή

Έχουμε το στοχαστικό σήμα x(t) και ενδιαφερόμαστε για την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X(t_1)$ παρατηρώντας την διαδικασία την στιγμή t_1. Η έκφραση που μας δίνει αυτή την τιμή είναι $E[X(t_1)]$ και γενικά για μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X(t) είναι $E[X(t)]$ και υπολογίζεται από την σχέση

$$\mathrm{E}[x(t)]=m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)f_{x(t)}(x)dx\ .$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση του χρόνου και όχι τυχαία μεταβλητή.

Αντίστοιχα υπολογίζουμε και την διασπορά της Τ.Μ

$$\sigma^2=E[X(t)-m(t)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[X(t)-m(t)]^2\cdot f_{x(t)}(x)d(x)$$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$E[x(t_1),x(t_2)]=R(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\cdot f_{x(t_1),x(t_2)}(x_1,x_2)dx_1x_2$$

Αποτελεί συνάρτηση των t1,t2 και όχι τυχαία μεταβλητή.

ΣΤΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Αυστηρά στατική ή στατική με την στενή έννοια

Έστω ότι έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη $x(t)$ και ορισμένες χρονικές στιγμές $t_1,t_2,\ldots,t_n$. Θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη είναι αυστηρά στατική ή στατική με την στενή έννοια εάν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παραμένει αμετάβλητη δηλ.

$$f[x(t_1),x(t_2)\ldots x(t_n)]=f[x(t_1+\tau),x(t_2+\tau)\ldots x(t_n+\tau)]$$

Η αυστηρή στασιμότητα δεν εφαρμόζεται εύκολα στην πράξη, δεδομένης της δυσκολίας ύπαρξης από κοινού συνάρτησης που να ορίζει όλη την διαδικασία.

Στάσιμο υπό την ευρεία έννοια WSS wide sense stationary

Συνήθως χρησιμοποιείται ένα άλλο μοντέλο που ονομάζεται στάσιμο υπό την ευρεία έννοια στο οποίο, α) το m(t) μέση τιμή της x(t) είναι ανεξάρτητη του t και β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης R(t1,t2) είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς t1-t2 .

Το ότι $R(t_1,t_2)$ εξαρτάται μόνο από την διαφορά $t_1 - t_2$ διατυπώνεται και ως εξής:

$R(t,t+\tau) = R(\tau)$ για όλα τα t

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}[x(t),x(t+\tau)] = R(\tau) \\ \mathrm{E}[x(t)] = m \end{array}\right. \Leftrightarrow x(t) = w.s.s$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ R(t)

1) $R(0) = \mathrm{E}[x(t+0)x(t)] = \mathrm{E}[x^2(t)] > 0$

2) $|R(\tau)| \le R(0)$ έχει την μέγιστη τιμή στο τ=0

3) $R(-\tau) = R(\tau)$ $R(\tau)$ άρτια συνάρτηση

Απόδειξη

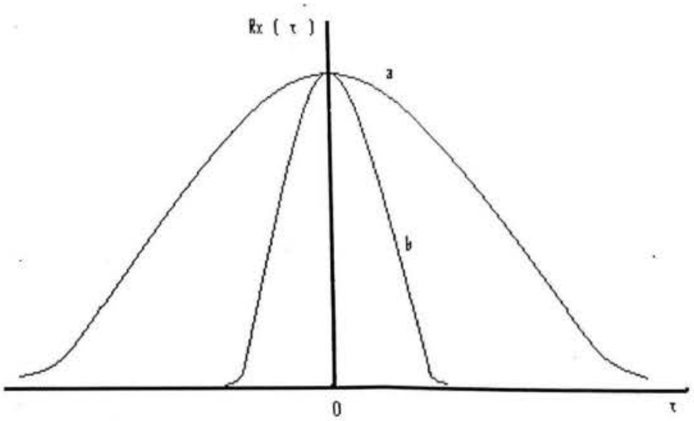
$$R(-\tau) = \mathrm{E}[x(t-\tau)x(t)] =$$

$$\mathrm{E}[x(t-\tau)\cdot x\{t(-\tau)+\tau\}] = \qquad \ldots(t-\tau) = t^*$$

$$\mathrm{E}[x(t^*)\cdot x\{t^*+\tau\}] =$$

$$\mathrm{E}[x\{t^*+\tau\}x(t^*)] = R(\tau)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μας παρέχει ένα τρόπο περιγραφής της αλληλεξάρτησης των δύο μεταβλητών της ανέλιξης που παρατηρούμε και οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κατά χρόνο τ. Για μία ανέλιξη η οποία μεταβάλλεται γρήγορα, είναι εύκολο να κατανοήσουμε ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μικραίνει απότομα με την αύξηση του τ (της απόστασης των παρατηρήσεων) [γραμμή b]. Το αντίστροφο συμβαίνει με τις ανελίξεις που έχουν αργή μεταβολή [γραμμή a].



Παράδειγμα

Έχουμε ημιτονικό σήμα $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta)$ όπου A και f_c αποτελούν σταθερές ενώ η φάση θ τυχαία μεταβλητή με κατανομή

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_x(\tau) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(t-\tau)\,\mathrm{X}(t)] =$$
$$E\left[A\cos[2\pi f_c(t+\tau)+\theta]\,A\cos(2\pi f_c t+\theta)\right] =$$
$$E\left[A^2\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + \theta)\cos(2\pi f_c t + \theta)\right] =$$
$$E\left[\frac{A^2}{2}[\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + \theta + 2\pi f_c t + \theta) + \cos(2\pi f_c t + \cancel{2\pi f_c\tau} + \cancel{\theta} - \cancel{2\pi f_c t} - \cancel{\theta})\right] =$$
$$\frac{A^2}{2}E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta) + \cos(2\pi f_c t)\right] =$$
$$\frac{A^2}{2}\left\{E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta)\right] + \cos(2\pi f_c t)\right\} =$$
$$\frac{A^2}{2}E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta)\right] + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c t)$$

Ο δεύτερος όρος αποτελεί σταθερά οπότε και δεν υπολογίζεται στο ολοκλήρωμα

$$E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta)\right] =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta)\right]f_\theta(\theta)d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\theta)\right]\frac{1}{2\pi}d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\cos(2\theta) - \sin(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\sin(2\theta)d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\cos(2\theta)d\theta - \int_0^{2\pi}\sin(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\sin(2\theta)d\theta\right] =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)d\theta - \sin(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)d\theta\right] =$$
$$\left\langle \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\sin 0 - \sin 4\pi\right] = \frac{1}{2}[0-0] = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\left[\cos 0 - \cos 4\pi\right] = -\frac{1}{2}[1-1] = 0 \end{array} \right\rangle$$
$$\frac{1}{2\pi}\left[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\cdot 0 - \sin(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau)\cdot 0\right] = 0$$

Άρα

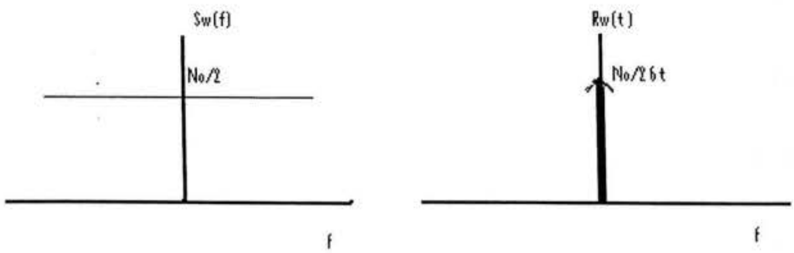
$$R_x(\tau) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(t-\tau)\,\mathrm{X}(t)] = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c t)$$

<u>Λευκός θόρυβος</u> είναι μία στοχαστική ανέλιξη $x(t)$ που έχει σταθερή συνάρτηση πυκνότητας ισχύος για κάθε f ίση με $N_0 / 2$ και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μηδέν για $\tau \neq 0$ πράγμα που σημαίνει ότι κάθε σήμα λευκού θορύβου είναι ασυσχέτιστο με το επόμενο του. Ο λόγος ½ μεταφράζεται στο ότι η ισχύς του είναι εξίσου μοιρασμένη στις αρνητικές και θετικές συχνότητες.

$$R(\tau) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau \neq 0$$

Δηλ

$$R(\tau) = \frac{\mathrm{N}_0}{2}\delta(\tau) \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau \neq 0$$



Ο λευκός θόρυβος αποτελεί την έκφραση του απόλυτα τυχαίου και είναι αντίστοιχος της κρουστικής συνάρτησης στην μελέτη των γραμμικών συστημάτων.

<u>Εργοδική διαδικασία</u>

Εργοδικές ονομάζουμε τις διαδικασίες στις οποίες η στατιστικά μέση τιμή τους είναι ίση με την χρονικά μέση τιμή τους .
Ποιες είναι αυτές:
Για μια διαδικασία, σαν «χρονική» ορίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης μέλους, δηλαδή σε μια σειρά πειραμάτων παίρνουμε την μέση τιμή ενός μόνο εκ των πειραμάτων. Σαν «στατιστική» ορίζεται η μέση τιμή των τιμών μιας συγκριμένης χρονικής στιγμής πχ t_0 από όλα τα πειράματα ή όπως έχουμε ορίσει σε προηγούμενη παράγραφο είναι η $E[X(t_0)]$.
Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω αν έχουμε ένα μόνο δείγμα από μια διαδικασία η οποία ξέρουμε ότι είναι εργοδική μας αρκεί για να υπολογίσουμε (εκτιμήσουμε) και τις επόμενες.

Ο μετασχηματισμός Fourier της R(τ) συμβολίζεται με S(f) ονομάζεται συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισχύος και έχει την ιδιότητα εκτός από πραγματική συνάρτηση της f παίρνει πάντα μη αρνητικές τιμές. Δηλ. είναι πάντα $S(f) \geq 0$ Ήτοι η S(f) δείχνει την κατανομή της ισχύος στην συχνότητα (την στατιστικά μέση ισχύ της ανέλιξης)
Για να αποδείξουμε τα παραπάνω θα κάνουμε ένα μικρό ταξίδι

Απόδειξη φασματικής πυκνότητας ισχύος στοχαστικής ανέλιξης

Έστω στατική υπό την ευρεία έννοια στοχαστική ανέλιξη x(t) οδηγείται στην είσοδο ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος που έχει συνάρτηση μεταφοράς H(f)
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\Im^{-1}\{H(f)\}$ είναι η κρουστική απόκριση h(t) του συστήματος. Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις στατιστικές ιδιότητες του σήματος (ανέλιξης) εξόδου του συστήματος που θα το συμβολίζουμε με y(t).

1) ποια είναι η $E\{y(t)\}=?$

Γνωρίζουμε ότι $y(t)=x(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Άρα υπολογίζοντας την μέση τιμή της συνέλιξης

$$E\{y(t)\}=E\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau\}=\int_{-\infty}^{+\infty} E\{x(t-\tau)h(\tau)\}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\{x(t-\tau)\}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)m_x d\tau=m_x\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau=m_x H(0)$$

Η $x(t)$ είναι WSS οπότε έχει σταθερό $E\{x(t)\}=E\{x(t+\tau)\}=m_x$ για όλα τα t.
Επομένως
$E\{y(t)\}=m_x\cdot H(0)=E\{x(t)\}\cdot H(0)=$ σταθερή τιμή ******

2) Ψάχνουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτησης $R_y(\tau)$ συναρτήσει των $R_x(\tau)=R(\tau)$ και H(f).

Έχουμε $y(t)=\int x(t-\sigma)\cdot h(\sigma)d\sigma$

$$R_y(\tau)=E\{y(t-\tau)y(t)\}=$$

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-v)h(v)\,dv\,\square\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)\,du\}=E\{\int_{-\infty_v}^{+\infty}\int_{-\infty_u}^{+\infty} x(t+\tau-v)h(v)\;x(t-u)h(u)\,dvdu\}=$$

$$\int_{-\infty_v}^{+\infty}\int_{-\infty_u}^{+\infty} h(v)h(u)E\{x(t+\tau-v)\;x(t-u)\}dvdu=\int_{-\infty_v}^{+\infty}\int_{-\infty_u}^{+\infty} h(v)h(u)R[(\cancel{t}+\tau-v-\cancel{t}+u)]dvdu=$$

$$\int_{-\infty_v}^{+\infty}\int_{-\infty_u}^{+\infty} h(v)h(u)R[(\tau-v+u)]dvdu$$

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty_v}^{+\infty}\int_{-\infty_u}^{+\infty} h(v)h(u)R_x(\tau-v+u)\,dvdu$$

Οπότε ολοκληρώνοντας μας μένει σαν μεταβλητή μόνο η (τ)

Από τα (1) και (2) παρατηρούμε ότι η y(t) είναι στατική υπό την ευρεία έννοια γιατί η μέση τιμή της είναι σταθερή (ανεξάρτητη του t) και η αυτοσυσχέτηση της εξαρτάται μόνο από το «τ» ή καλύτερα από την διαφορά των t1-t2 όπου t1=t+τ και t2=t

Οπότε ας υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $R_y(\tau)$

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$\Im[R_y(\tau)] = S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty_\tau}^{+\infty} \int_{-\infty_u}^{+\infty} \int_{-\infty_v}^{+\infty} h(u)h(v) R_x(\tau - v + u) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau du$$

$$\int_{-\infty_\tau}^{+\infty} \int_{-\infty_u}^{+\infty} h(u)h(v) \int_{-\infty_v}^{+\infty} R_x(\tau - v + u) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau du dv =$$

$$\int_{-\infty_v}^{+\infty} \int_{-\infty_u}^{+\infty} h(u)h(v) \int_{-\infty_\tau}^{+\infty} R_x(\tau - v + u) e^{-j2\pi f\tau + (u-v)-(u-v)}\, d\tau du dv =$$

$$\int_{-\infty_v}^{+\infty} \int_{-\infty_u}^{+\infty} h(u)h(v)[\int_{-\infty_\tau}^{+\infty} R_x(\tau - v + u) e^{-j2\pi f(u-v+\tau)} e^{j2\pi f(u-v)}\, d(u-v+\tau)] du dv =$$

$$\int_{-\infty_v}^{+\infty} \int_{-\infty_u}^{+\infty} h(u)h(v) S_x(f)\, e^{j2\pi f(u-v)}\, du dv =$$

$$(\int_{-\infty_v}^{+\infty} h(v) e^{-j2\pi f v} dv)(\int_{-\infty_u}^{+\infty} h(u)\, e^{j2\pi f u}\, du)\, S_x(f) = H(f)H(-f)S_x(f) =$$

$$H(f)\overline{H(-f)}S_x(f) = |H(f)|^2\, S_x(f)$$

Η μέση ισχύς ενός σήματος $x(t)$ είναι ίση με

$$E[x^2(t)] = R_x(0) = [F^{-1}\{S_x(f)\}]_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, e^{j2\pi f 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$$

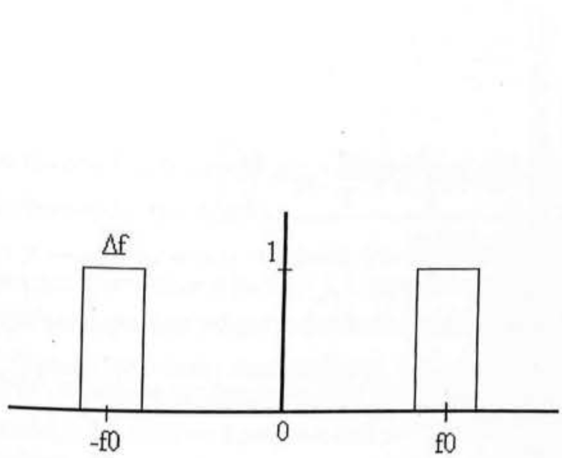
Και αυτό γιατί

$$R_x(\tau) = \mathrm{E}[x(t+\tau)x(t)] \xrightarrow{\tau=0} \mathrm{E}[x(t)x(t)] = \mathrm{E}[x^2(t)]$$

Ομοίως

$$E[y^2(t)] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ είναι ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο εύρους ζώνης Δf με κεντρική συχνότητα στην ζώνη την f0.



Τώρα έχουμε για την

$$E[y^2(t)] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\left|H(f)\right|^2 df =$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\int_{-f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{-f_0+\frac{\Delta f}{2}} S_x(f)\cdot 1\, df + \int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} S_x(f)\cdot 1\, df = 2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} S_x(f)\, df$$

Και αυτό γιατί η $S_x(f)$ είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας f

Για πολύ μικρό Δf είναι $E[y^2(t)] \approx 2S_x(f_0)\Delta f$.

Επειδή είναι $E[y^2(t)] \geq 0$ έχουμε $2S_x(f) \geq 0$ για όλα τα f0.

Άρα $S_x(f_0) \geq 0 \quad \forall f \in \Re$

Από την σχέση $E[x^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$ και το γεγονός ότι είναι $S_x(f) \geq 0$ μπορούμε να πούμε ότι η μέση ισχύς του σήματος $x(t)$ είναι κατανεμημένη σε όλες τις συχνότητες f και ότι ο τρόπος κατανομής της προσδιορίζεται από την $S_x(f)$. Η $S_x(f)$ είναι η πυκνότητα της μέσης ισχύος του σήματος $x(t)$ ως προς την συχνότητα f.

Αυτό ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά.

Για το ιδανικό στενό ζωνοπερατό φίλτρο που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως η μέση ισχύς $E[y^2(t)]$ του σήματος εξόδου $y(t)$ του φίλτρου είναι το μέρος της μέσης ισχύος $E[x^2(t)]$ του σήματος $x(t)$ που βρίσκεται στη ζώνη πλάτους Δf γύρο από την συχνότητα f0 . δηλ στη ζώνη $\left(f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right)$ και στις αντίστοιχες αρνητικές συχνότητες (αφού η f παίρνει τιμές από -∞ έως +∞).

Από την σχέση $E[y^2(t)] \approx 2S_x(f_0)\Delta f$ έχουμε $S_x(f_0) = \frac{E[y^2(t)]}{2\Delta f}$ και επειδή είναι $S_x(-f_0) = S_x(f_0)$ η μέση ισχύς του σήματος $x(t)$ μόνο στην ζώνη $\left(f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right)$ είναι ίση με $S_x(f_0)\Delta f$ (η μισή της $E[y^2(t)]$).

Άρα $S_x(f_0) = \dfrac{\text{Μέση ισχύς της } \chi^2(\tau) \text{ στην ζώνη} \left(f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right)}{\text{εύρος } \Delta f \text{ της ζώνης}}$

Αφήνοντας το Δf να τείνει στο 0 παίρνουμε ότι όντως η $S_x(f)$ είναι η πυκνότητα της μέσης ισχύος του σήματος $x(t)$ ως προς f δηλ. η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $x(t)$. Αν θέλουμε να βρούμε πόση μέση ισχύς του σήματος $x(t)$ βρίσκεται μέσα στην ζώνη f1,f2 (μιλάμε για θετικές πάντα συχνότητες) πρέπει να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\int_{-f_2}^{-f_1} S_x(f)df + \int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df = 2\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df$$

Τελικό συμπέρασμα : ο μετασχηματισμός Fourier $S_x(f)$ της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ ενός στοχαστικού σήματος $x(t)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος (μέση ισχύς) του σήματος $x(t)$. Το μέρος της μέσης ισχύος του σήματος που βρίσκεται από τη συχνότητα f1 έως την συχνότητα f2 είναι ίσο με $2\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df$.

Καλά όλα αυτά αλλά σε μια εφαρμογή μπορούμε πάντα να γνωρίζουμε την $R_x(\tau)$ ώστε να υπολογίσουμε την $S_x(f)$; Η απάντηση είναι όχι τι κάνουμε τότε ;πώς βρίσκουμε την $R_x(\tau)$;

Α) Ευτυχώς που υπάρχουν και οι εργοδικές στοχαστικές ανελίξεις. Σε μια τέτοια στοχαστική ανέλιξη αν έχουμε μια καταγραφή της, ήτοι ένα δείγμα υλοποίηση της δηλ, αν κάνουμε μια φορά το πείραμα που ορίζει τη στοχαστική μας ανέλιξη, θα λάβουμε μια συνάρτηση $x_i(t)$ για t από -∞ έως +∞ και από αυτή την συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτησης και άλλα στατιστικά-στοχαστικά μεγέθη της στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$. Αν ξανακάνουμε το πείραμα θα λάβουμε μια άλλη συνάρτηση $x_i(t)$ - υλοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$.Από την νέα $x_i(t)$ θα προκύψουν τα ίδια στοχαστικά μεγέθη της $x(t)$ που υπολογίσαμε από την προηγούμενη $x_i(t)$.Αυτό σημαίνει ότι η στοχαστική ανέλιξη $x(t)$ είναι εργοδική. Πολλές χρήσιμες στοχαστικές ανελίξεις στην πράξη είναι εργοδικές .

Τώρα ας πάμε στο πρακτικό πρόβλημα : Πως από μια καταγραφή $x_i(t)$ μιας εργοδικής στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$ θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης κτλ. της $x(t)$; Η εργοδικότητα μας λέει ότι τα στοχαστικά μεγέθη της $x(t)$ (στοχαστικές μέσες τιμές) είναι ίσα με τα αντίστοιχα χρονικά μεγέθη της $x_i(t)$ (χρονικές μέσες τιμές). Δηλ. είναι $E[x(t)] = m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)dt = \text{χρονική μέση τιμή} = m_{xi}$ και

$$E[x(t+\tau)x(t)] = R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t+\tau)\,\chi_i(t)dt = \text{χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης} = \Re_{xi}(\tau$$

Για εργοδική $x(t)$ έχουμε $m_{xi} = m_x$ και $R_x(\tau) = \Re_{xi}(\tau)$ για όλες τις τιμές του τ και για όλες τις υλοποιήσεις $x_i(t)$ της $x(t)$.

Έτσι για μια εργοδική στοχαστική ανέλιξη $x(t)$,από μια υλοποίηση-καταγραφή της $x_i(t)$ προσδιορίζουμε με τη χρονική ολοκλήρωση $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t+\tau)\, x_i(t)dt$ την $R_{xi}(\tau)$ και από αυτήν με μετασχηματισμό Fourier υπολογίζουμε την $S_x(f)$ της $x(t)$. Το ότι η χρονική ολοκλήρωση να γίνει πρακτικά από -∞ έως +∞ μας κάνει να νοιώθουμε λίγο άβολα, αλλά τι να γίνει;

Β) Αν η στοχαστική μας ανέλιξη $x(t)$ δεν είναι εργοδική τι κάνουμε ; Για διάφορες υλοποιήσεις $x_i(t)$ της $x(t)$ τα m_{xi} δεν είναι ίσα μεταξύ τους (ούτε και ίσα με την m_x), καθώς επίσης οι διαφορές $R_{xi}(\tau)$ δεν είναι ίσες μεταξύ τους (ούτε και ίσες με την $R_x(\tau)$). Άραγε μπορούμε από την $x_i(t)$ να υπολογίσουμε-εκτιμίσουμε την $S_x(f)$ και πώς;

Πρώτα ας υπολογίσουμε την $E[R_{xi}(\tau)]$.Έχουμε:

$$E[R_{xi}(\tau)] = E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t+\tau)x_i(t)dt\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x_i(t+\tau)x_i(t)]dt =$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(\tau)dt = R_x(\tau)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = R_x(\tau)\frac{1}{T}T = R_x(\tau)$$

καλό αυτό.

Άραγε αν υπολογίζαμε τον

$$S_{xi}(f) = \Im\{R_{xi}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad **$$

τι σχέση έχει αυτή με την $S_x(f)$;

Είναι :

$$E[S_{xi}(f)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[R_{xi}(\tau)]e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = S_x(f)$$

και αυτό καλό.

Αν η $S_{xi}(f)$ ήταν η φασματική πυκνότητα ισχύος της υλοποίησης $x_i(t)$ της $x(t)$ θα λέγαμε ότι από την $x_i(t)$ υπολογίζουμε πρώτα την $R_{xi}(\tau)$ και από αυτήν τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{xi}(f)$ της $x_i(t)$. Αφού είναι $E[S_{xi}(f)] = S_x(f)$,περιμένουμε η $S_{xi}(f)$ να είναι «κάπως κοντά» στην $S_x(f)$. Όμως η $S_{xi}(f)$ με τίποτα δεν είναι κάποια φασματική πυκνότητα ισχύος. Απλά, η $R_{xi}(\tau)$ είναι μια άρτια συνάρτηση του τ που προήλθε από την υλοποίηση $x_i(t)$ της $x(t)$ και η $S_{xi}(f)$ η είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνάρτησης $R_{xi}(\tau)$, άρα $S_{xi}(f)$ είναι μια πραγματική και άρτια συνάρτηση της f. Ποιος μας εξασφαλίζει ότι είναι και $S_{xi}(f) \geq 0$ για όλα τα f ώστε να είναι φασματική πυκνότητα ισχύος; Πρέπει να ακολουθήσουμε διαφορετικό δρόμο:

Ας κάνουμε μια παρένθεση και ας θυμηθούμε τα σχετικά με τον μετασχηματισμό Fourier ενός ντετερμινιστικού σήματος (μη στοχαστικού σήματος) $x(t)$ την ολική ενέργεια του τη φασματική πυκνότητα αυτής κτλ.

Μετασχηματισμός Fourier $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

Αντίστροφος ΜF $X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(f)e^{j2\pi ft}dt$

Ολική ενέργεια του σήματος $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$

όπου $x^2(t)$ είναι η στιγμιαία ισχύς του σήματος $x(t)$.

Θεώρημα Parseval: $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df$

απόδειξη :

$$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}(\int_{u=-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi ut}du)\cdot(\int_{u=-\infty}^{+\infty} x(\lambda)e^{j2\pi\lambda t}d\lambda)dt$$

Αφού το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα μπορούμε να γράψουμε και

$$x(t)=\overline{x(t)}=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\overline{X(\lambda)e^{j2\pi\lambda t}}d\lambda=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\overline{X}(\lambda)e^{-j2\pi\lambda t}d\lambda)$$

Έτσι έχουμε

$$E_x=\int_{t=-\infty}^{+\infty}(\int_{u=-\infty}^{+\infty}X(u)e^{j2\pi ut}du)(\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\overline{X}(\lambda)e^{-j2\pi\lambda t}d\lambda)dt=$$

$$\int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty}X(u)\overline{X}(\lambda)(\int_{t=-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi(u-\lambda)t}dt)dud\lambda$$

Όμως

$$\Im\{\delta(t)\}=1\Rightarrow\Im^{-1}\{1\}=\delta(t)\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}df=\delta(t)$$

Γράφοντας t αντί για f και f αντί για t, αυτή δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi tf}dt=\delta(f)\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}dt=\delta(f)$$

Επομένως

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi(u-\lambda)t}dt=\delta(u-\lambda)$$

Έχουμε

$$E_x = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} X(u)\overline{X}(\lambda)\delta(u-\lambda)du d\lambda = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \overline{X}(\lambda)\delta(u-\lambda)d\lambda \Big) X(u)du =$$

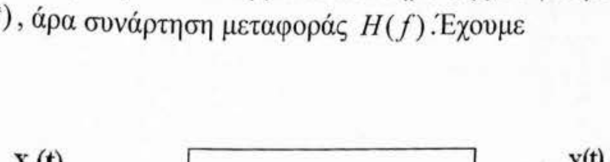
$$\int_{u=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \overline{X}(\lambda)\delta(\lambda-u)d\lambda \Big) X(u)du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{\lambda=u^-}^{u^+} \overline{X}(\lambda)\delta(\lambda-u)d\lambda \Big) X(u)du =$$

$$\int_{u=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{\lambda=u^-}^{u^+} \overline{X}(u)\delta(\lambda-u)d\lambda \Big) X(u)du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \overline{X}(u) \Big(\int_{\lambda=u^-}^{u^+} \delta(\lambda-u)d\lambda \Big) X(u)du =$$

$$\int_{u=-\infty}^{+\infty} \overline{X}(u)(1)X(u)du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} |X(u)|^2 du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Τέλος με την απόδειξη του θεωρήματος Parseval .

Ας οδηγήσουμε το ντετερμινιστικό σήμα $x(t)$ σε φίλτρο που έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, άρα συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$.Έχουμε

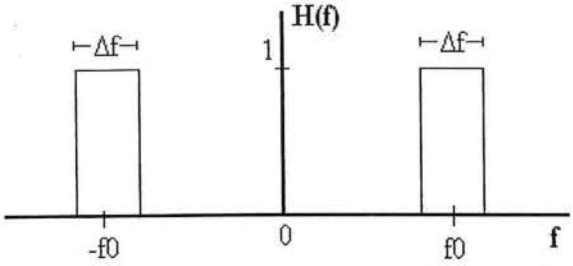


$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad \kappa\alpha\acute{\iota} \quad Y(f) = X(f)H(f)$$

Ολική ενέργεια του σήματος $y(t)$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

Τώρα θεωρούμε ότι το φίλτρο μας είναι ιδανικό ζωνοπερατό (πολύ στενό) φίλτρο που έχει ζώνη διέλευσης πλάτους Δf γύρο από τη συχνότητα f0. Η απόκριση πλάτους του (που είναι και η συνάρτηση μεταφοράς του αφού το φίλτρο είναι ιδανικό) είναι:



Τώρα έχουμε:

$$Y(f)=\begin{cases} X(f) & \textit{γιά } f \textit{ στη ζώνη διέλευσης του φίλτρου} \\ 0 & \textit{γιά } f \textit{ έξω από τη ζώνη διέλευσης του φίλτρου} \end{cases}$$

Έτσι : Ey= ολική ενέργεια του $y(t)$

$$E_y=\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(f)|^2\,df=\int_{-f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{-f_0+\frac{\Delta f}{2}}|X(f)|^2\,df+\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}}|X(f)|^2\,df=$$

$$2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}}|X(f)|^2\,df$$

Αφού είναι $|X(-f)|=|X(f)|\ \forall f\in R$

Για πολύ μικρό Δf έχουμε $E_y=2|X(f_0)|^2\,\Delta f$ =το μέρος της ενέργειας του σήματος x(t) που βρίσκεται στη ζώνη συχνοτήτων πλάτους Δf γύρο από τη συχνότητα $f_0\Rightarrow\dfrac{E_y}{2\Delta f}=|X(f_0)|^2$.

Θεωρώντας ότι $\Delta f\to 0$ δηλ. ότι το Δf γίνεται df, παίρνουμε ότι $\dfrac{dE_y}{2df}=|X(f_0)|^2$ Δηλ. το $|X(f_0)|^2$ είναι η φασματική πυκνότητα της ενέργειας του σήματος x(t). Το μέρος της ενέργειας του σήματος x(t) που βρίσκεται (είναι κατανεμημένο) από την συχνότητα f1 μέχρι την συχνότητα f2 είναι ίσο με

$$\int_{-f_2}^{-f_1}|X(f)|^2\,df+\int_{f_1}^{f_2}|X(f)|^2\,df=2\int_{f_1}^{f_2}|X(f)|^2\,df$$

(μιλάμε για θετικές συχνότητες δηλ. για συχνότητες όπως τις ξέραμε πριν τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier).

Εδώ τελειώνει η παρένθεση.

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι η x(t) είναι μια μη εργοδική στοχαστική ανέλιξη η οποία βέβαια είναι στατική υπό την ευρεία έννοια ,δηλ. για την οποία έχουμε $E[x(t)] = m_x$ =ανεξάρτητη του χρόνου t και $E[x(t+\tau)x(t)] = R_x(\tau)$ =ανεξάρτητη του χρόνου t. Θεωρούμε μια καταγραφή –υλοποίηση αυτής $x_i(t)$ είναι ντετερμινιστικό (μη στοχαστικό) σήμα. Θα εφαρμόσουμε σ' αυτό τα σχετικά με το μετασχηματισμό Fourier , την ενέργεια κτλ. που είπαμε προηγουμένως για ντετερμινιστικά σήματα. Αφού η μέση ισχύς της στοχαστικής ανέλιξης x(t) είναι ίση με $E[x^2(t)] = R_x(0) > 0$, η μέση ολική ενέργεια είναι άπειρη ως ίση με $R_x(0)$ επί τον άπειρο χρόνο που υπάρχει μεταξύ των -∞ και +∞.

Αφού η μέση ενέργεια της x(t) είναι άπειρη , οι υλοποιήσεις $x_i(t)$ αυτής θα είναι στατιστικά μη ενεργειακά σήματα . Για τον λόγο αυτό θα ασχοληθούμε με τη χρονική μέση ισχύ του σήματος $x_i(t)$. Η ενέργεια του σήματος $x_i(t)$ στο χρονικό διάστημα $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ είναι ίση με $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i^2(t)dt$, οπότε η μέση ισχύς του στο εν λόγω διάστημα είναι ίση με $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i^2(t)dt$

Αν πάρουμε το όριο αυτής της ποσότητας όταν το T τείνει στο άπειρο θα έχουμε λάβει τη (γενική) μέση ισχύ της καταγραφής $x_i(t)$ της στοχαστικής ανέλιξης x(t).

Επειδή θα δουλέψουμε αρκετά στο διάστημα $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ ορίζουμε τα σήμα $x_{Ti}(t)$ ως εξής

$$x_{Ti}(t) = \begin{cases} x_i(t) & \alpha\nu \ -\frac{\mathrm{T}}{2} < t < \frac{\mathrm{T}}{2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$ δηλ. ορίζουμε το σήμα $x_{Ti}(t)$ ως $x_{Ti}(t) = [u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})]$

Όπου u(t) η βηματική συνάρτηση .

Ας είναι $X_{Ti}(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_{Ti}(t)$. Η φασματική πυκνότητα της ενέργειας του σήματος $x_{Ti}(t)$ είναι ίση με $|X_{Ti}(f)|^2$. Σε διάστημα συχνοτήτων εύρους Δf γύρο από τη συχνότητα f όπου Δf πολύ μικρό διάστημα , η ενέργεια του σήματος $X_{Ti}(f)$ είναι ίση με $2|X_{Ti}(f)|^2 \Delta f$. Αρα το μέρος της ισχύος του σήματος $x_{Ti}(t)$ που βρίσκεται στο εν λόγω διάστημα συχνοτήτων είναι ίση με $\frac{2\Delta f|X_{Ti}(f)|^2}{T}$. Επομένως η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $x_{Ti}(t)$ στη συχνότητα f είναι ίση με

$$\frac{1}{2\Delta f}\left(\frac{2\Delta f|X_{Ti}(f)|^2}{T}\right) = \frac{X_{Ti}(f)}{T}$$

Αυτή ας την συμβολίσουμε με $S_{X_{Ti}}(f)$ δηλ. $S_{X_{Ti}}(f) = \frac{1}{T}|X_{Ti}(f)|^2$. Η φασματική πυκνότητα ισχύος της καταγραφής $x_i(t)$ της στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$ είναι το όριο της $S_{X_{Ti}}(f)$ όταν Τ→∞, αφού όταν το Τ→∞ η $x_{Ti}(t)$ τείνει στην $x_i(t)$.τη φασματική πυκνότητα ισχύος της $x_i(t)$ τη συμβολίζουμε με $S_{X_i}(f)$.

Έτσι έχουμε :

$$S_{X_i}(f) = \lim_{T\to\infty} S_{X_{Ti}}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|X_{Ti}(f)\right|^2 \geq 0 \quad \forall f \in R$$

Δείτε πόσο διαφορετικός είναι ο ορισμός της $S_{X_i}(f)$ από αυτόν που εικάσαμε στην σελίδα 48 γραμμή **

Ας δουλέψουμε πάνω στα $S_{X_{Ti}}(f)$ και $S_{X_i}(f)$.

Έχουμε:

$$\left|X_{Ti}(f)\right|^2 = X_{Ti}(f)\overline{X_{Ti}(f)} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t_2)e^{-j2\pi f t_2}dt_2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t_1)e^{j2\pi f t_1}dt_1 =$$

$$\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t_2)x(t_1)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}dt_2dt_1 \qquad ***$$

Άρα

$$S_{x_{Ti}}(f) = \frac{1}{T}\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t_2)x(t_1)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}dt_2dt_1 \quad \text{και} \quad S_{xi}(f) = \lim_{T\to\infty} S_{x_{Ti}}(f)$$

Αυτό το αποτέλεσμα (δηλ το $S_{xi}(f)$) εξαρτάται από την εκάστοτε καταγραφή της $x_i(t)$ της $x(t)$ και αποτελεί τη φασματική πυκνότητα ισχύος της καταγραφής $x_i(t)$ και φυσικά, εξαρτάται από την εκάστοτε καταγραφή $x_i(t)$.
Είναι λογικό να ορίσουμε ως μέση φασματική πυκνότητα ισχύος τη μέση τιμή (δηλ την αναμενόμενη τιμή) της $S_{xi}(f)$ ως προς όλες τις καταγραφές $x_i(t)$, δηλ. να ορίσουμε

$$S_x(f) = E[S_{xi}(f)\} = E[\lim_{T\to\infty} S_{x_{Ti}}(f)]$$

Αυτό το μέγεθος θα το ονομάζουμε και φασματική πυκνότητα ισχύος της μη εργοδικής στοχαστικής ανέλιξης x(t). Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι είναι $S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\}$

Έχουμε :

$$S_x(f) = E[\lim_{T\to\infty} S_{x_{Ti}}(f)] = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t_2)x_i(t_1)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2\right\} =$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x_i(t_2)x_i(t_1)]e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2 =$$

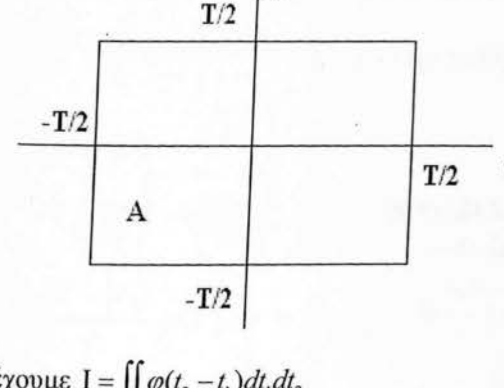
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(t_2-t_1)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

Θέτουμε $\varphi(\tau) = R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}$ οπότε έχουμε

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t_2-t_1)dt_1dt_2 = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{I}}{T}$$

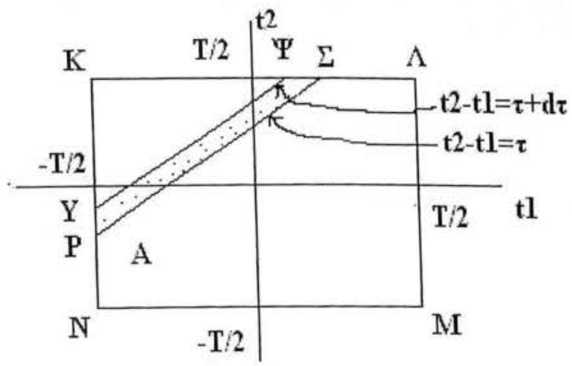
Όπου με I συμβολίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{t_2=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t_2-t_1)dt_1dt_2$

Το πεδίο ολοκλήρωσης είναι ένα τετράγωνο πλευράς T όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Έτσι έχουμε $\mathrm{I} = \iint_A \varphi(t_2-t_1)dt_1dt_2$

Αντί ως στοιχειώδη επιφάνεια ολοκλήρωσης να πάρουμε ένα τετράγωνο διαστάσεων dt1x dt2 παίρνουμε μια λωρίδα του τετραγώνου Α κατά μήκος της οποίας η διαφορά t2-t1 έχει σταθερή τιμή τ. καλύτερα, ως στοιχειώδη επιφάνεια για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I παίρνουμε τη στοιχειώδη λωρίδα που οριοθετείται από τις γραμμές t2-t1=τ , t2-t1=τ+dτ και τις πλευρές του τετραγώνου . Σ' αυτή τη λωρίδα το στοιχειώδες ολοκλήρωμα dI είναι ίσο με φ(τ) επί το εμβαδόν της στοιχειώδους λωρίδας. Για τ>0 η εικόνα της λωρίδας έχει ως εξής:



Η ευθεία ΡΣ έχει εξίσωση t2-t1=τ , οπότε το σημείο Σ έχει τετμημένη t1 τέτοια ώστε $\frac{T}{2}-t_1=\tau \Rightarrow t_1=\frac{T}{2}-\tau$. Ομοίως ο σημείο Ψ έχει τετμημένη ίση με $\frac{T}{2}-\tau-d\tau$

Έχουμε $\mathrm{K\Sigma}=\frac{\mathrm{T}}{2}+(\frac{\mathrm{T}}{2}-\tau)=\mathrm{T}-\tau$ και $\mathrm{K\Psi}=\frac{\mathrm{T}}{2}+(\frac{\mathrm{T}}{2}-\tau-d\tau)=\mathrm{T}-\tau-d\tau$

Το εμβαδόν της στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με

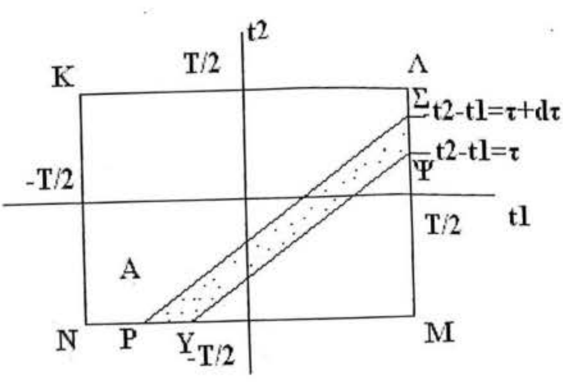
$$(\mathrm{KP\Sigma})-(\mathrm{KY\Psi})=\frac{1}{2}(\mathrm{K\Sigma})^2-\frac{1}{2}(\mathrm{K\Psi})^2=\frac{1}{2}(\mathrm{K\Sigma}+\mathrm{K\Psi})(\mathrm{K\Sigma}-\mathrm{K\Psi})=$$

$$\frac{1}{2}(2\mathrm{T}-2\tau-d\tau)\cdot dt=(\mathrm{T}-\tau)d\tau-\cancel{\frac{1}{2}(d\tau)^2}$$

Επομένως το στοιχειώδες ολοκλήρωμα dI είναι ίσο με $(\mathrm{T}-\tau)-\varphi(\tau)d\tau$

Με τ=0 το σημείο Σ ταυτίζεται με το Λ και με T=τ το σημείο Σ ταυτίζεται με το Κ. έτσι έχουμε 0≤τ≤T για τις λωρίδες μισού τετραγώνου που οριοθετείται από τη διαγώνιο ΝΛ και το σημείο Κ.

Για τ<0 η εικόνα της στοιχειώδους λωρίδας έχει ως εξής:



Η τεταγμένη t2 του σημείου Σ είναι τέτοια ώστε $t_2 - \frac{T}{2} = \tau + d\tau \Rightarrow t_2 = \frac{T}{2} + \tau + d\tau$

Και του σημείου Ψ τέτοια ώστε $t_2 - \frac{T}{2} = \tau \Rightarrow t_2 = \frac{T}{2} + \tau$

Αρα

$$\mathrm{M\Sigma} = \frac{\mathrm{T}}{2} + (\frac{T}{2} + \tau + d\tau) = \mathrm{T} + \tau + d\tau \quad \textit{καί}$$

$$\mathrm{M\Psi} = \frac{\mathrm{T}}{2} + (\frac{T}{2} + \tau) = \mathrm{T} + \tau$$

Το εμβαδών της στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με

$$\frac{1}{2}(\mathrm{M\Sigma})^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{M\Psi})^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{M\Sigma} + \mathrm{M\Psi})(\mathrm{M\Sigma} - \mathrm{M\Psi}) =$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{T} + \tau + d\tau + \mathrm{T} + \tau)(\mathrm{T} + \tau + dt - \mathrm{T} - \tau) =$$

$$\frac{1}{2}(2\mathrm{T} + 2\tau + d\tau)dt = (\mathrm{T} + \tau)d\tau + \cancel{\frac{1}{2}(d\tau)^2}$$

Επομένως, το στοιχειώδες ολοκλήρωμα dI τώρα είναι ίσο με (T+τ)φ(τ)dτ. Με τ=0 το σημείο Ψ ταυτίζεται με το Λ και με τ=-T το σημείο Ψ ταυτίζεται μ το Μ. έτσι για τις λωρίδες του μισού τετραγώνου που οριοθετείται από τη διαγώνιο ΝΛ και το σημείο Μ, έχουμε $-\mathrm{T} \leq \tau \leq 0$.
Οι σχέσεις (T-τ)dτ, για τ>0 και (T+τ),για τ<0 ,γράφονται ενιαία ως $(\mathrm{T} - |\tau|)d\tau$ με το τ να μεταβάλλεται από –τ έως +τ.

Επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα I γράφεται ως

$$I = \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} (\mathrm{T} - |\tau|)\varphi(\tau)d\tau$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{I}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} (\mathrm{T} - |\tau|)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \frac{(\mathrm{T} - |\tau|)}{T}\varphi(\tau)d\tau = \lim_{T\to\infty} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} (1 - \frac{|\tau|}{T})\varphi(\tau)d\tau$$

Όμως όταν το T τείνει στο άπειρο το $\frac{|\tau|}{T}$ τείνει στο 0, και η συνάρτηση $1 - \frac{|\tau|}{T}$ τείνει προς την συνάρτηση 1 , δηλ. προς την οριζόντια ευθεία στο ύψος 1. Τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τη μη εργοδική στοχαστική ανέλιξη x(t) η μέση τιμή των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος (όπως αυτές ορίστηκαν στην σελ 53 γραμμή ***) που υπολογίζονται από τις επί μέρους καταγραφές $x_i(t)$ της $x(t)$ είναι ίση με το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτησης $R_x(\tau)$ της $x(t)$ και θα αποτελεί τη φασματική πυκνότητα ισχύος της στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Ας βρούμε και την ετεροσυσχέτηση (cross-correlation) μεταξύ x(t) και y(t) αυτή μπορεί να έχει μια από τις παρακάτω τιμές

$$E[x(t-\tau)x(t)] = R_{xx}(\tau)$$
$$E[x(t-\tau)y(t)] = R_{xy}(\tau)$$
$$E[y(t-\tau)y(t)] = R_{yy}(\tau)$$
$$E[y(t-\tau)x(t)] = R_{yx}(\tau)$$

$$R_{xy}(t+\tau, t) = E[x(t+\tau) \cdot y(t)] =$$

$$E[x(t+\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma] =$$

$$E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) x(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau) x(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau) x(t-\sigma)] h(\sigma) d\sigma =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\cancel{t} + \tau - \cancel{t} + \sigma)] h(\sigma) d\sigma =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau - (-\sigma))] h(\sigma) d\sigma =$$

Θέτω –σ=s άρα –dσ=ds ή dσ=-ds

$$\sigma = +\infty \to s = -\infty$$

$$\sigma = -\infty \to s = +\infty$$

$$\int_{+\infty}^{-\infty} R_{xx}(\tau - s) h(-s)(-ds) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau - s) h(-s) ds =$$

Αν θέλω τη συνέλιξη του $R_{xx}(\tau)$ με την h(-τ). Αυτή είναι $R_{xx}(\tau)\otimes h(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau-s)h(-s)ds$

Άρα $\boxed{R_{xy}(t+\tau,t)=R_{xx}(\tau)\otimes h(-\tau)}$

Τώρα ψάχνουμε την

$$R_{yx}(t+\tau,t)=E[y(t+\tau)x(t)]$$

$$E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-\sigma)h(\sigma)d\sigma\ x(t)]=$$

$$E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau-\sigma)h(\sigma)d\sigma\ ]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x(t+\tau-\sigma)h(\sigma)]d\sigma=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x(t+\boxed{\tau-\sigma})]h(\sigma)d\sigma= \qquad \cdots R_{xx}(t+\tau)=E[x(t)x(t+\boxed{\tau})]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma=$$

$$R_{xx}(\tau)\otimes h(\tau)$$

Άρα $\boxed{R_{yx}(t+\tau,t)=R_{xx}(\tau)\otimes h(\tau)}$

Ψάχνουμε την

$$R_{yy}(t+\tau,t)=E[y(y+\tau)y(t)]$$

$$E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-\sigma)h(\sigma)d\sigma\cdot y(t)]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau-\sigma)h(\sigma)y(t)d\sigma]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)E[x(t+\tau-\sigma)y(t)]d\sigma=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)R_{xy}(\tau-\sigma)d\sigma=$$

$$R_{xy}(\tau)\otimes r(\tau)=$$

$$\boxed{R_{xx}(\tau)\otimes h(-\tau)\otimes r(\tau)}$$

Άρα η $R_{yy}(t+\tau,t)$ είναι συνάρτηση μόνο του τ συνεπώς y(t) WSS.

Cross Spectral Density Function

$$S_{yx}(f) = \Im\{R_{yx}(\tau)\} = \Im\{R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau)\} =$$
$$\Im\{R_{xx}(\tau)\}\Im\{h(\tau)\} = S_{xx}(f) \cdot H(f)$$

Άρα $\boxed{S_{yx}(f) = S_{xx}(f) \cdot H(f)}$

Θα βρούμε κα το $S_{xy}(f) = \Im\{R_{xy(\tau)}\}$

$$S_{xy}(f) = \Im\{R_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau)\} =$$
$$\Im\{R_{xx}(\tau)\}\Im\{h(-\tau)\} = R_{xx}(f)H(-f) =$$
$$R_{xx}(f)\overline{H(f)}$$

Άρα $\boxed{S_{xy}(f) = R_{xx}(f)\overline{H(f)}}$

Αντίστοιχα

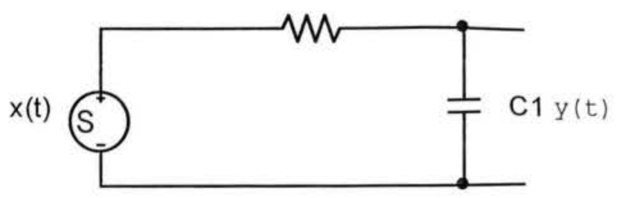
$$S_{yy}(f) = \Im\{R_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau) \otimes h(\tau)\} =$$
$$\Im\{R_{xx}(\tau)\}\Im\{h(-\tau)\}\Im\{h(\tau)\} = R_{xx}(f)H(-f)H(f) =$$
$$R_{xx}(f)\overline{H(f)}H(f) = R_{xx}(f)\left|H(f)\right|^2$$

Άρα $\boxed{S_{yy}(f) = R_{xx}(f)\left|H(f)\right|^2}$

<u>**Εφαρμογή:**</u>

Στο παρακάτω κύκλωμα όπου είναι 2πRC=1 το σήμα εισόδου x(t) είναι λευκός θόρυβος με φασματική πυκνότητα ισχύος N_0 θέλουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος εξόδου Y(t).

Κύκλωμα



Θα βρούμε πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου, μετασχηματίζοντας αυτό στο πεδίο συχνοτήτων ως εξής;

$$
\begin{aligned}
&x(t) \to X(\mathrm{f})\\
&y(t) \to Y(\mathrm{f})\\
&R \to R\\
&C \to \frac{1}{j2\pi fC}\\
&L \to j2\pi fL\\
&i(t) \to I(\mathrm{f})\\
&\mathrm{u(t)} \to \mathrm{U(f)}
\end{aligned}
$$

Με τα παραπάνω υπολογίζω

$$I(\mathrm{f}) = \frac{X(\mathrm{f})}{Z_{o\lambda}(\mathrm{f})} = \frac{X(\mathrm{f})}{R + \dfrac{1}{j2\pi \mathrm{f}C}}$$

$$Y(\mathrm{f}) = I(\mathrm{f})\frac{1}{j2\pi \mathrm{f}C} = \frac{X(\mathrm{f})}{R + \dfrac{1}{j2\pi \mathrm{f}C}}\frac{1}{j2\pi \mathrm{f}C} = \frac{X(\mathrm{f})}{1 + j2\pi \mathrm{f}RC}$$

$$H(\mathrm{f}) = \frac{Y(\mathrm{f})}{X(\mathrm{f})} = \frac{1}{1 + j2\pi \mathrm{f}RC} = \boxed{\frac{1}{1 + j\mathrm{f}}}$$

Άρα $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\left|H(f)\right|^2 = N_0\left|\frac{1}{1+jf}\right|^2 = \frac{N_0}{1+f^2}$

Ποιο είναι το $Rxx(\tau)$ και ποιο το $Ryy(\tau)$;

$$Rxx(\tau) = \Im^{-1}\{Sxx(\mathrm{f})\} = \Im^{-1}\{No\} = No\Im^{-1}\{1\} = No\,\delta(\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&Ryy(\tau) = Rxx(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) =\\
&\mathrm{N}o\,\delta(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) =\\
&\mathrm{N}o\,h(\tau) \otimes h(-\tau)
\end{aligned}
$$

Πρέπει να βρω το h(τ) για το φίλτρο μου με αντίστροφο μετασχηματισμό furrier της $\frac{1}{1+j\mathrm{f}}$.

Ανάποδα :

Ψάχνω τον μετασχηματισμό F του εκθετικού παλμού $\varepsilon(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

$$E(\mathrm{f}) = \Im[\varepsilon(\tau)] = \Im[e^{-at}u(t)] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi ft-at}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt =$$

$$\left[\frac{e^{-(a+j2\pi f)t}}{-(a+j2\pi f)}\right]_0^{+\infty} = \left[\frac{e^{-at}e^{-j2\pi ft}}{-(a+j2\pi f)}\right]_0^{+\infty}$$

Για $t=0$ $\dfrac{e^{-a0}e^{-j2\pi f0}}{-(a+j2\pi f)} = \dfrac{1}{-(a+j2\pi f)}$

Για $t=\infty$ το e^{-at} αποτελεί το μέτρο και το $e^{-j2\pi f0}$ αποτελεί το όρισμα

και $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-at} = 0$ άρα $E(\mathrm{f}) = 0 - \dfrac{1}{-(a+j2\pi f)} = \dfrac{1}{a+j2\pi f}$

$$\boxed{\Im[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+j2\pi f}}$$

Με βάση τον παραπάνω μετασχηματισμό ψάχνω τώρα τον αντίστροφο του $\Im^{-1}\left\{\dfrac{1}{1+j\mathrm{f}}\right\}$

Που θα είναι η h(t) που ζητώ. Οπότε

$$\frac{1}{1+j\mathrm{f}} = \frac{2\pi}{2\pi + j2\pi\mathrm{f}} = 2\pi\frac{1}{2\pi + j2\pi\mathrm{f}} \qquad \cdots\alpha = 2\pi$$

$$= 2\pi e^{-2\pi t}u(t) = \begin{Bmatrix} 2\pi e^{-2\pi t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{Bmatrix}$$

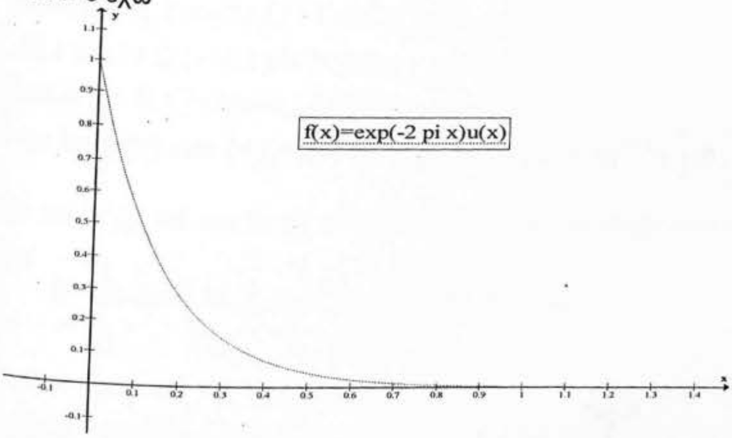
$$Ryy(\tau) = No\cdot h(\tau)\otimes h(-\tau) =$$
$$No\cdot 2\pi e^{-2\pi\tau}u(\tau)\otimes 2\pi e^{2\pi\tau}u(-\tau)$$
$$4\pi^2 No\cdot\left[e^{-2\pi\tau}u(\tau)\right]\otimes\left[e^{2\pi\tau}u(-\tau)\right]$$

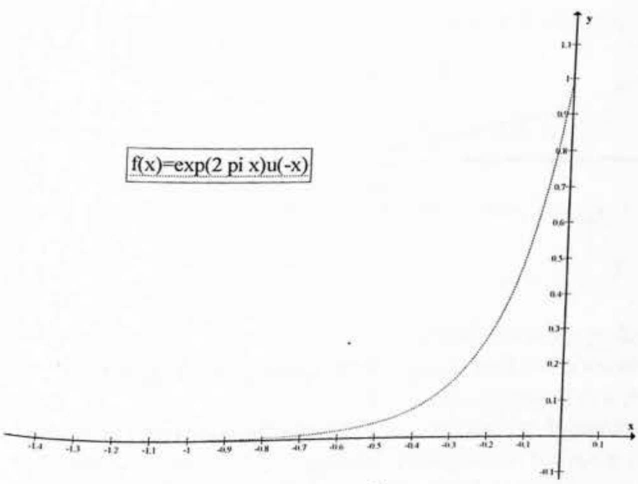
Θέλω να κάνω την συνέλιξη $\left[e^{-2\pi\tau}u(\tau)\right]\otimes\left[e^{2\pi\tau}u(-\tau)\right]$

$$\mathrm{f}(\tau)\otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(\sigma)\mathrm{f}(\tau-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(\sigma)\mathrm{f}[-(\sigma-\tau)]d\sigma =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(\sigma)\mathrm{r}(\sigma-\tau)d\sigma \qquad \cdots \mathrm{f}(-\sigma)=\mathrm{r}(\sigma)$$

Για τ>0 έχω





$$\mathrm{f}(\tau) \otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi\sigma} e^{2\pi(\sigma-\tau)} d\sigma = \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi\sigma} e^{2\pi\sigma} e^{-2\pi\tau} d\sigma =$$

$$e^{-2\pi\tau} \int_{-\infty}^{0} e^{4\pi\sigma} d\sigma = e^{-2\pi\tau} \left. \frac{e^{4\pi\sigma}}{4\pi} \right|_{-\infty}^{0} = e^{-2\pi\tau} \left(\frac{1}{4\pi} - 0\right) = \frac{e^{-2\pi\tau}}{4\pi}$$

Για τ<0 έχω

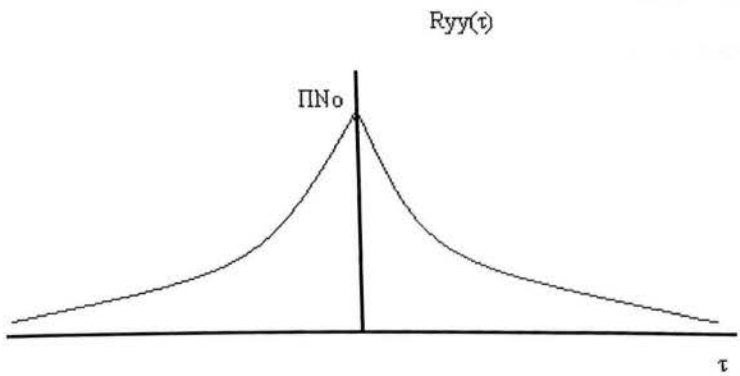
$$\mathrm{f}(\tau) \otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\pi\sigma} e^{2\pi(\sigma-\tau)} d\sigma =$$

$$e^{-2\pi\tau} \int_{-\infty}^{0} e^{4\pi\sigma} d\sigma = e^{-2\pi\tau} \left. \frac{e^{4\pi\sigma}}{4\pi} \right|_{-\infty}^{\tau} = e^{-2\pi\tau} \left(\frac{e^{4\pi\tau}}{4\pi} - 0\right) = \frac{e^{2\pi\tau}}{4\pi}$$

Οπότε $\boxed{h(\tau)=\frac{1}{4\pi}e^{-2\pi|\tau|}}$ και

$$Ryy(\tau)=4\pi^2 No\cdot\left[e^{-2\pi\tau}u(\tau)\right]\otimes\left[e^{2\pi\tau}u(-\tau)\right]=$$

$$\boxed{\pi No\cdot e^{-2\pi|\tau|}}$$



• Στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος μπορεί να είναι σ.δ. που ορίζονται στον ίδιο χώρο. Έτσι χρειάζεται να ορίσουμε την **ανεξαρτησία** ή την **αλληλοσυσχέτιση** 2 ή περισσοτέρων σ.δ.
Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την **από κοινού στατικότατα.** Για παράδειγμα, έστω X(t) μια σ.δ. που διέρχεται μέσα από ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI). Για κάθε δυνατή είσοδο (συνάρτηση δείγμα) x(t) υπάρχει μια αντίστοιχη έξοδος y(t) = x(t)*h(t) οπού h(t) είναι η κρουστική απόκριση του η γραμμικού συστήματος. Τα δυο σήματα x(t) και y(t) είναι συναρτήσεις δείγματα δυο σ.δ. X(t) και Y(t) που ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων.

Άσκηση

Η τυχαία διαδικασία X(t) ορίζεται από την

$X(t)=X\cos 2\pi f_0 t+Y\sin 2\pi f_0 t$

Όπου X και Y είναι δυο μηδενικής μέσης τιμής ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές η κάθε μία με διακύμανση ίση με σ^2.

1) Να βρεθεί η m x(t):

$$X(t) = X\cos 2\pi f_0 t + Y\sin 2\pi f_0 t$$
$$\mathrm{E}[x(t)] = E[X\cos 2\pi f_0 t + Y\sin 2\pi f_0 t] =$$
$$E[X\cos 2\pi f_0 t] + E[Y\sin 2\pi f_0 t] =$$
$$\cos 2\pi f_0 t\ E[X] + \sin 2\pi f_0 t\ E[Y] =$$
$$\cos 2\pi f_0 t\ [0] + \sin 2\pi f_0 t\ [0] = 0$$

οι $\sin 2\pi f_0 t$ και $\cos 2\pi f_0 t$ αποτελούν σταθερές οπότε βγαίνουν έξω από τις αγκύλες

2) Να βρεθεί η $R_x(t+\tau, t)$ είναι η X(t) στατική ?

$$E\{[X\cos(2\pi f_0 t) + Y\sin(2\pi f_0 t)][X\cos(2\pi f_0 t + \tau) + Y\sin(2\pi f_0 t + \tau)]\} =$$
$$E\{X^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \tau) + XY\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t + \tau) +$$
$$YX\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \tau) + Y^2\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t + \tau)] =$$
$$E[X^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \tau) + XY\sin(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) +$$
$$Y^2\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t + \tau)] =$$
$$E[\frac{X^2}{2}\cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0(t+\tau)) + \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0(t+\tau))] +$$
$$\frac{Y^2}{2}[\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0(t+\tau)) - \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0(t+\tau))] + X{\cdot}Y\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) =$$
$$E[\frac{X^2}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \cos(-2\pi f_0 t)] - \frac{Y^2}{2}[\cos(-2\pi f_0 t) - \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)] +$$
$$XY\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) =$$
$$E[\frac{X^2}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \frac{X^2}{2}\cos(2\pi f_0 t)] - \frac{Y^2}{2}\cos(2\pi f_0 t) - \frac{Y^2}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)$$
$$XY\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) =$$
$$E[\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)(\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)(\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) +$$
$$XY\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) =$$
$$\frac{1}{2}E[(X^2 - Y^2)](\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{2}E[(X^2 + Y^2)](\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) +$$
$$E[XY]\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) =$$

Για $\sigma_\chi^2 = \sigma_y^2 \to R_x(t+\tau, t) = \sigma^2\cos(2\pi f_0 \tau) \to WSS$

Για $\sigma_\chi^2 \neq \sigma_y^2 \to R_x(t+\tau, t) = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\cos(2\pi f_0 \tau) \to \cancel{WSS}$

Από μερικά δεδομένα $x(\xi), \xi \in \mathrm{I}$ της στοχαστικής ανέλιξης $x(t)$ ενθόρυβο σήμα θέλουμε με κάποιο γραμμικό τελεστή πάνω σε αυτά να εκτιμήσουμε μια συνάρτηση –ανέλιξη g(t) που προέρχεται από εφαρμογή ενός τελεστή T_s πάνω σε μια άλλη στοχαστική ανέλιξη S(t)

$g(t) = T_s[s(t)]$ το αποτέλεσμα της εφαρμογής του γραμμικού τελεστή πάνω στο $x(\xi), \xi \in \mathrm{I}$ ας το συμβολίσουμε με $\hat{g}(t)$. Θέλουμε το $\hat{g}(t)$ να πλησιάζει όσο γίνεται το g(t) (να εκτιμά το g(t)).

Ορίζω σαν σφάλμα εκτίμησης $= g(t) - \hat{g}(t)$

Και σαν μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E\{[g(t) - \hat{g}(t)]^2\}$.

Θεωρώ εκείνο το γραμμικό τελεστή L που εφαρμόζεται στα $x(\xi), \xi \in \mathrm{I}$ (δίνονται το $\hat{g}(t) = L[x(\xi)]$) δίνει σφάλμα εκτίμησης $g(t) - L[x(\xi)]$ που είναι ορθογώνιο προς όλα τα $x(\xi), \xi \in \mathrm{I}$ Δηλ. $\mathrm{E}\{[g(t) - L[x(\xi)]] \cdot x(\xi i)\} = 0 \quad \xi \in I$

Θα αποδείξουμε ότι ο εν λόγω γραμμικός τελεστής L δίνει το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης $e = E\{[g(t) - L[x(\xi)]]^2\}$

Δηλ θα αποδείξουμε ότι από όλους τους γραμμικούς τελεστές L, εκείνος που κάνει το σφάλμα $g(t) - L[x(\xi)]$ ορθογώνιο προς όλα τα $x(\xi), \xi \in \mathrm{I}$ δίνει την ελάχιστη τιμή στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα e.

Απόδειξη θεωρήματος της ορθογωνικότητας

Έστω ότι ο μετασχηματισμός που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ο L''

Το ελάχιστο e είναι τότε $e_m = E\left\{[g(t) - L'[x(\xi)]]^2\right\}$

Γράφουμε: $g(t) - L'[x(\xi)] = g(t) - L[x(\xi)] + L[x(\xi)] - L'[x(\xi)]$

Ορίζω το $L[x(\xi)] - L'[x(\xi)] = L''[x(\xi)]$

Άρα $\quad g(t) - L'[x(\xi)] = g(t) - L[x(\xi)] + L''[x(\xi)]$ οπότε

$$e_m = E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)] + L''[x(\xi)]\right]^2\right\} =$$

$$E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)]\right]^2 + \left[L''[x(\xi)]\right]^2 + 2\left[g(t) - L[x(\xi)]\right] L''[x(\xi)]\right\} =$$

$$E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)]\right]^2\right\} + E\left\{\left[L''[x(\xi)]\right]^2\right\} + 2E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)]\right] L''[x(\xi)]\right\}$$

Αφού το L είναι γραμμικός τελεστής τότε θα ισχύει

$[g(t) - L[x(\xi)] \cdot L''[x(\xi)] = L''\left[[g(t) - L[x(\xi)] \cdot x(\xi)\right]$

όμως ο L είναι αυτός που ικανοποιεί την αρχή της ορθογωνικότητας οπότε

$E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)]\right] \cdot x(\xi)\right\} = 0$

επομένως

$e_m = E\left\{\left[g(t) - L[x(\xi)]\right]^2\right\} + E\left\{\left[L''[x(\xi)]\right]^2\right\} + 0$

Αυτό είναι ασυμβίβαστο εκτός από την περίπτωση αν είναι $L'' = 0 \quad \to E\left[L''[x(\xi)]\right]^2 = 0$

Οπότε και $L'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L - L' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L' = L$

Δηλ. ο βέλτιστος γραμμικός τελεστής (που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα) ταυτίζεται με αυτόν που έχει την ιδιότητα της ορθογωνικότητας .

Το ελάχιστο (βέλτιστο) σφάλμα είναι

$$e_m = E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]^2\right] = E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\right] =$$

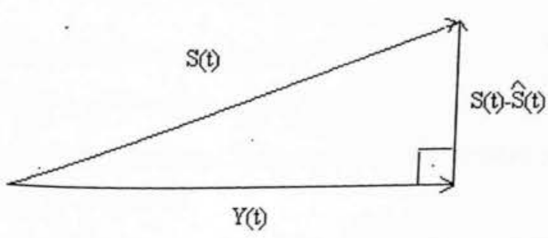
$$= E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\cdot g(t)\right] - E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\cdot L[x(\xi)]\right]$$

Αφού το σφάλμα $\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]$ είναι ορθογώνιο προς όλα τα χ(ξ)θα είναι ορθογώνιο και προς το $L[x(\xi)]$ Επομένως $E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\cdot L[x(\xi)]\right]=0$

Οπότε $\boxed{e_m = E\left[\left[g(t)-L[x(\xi)]\right]\cdot g(t)\right]}$

Απλά παραδείγματα εφαρμογής της ορθογωνικότητας

Έχουμε ένα υπό μέτρηση σήμα, το οποίο αποτελείται από την επιθυμητή πληροφορία, συν κάποιο θόρυβο Y(t)=S(t)+N(t). Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το S(t) και το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα, με την χρήση ενός γραμμικού τελεστή έτσι ώστε $\hat{S} = aY(t)$



Βάσει του θεωρήματος της ορθογωνικότητας, το σφάλμα $e(t) = S(t) - \hat{S}(t)$ γίνεται ελάχιστο όταν είναι κάθετο στο σήμα παρατήρησης.
Οπότε

$$E\{[S(t)-\hat{S}(t)]\,Y(t)\} = 0$$

Αναλύοντας το παραπάνω

$$E\{[S(t)-\hat{S}(t)]\,Y(t)\} = E\{[S(t)-aY(t)]\,Y(t)\} = E[S(t)Y(t) - aY(t)^2] =$$

$$E[S(t)Y(t)] - E[aY(t)^2] = E[S(t)Y(t)] - aE[Y(t)^2] = R_{SY}(0) - aR_{YY}(0)$$

Οπότε ο ζητούμενος τελεστής α υπολογίζεται

$$a = \frac{R_{SY}(0)}{R_{YY}(0)}$$

Το ελάχιστο σφάλμα υπολογίζεται από τον ορισμό

$$e_m = E\Big[\big[g(t) - L[x(\xi)]\big]\cdot g(t)\Big]$$

$$e_m = E\{[S(t)-\hat{S}(t)]S(t)\} = E\{[S(t)-aY(t)]S(t)\} = E[S(t)S(t)-aY(t)S(t)] =$$
$$E[S^2(t)-aY(t)S(t)] = E[S^2(t)] - aE[Y(t)S(t)] = R_{SS}(0) - aR_{YS}(0)$$

Αντικαθιστώντας το α λαμβάνω

$$e_m = R_{SS}(0) - aR_{YS}(0) = R_{SS}(0) - \frac{R_{SY}(0)}{R_{YY}(0)}R_{YS}(0)$$

Και εφόσον $R_{YS}(0) = R_{SY}(0)$ (στο μηδέν)

$$e_m = R_{SS}(0) - \frac{R_{SY}^{\;2}(0)}{R_{YY}(0)}$$

Εάν στο παραπάνω παράδειγμα, ο θόρυβος και το σήμα πληροφορίας ήταν στατιστικά ανεξάρτητα. Τότε θα ίσχυε

$$E[S(t)N(t)] = E[S(t)]E[N(t)] = 0$$

Οπότε και η ετεροσυσχέτιση των S και Y θα ήταν ίση με

$$R_{SY}(0) = E[S(t)Y(t)] = E\{S(t)[S(t)+N(t)]\} =$$
$$E[S^2(t)] + E[S(t)N(t)] = E[S^2(t)] + 0 = R_{SS}(0)$$

Αντίστοιχα και η αυτοσυσχέτιση

$$R_{YY}(0) = E\{[S(t)+N(t)]\,[S(t)+N(t)]\} =$$
$$E[S^2(t)] + \cancel{E[S(t)N(t)]} + \cancel{E[N(t)S(t)]} + E[N^2(t)] =$$
$$R_{SS}(0) + R_{NN}(0)$$

Αντικαθιστώντας στο προηγούμενο

$$a = \frac{R_{SY}(0)}{R_{YY}(0)} \rightarrow \quad a = \frac{R_{SS}(0)}{R_{SS}(0)+R_{NN}(0)}$$

$$e_m = R_{SS}(0) - \frac{R_{SY}^{\;2}(0)}{R_{YY}(0)} \rightarrow \quad e_m = R_{SS}(0) - \frac{R_{SS}^{\;2}(0)}{R_{SS}(0)+R_{NN}(0)} = \frac{R_{SS}(0)R_{NN}(0)}{R_{SS}(0)+R_{NN}(0)}$$

Έχουμε τρεις τυχαίες μεταβλητές x,y,z που έχουν μηδενικές μέσες τιμές και γνωστές αυτό και ετεροσυσχετίσεις δηλ γνωρίζω τα $Rxx, Rxy, Rxz, Ryz, Ryy, Rzz$

$Rxx = E(x^2), Ryy = E(y^2), Rxy = E(xy)$ κτλ.

Θέλω να βρω εκείνες τις σταθερές α και β, για τις οποίες ο γραμμικός συνδυασμός αx+βy προσεγγίζει με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα την τυχαία μεταβλητή z.

Σφάλμα $= z-(ax+by) \quad \cdots (ax+by)=\hat{z}$ για το βέλτιστο α και β θα πρέπει να ισχύει :

Σφάλμα =ορθογωνικό x και οθογωνικό με το y δηλ

$E\{[z-(ax+by)]\cdot x\}=0 \quad \cdots 1$

$E\{[z-(ax+by)]\cdot y\}=0 \quad \cdots 2$

Από τα 1 και 2

1) $\Rightarrow E[zx-ax^2-bxy]=0$

$E[zx]-aE[x^2]-bE[xy]=0$

$Rzx-aRxx-bRxy=0 \Rightarrow \boxed{aRxx+bRxy=Rzx}$

2) $\Rightarrow E[zy-axy-by^2]=0$

$E[zy]-aE[xy]-bE[y^2]=0$

$Rzy-aRxy-bRyy=0 \Rightarrow \boxed{aRxy+bRyy=Ryz}$

Από τα παραπάνω λύνω ως προς α και b και βρίσκω τη βέλτιστη εκτιμήτρια $\hat{z}=(ax+by)$

Ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης

$e_m = E[(z-\hat{z})^2] = E[(z-\hat{z})(z-\hat{z})] = E[(z-\hat{z})z] - \cancel{E[(z-\hat{z})\hat{z}]} \Rightarrow e_m = E[(z-\hat{z})z]$

Κάνουμε την παραπάνω διαγραφή διότι το σφάλμα $z-\hat{z}$ είναι ορθογώνιο προς τα x και y άρα και προς το $\hat{z}$=ax+by

Αναλύοντας παρακάτω $e_m = E[(z-\hat{z})z] = E(z^2-\hat{z}z) = E(z^2)-E(\hat{z}z)$ αλλά $z = z-\hat{z}+\hat{z}$

οπότε $E(\hat{z}z) = E[\hat{z}(z-\hat{z}+\hat{z})] = E[\hat{z}(z+\hat{z})+\hat{z}^2] = E[\hat{z}(z+\hat{z})]+E[\hat{z}^2]$

όμως το $z-\hat{z}$ είναι ορθογώνιο προς το x και y άρα και προς το $ax+by$ που είναι το $\hat{z}$

επομένως $E[\hat{z}(z+\hat{z})]=0$ οπότε $\boxed{e_m = E(z^2)-E(\hat{z}^2)}$: Πυθαγόρειο θεώρημα

Έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη s(t). Θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή s(t+λ) (μελλοντική τιμή, δηλαδή πρόβλεψη) από μόνη την τιμή s(t) ως as(t). Ή αλλιώς θέλουμε από το s(t) να εκτιμήσουμε με την χρήση ενός γραμμικού τελεστή a στο s(t) το s(t+λ).ποιο είναι το βέλτιστο a.

Λύση

Πρέπει το βέλτιστο α να ικανοποιεί την αρχή της ορθογωνικότητας

Σφάλμα $= g(t)-E[x(\xi)] = s(t+\lambda)-as(t)$

Αυτό πρέπει να είναι ορθογώνιο προς το x(ξ)=s(t) δηλ.

$$E\{[s(t+\lambda)-as(t)]s(t)\}=0 \Leftrightarrow$$
$$E[s(t+\lambda)s(t)-as(t)^2]=0 \Leftrightarrow$$
$$E[s(t+\lambda)s(t)]-aE[s(t)^2]=0 \Leftrightarrow$$
$$R(\lambda)-aR(0)=0 \Leftrightarrow aR(0)=R(\lambda) \Leftrightarrow a\frac{R(\lambda)}{R(0)}$$

$|R(\lambda)| \le R(0)$ άρα $|a| \le 1 \quad -1 \le a \le 1$

Το ελάχιστο σφάλμα

$$e_m = E\{[s(t+\lambda)-as(t)]\cdot s(t+\lambda)\} =$$
$$E[s(t+\lambda)^2 - as(t)s(t+\lambda)] =$$
$$E[s(t+\lambda)^2]-aE[s(t)s(t+\lambda)] =$$
$$R(0)-aR(\lambda)=R(0)-\frac{R(\lambda)}{R(0)}R(\lambda)=R(0)-\frac{R(\lambda)^2}{R(0)}$$

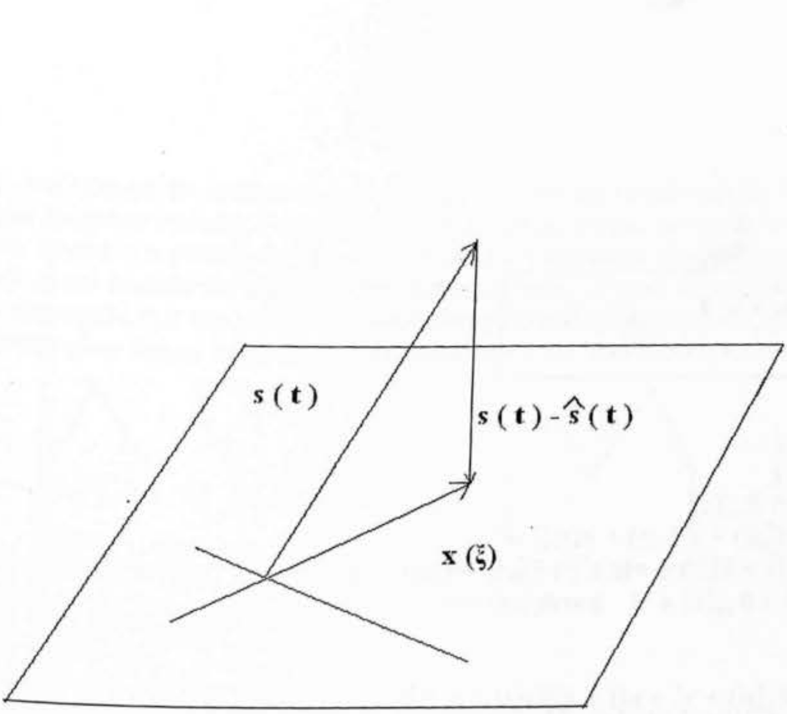
Από εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος θα βρίσκαμε

$$e_m = E[s^2(t+\lambda)-E[(as(t)]^2 =$$
$$R(0)-a^2E[s^2(t)] =$$
$$R(0)-a^2R(0)=R(0)-\frac{R^2(\lambda)}{R^2(0)}R(0)=R(0)-\frac{R^2(\lambda)}{R(0)}$$

Φίλτρο WIENER

Έχουμε ένα σήμα x(t)το οποίο είναι σήμα παρατηρήσεων άρα περιέχει θόρυβο ξέρουμε ότι το καθαρό σήμα απαλλαγμένο από θόρυβο είναι το S(t). Αυτό που επιθυμούμε είναι να περάσουμε το x(t) από ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση h(t), τέτοιο ώστε η έξοδος του φίλτρου να είναι η βέλτιστη εκτίμηση του s(t).

Θεωρώντας την βέλτιστη εκτίμηση $\widehat{S}(t) = h(t) * x(t)$ αυτή θα ισούται με $\hat{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)x(t-a)da$ έχοντας σαν κριτήριο το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E[(s(t)-\hat{s}(t))^2] = \min$ να είναι ελάχιστο.



Ακολουθώντας την αρχή της ορθογωνικότητας το σφάλμα $E[(s(t)-\hat{s}(t))^2]=\min$ γίνεται ελάχιστο όταν σφάλμα $s(t)-\hat{s}(t)$ είναι κάθετο προς όλα τα (ξ).

Αναλύοντας τα παραπάνω

$$E\left\{\left[s(t)-\int h(a)\,x(t-a)da\right]\cdot x(\xi)\right\}=0 \Rightarrow$$

$$E\left\{s(t)\cdot x(j)-\left(\int h(a)\,x(t-a)da\right)\cdot x(\xi)\right\}=0 \Rightarrow$$

$$E[s(t)x(j)]=E\left\{x(j)\cdot\int h(a)x(t-a)da\right\} \Rightarrow$$

$$R_{sj}(t-j)=E\left\{\int h(a)x(t-a)x(\xi)da\right\} \Rightarrow$$

$$R_{sj}(t-j)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)E[x(t-a)x(\xi)]da \Rightarrow$$

$R_{sj}(t-j)=\int h(a)R_{xx}(t-a-\xi)da$ όπου θέτοντας t-ξ=τ

$$R_{sj}(\tau)=\int h(a)R_{xx}(\tau-a)da$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην συνέλιξη $R_{sj}(\tau)=h(\tau)*R_{xx}(\tau)$

Μετασχηματίζοντας κατά Fourier την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$F\{R_{sj}(\tau)\}=F\{h(t)\}\cdot F\{R_{xx}(\tau)\}$$

Όπου $F\{R_{sj}(\tau)\}=S_{sj}(f)$, $F\{R_{xx}(\tau)\}=S_{xx}(f)$, $F\{h(t)\}=H(f)$

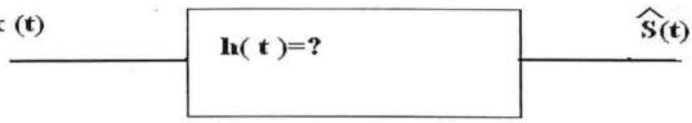
Και καταλήγουμε στην τελική $S_{sj}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f) \Rightarrow H(f)=\frac{S_{sj}(f)}{S_{xx}(f)}$

Το κακό είναι ότι το φίλτρο που βρίσκουμε με τον αντίστροφο Fourier είναι μη αιτιατό δεδομένου ότι έχει μη μηδενικές τιμές για t<0 στην κρουστική του απόκριση.

ΑΠΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Φιλτράρισμα:

Θεωρούμε ότι έχουμε σήμα $x(t)=s(t)+n(t)$ όπου s(t) σήμα πληροφορίας και n(t) θόρυβος ασυσχέτιστος με το σήμα. Πληροφορία και θόρυβος έχουν μηδενικές μέσες τιμές. Αναζητούμε το βέλτιστο wiener φίλτρο.



Από την θεωρία $H(f) = \frac{S_{sx}(f)}{S_{xx}(f)}$
Για να βρω το $S_{sx}(f)$ θέλω το $R_{sx}(\tau)$
$R_{sx}(\tau) = E[S(t+\tau)x(t)] = E[S(t+\tau)\{s(t)+n(t)\}] =$
$E[S(t+\tau)s(t) + s(t+\tau)n(t)] = E[S(t+\tau)s(t)] + E[s(t+\tau)n(t)] =$
$R_{ss}(\tau) + E[s(t+\tau)]\, E[n(t)] = R_{ss}(\tau) + 0 \cdot 0 = R_{ss}(\tau)$

$S_{xx}(t) = E[x(t+\tau)x(t)] = E\{[s(t+\tau) + n(t+\tau)][s(t) + n(t)]\} =$
$E[s(t+\tau)\, s(t) + s(t+\tau)n(t) + n\,(t+\tau)s(t) + n(t+\tau)n(t)] =$
$E[s(t+\tau)\, s(t)] + E[s(t+\tau)n(t)] + E[n\,(t+\tau)s(t)] + E[n(t+\tau)n(t)] =$
$R_{ss}(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) + R_{nn}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$

Οπότε από τα παραπάνω υπολογίζω την απόκριση που πρέπει να έχει το φίλτρο μου

$$H(f) = \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)}$$

2) Πρόβλεψη:
Θέλω η έξοδος του Wiener φίλτρου μου την χρονική στιγμή t να είναι η βέλτιστη εκτίμηση της τιμής του s(t+λ) για λ>0

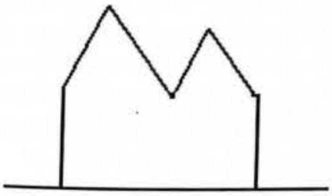
Θέτω g(t)=s(t+λ)
Από την θεωρία $H(f) = \frac{S_{gx}(f)}{S_{xx}(f)}$
και από το προηγούμενο πρόβλημα ότι $s_{xx}(f) = s_{ss}(f) + s_{nn}(f)$
Αναζητώ το
$R_{gx}(\tau) = E[g(t+\tau)x(t)] = E[s(t+\lambda+\tau)x(t)] = E\big[s(t+\lambda+\tau)[s(t)+n(t)]\big] =$
$E[s(t+\lambda+\tau)s(t)] + E[s(t+\lambda+\tau)n(t)] = R_{ss}(\tau+\lambda) + 0$
Από τους μετασχηματισμούς Fourier $F[x(t+t_0)]=X(f)e^{j2\pi t_0 f}$
Αντίστοιχα, $s_{gx}(f) = F[R_{ss}(\tau+\lambda)] = S_{ss}(f)e^{j2\pi\lambda f}$
Οπότε

$$H(f) = \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)} e^{j2\pi\lambda f}$$

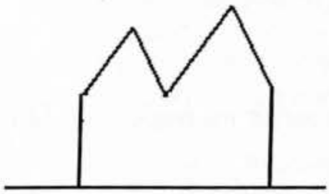
Matched filters (ταιριαστά φίλτρα)

Το matched φίλτρο είναι μια ιδεατή διαδικασία που εφαρμόζουμε σε ένα εισερχόμενο σήμα (που θεωρούμε αλλοιωμένο από θόρυβο), έτσι ώστε να επιτύχουμε αύξηση του λόγου σήματος προς θόρυβο (SNR signal to noise ratio).

Ας υποθέσουμε ότι εκπέμπουμε ένα σήμα πχ έναν τριγωνικό παλμό. Στην διαδρομή του αυτό το σήμα λαμβάνει θόρυβο. Πιο είναι το πιο κατάλληλο φίλτρο το οποίο θα μας επανέφερε το σήμα στην αρχική του μορφή; Αν χρησιμοποιούσαμε ένα φίλτρο τύπου Chebyshev, Butterworth, κτλ μαζί με τον θόρυβο θα μας έκοβαν και πληροφορία. Σε αυτό το πρόβλημα η θεωρία αναφέρει ότι επιτυγχάνουμε τον μέγιστο λόγο σήματος προς θόρυβο όταν η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι ίδια με το χρονικά ανεστραμμένο σήμα που στείλαμε από τον πομπό.



Σήμα



Απόκριση Φίλτρου

Ο λόγος σήματος προς θόρυβο υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$k = SNR = \frac{|S(t_d)|^2}{|n(t)|^2}$$

Όπου S και n το σήμα και ο θόρυβος που λαμβάνουμε στον δέκτη.

Αλλά ας δούμε πώς γίνεται αυτό.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το φίλτρο σαν LTI (γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο). Η έξοδός του θα είναι ίση με $s_o(t) = h(t) * s(t)$ δηλαδή, την συνέλιξη της κρουστικής του απόκρισης με το σήμα εισόδου. Η ίδια έκφραση στο πεδίο συχνοτήτων με ανάστροφο μετασχηματισμό Fourier ,γράφεται

$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df$.

Η ισχύς του σήματος εξόδου του φίλτρου, είναι ίση με

$S = |s_o(t)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2$ αυτή αποτελεί και την έκφραση του αριθμητή στον συντελεστή που μελετάμε.

Για τον θόρυβο θεωρούμε ότι αυτός είναι λευκός και στην είσοδο του φίλτρου έχουμε $S_{ni} = \frac{Na}{2}$

Το φάσμα του σήματος εξόδου του φίλτρου στον θόρυβο, είναι ίσο

$S_{no} = S_{ni}(f)|Y(f)|^2$

Οπότε, στην περίπτωση του λευκού θορύβου με επίπεδο φάσμα, λαμβάνουμε

$S_{no}(f) = \frac{N_a}{2}|Y(f)|^2$

Αντίστοιχα και η ισχύς του σήματος εξόδου θα είναι ίση με

$|n_o(t)|^2 = \frac{N_a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df$ και αυτή αποτελεί την έκφραση του παρονομαστή στον συντελεστή.

Μεταφέροντας τις δύο σχέσεις λαμβάνουμε το κλάσμα

$$k = SNR = \frac{|S(t_d)|^2}{|n(t)|^2} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2}{\frac{N_a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της ανισότητας Schwarz, η οποία μας λέει ότι, για δυο συναρτήσεις f(t) και g(t) ισχύει:

$$\left[\int_a^b f(t)g(t)dt\right]^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

Η ανισότητα ισχύει αν $f(t) = kg(t)$

Αν αντικαταστήσουμε όπου $f(t) = H(f), g(t) = S(f)e^{j2\pi ft_d}$ λαμβάνουμε

$$\frac{|S(t_d)|^2}{|n(t)|^2} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2}{\frac{N_a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}[S(f)e^{j2\pi ft_d}]^2 df \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)^2 df}}{\frac{N_a}{2}\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}} \leq \frac{2}{N_a}\int_{-\infty}^{+\infty}[S(f)e^{j2\pi ft_d}]^2 df \Rightarrow$$

$$\frac{|S(t_d)|^2}{|n(t)|^2} \leq \frac{2}{N_a}\int_{-\infty}^{+\infty}[S(f)e^{j2\pi ft_d}]^2 df$$

οπότε και έχουμε τη μεγαλύτερη τιμή SNR, όταν εξισώνονται τα δύο μέλη

$$\frac{|S(t_d)|^2}{|n(t)|^2} = \frac{2}{N_a}\int_{-\infty}^{+\infty}[S(f)e^{j2\pi ft_d}]^2 df$$

Για να ισχύσει όμως, η παραπάνω ισότητα θα πρέπει όπως αναφέρεται να έχουμε

$$S(f) = H(f)e^{j2\pi ft_d}$$

Ισότητα την οποία αν μετατρέψουμε με αντίστροφο Fourier θα λάβουμε σύμφωνα με την έβδομη

ιδιότητα (σημειώσεις)

$h(t) = kS(t_d - t)$.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Αν το συγκεκριμένο εκπόνημα είχε συνέχεια τότε θα φτάναμε σε ένα σημείο που θα έπρεπε να επιλέξουμε μεταξύ των διαφόρων διαμορφώσεων ώστε να καταλήξουμε στο ποια είναι η καλύτερη για την κάθε εφαρμογή που θέλουμε να υποστηρίξουμε.

Αναφορικά με αυτό στα μαθηματικά αποδεικνύεται για την διαμόρφωση συνεχών σημάτων ότι από τις διαμορφώσεις AM η SSB αποτελεί την καλύτερη από πλευράς επίδοσης ως προς τον θόρυβο με την χρήση μικρού εύρους ζώνης. Αντίστοιχα στη διαμόρφωση FM ευρείας ζώνης έχουμε καλύτερο λόγο σήματος προς θόρυβο, χαρακτηριστικό που την κάνει κατάλληλη για περιβάλλοντα υψηλού θορύβου ή για σήματα χαμηλής ισχύος, με κόστος το μεγάλο εύρος ζώνης σε σύγκριση με την διαμόρφωση AM.

Επίσης στην ψηφιακή μετάδοση αποδεικνύεται ότι ο σύμφωνος δεκτής αποτελεί την βέλτιστη επιλογή γιατί είναι αυτός που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους και έχει ενιαία μορφή για τις διαμορφώσεις ASK, PSK και FSK.

Αλλά αυτά σε κάποια άλλη στιγμή.

******Για την συνέλιξη έχει αναφερθεί η ιδιότητα

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Οπότε ίσως είναι καλό να δούμε την απόδειξη και από την "ανάποδη"

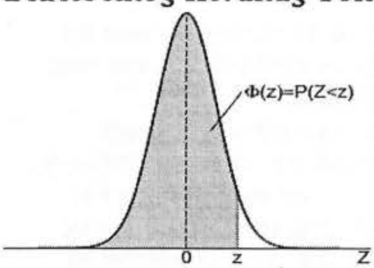
$$E\{y(t)\} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{h(t-\tau)x(\tau)\}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)E\{x(\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)m_x d\tau = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)d\tau$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t - \tau$ (οπότε είναι $du = -d\tau$) και λαμβάνουμε

$$E\{y(t)\} = m_x \int_{+\infty}^{-\infty} h(u)(-du) = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du = m_x H(0)$$

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$z = 1.28 \iff \Phi(z) = 0.90$
$z = 1.65 \iff \Phi(z) = 0.95$
$z = 2.33 \iff \Phi(z) = 0.99$
$z = 3.08 \iff \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998