ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ»

ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Α.Μ.:40721

ΠΑΤΙΡΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ Α.Μ.:37736

Επιβλέπων Καθηγητής :

Γιαννακόπουλος Κωνσταντίνος

Καθηγητής Μηχανικής

ΠΕΙΡΑΙΑΣ ΙΟΥΛΙΟΣ 2015

ΣΚΟΠΟΣ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η πλήρης κατανόηση της κίνησης ενός στερεού σώματος. Η μελέτη μας προσανατολίζεται στην πλήρη περιγραφή όλων των εννοιών, στην κινητική των στερεών σωμάτων, στην κίνηση δηλαδή των σωμάτων όπως αυτή προσδιορίζεται από την κατανομή μάζας του σώματος καθώς και των δυνάμεων και ροπών που εφαρμόζονται πάνω του. Το ζήτημα αυτό είναι άμεσα συνδεδεμένο με σημαντικές έννοιες των μαθηματικών και της φυσικής. Έτσι στην πάρουσα εργασία έγινε πλήρη μελέτη των περιπτώσεων Euler και Lagrange. Ειδικότερα η εργασία προσανατολίζεται κυρίως στην περιγραφή της κίνησης ενός στερεού σώματος,στην περιστροφή γύρω από έναν άξονα καθώς και στη μεταφορά πάνω σε αυτόν . Επίσης επιτυγχάνεται η κατανόηση της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού σώματος τόσο στο αδρανειακό όσο και στο ενσωματομένο στο στερεό σώμα σύστημα αναφοράς. Τέλος στην παρούσα εργασία γίνεται εκτενής αναφορά στις έννοιες της ενέργειας , της στροφορμής, της ροπής, καθώς και σε εκφράσεις αυτών των φυσικών μεγεθών.

<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u>

Θα θέλαμε από κοινού να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή μας, κύριο Γιαννακόπουλο Κωνσταντίνο για την αμέριστη συμπαράσταση και καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Επίσης θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε και τις οικογένειές μας για την υποστήριξή τους στο τελευταίο στάδιο της αποφοίτησής μας από το Τμήμα Μηχανολογίας του Τ.Ε.Ι. Πειραιά.

ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ - ΠΑΤΙΡΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΙΝΙΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Κατηγορίες Τομέων Μηχανικής

Η Μηχανική ανήκει στον ευρύτερο τομέα των επιστημών ,τη Φυσική και διαιρείται ως εξής:

1.Κλασσική Μηχανική: Είναι η επιστήμη που θεμελιώθηκε από τον Νεύτωνα και σήμερα αποτελεί την βάση για πολλούς κλάδους της τεχνολογίας. Όμως οι σχέσεις της Κλασικής Μηχανικής έχουν χρήση μόνο σε μικρές ταχύτητες γιατί, αν τις χρησιμοποιήσουμε σε πολύ ψηλές ταχύτητες (παραπλήσιες της ταχύτητας του φωτός) μας δίνουν λανθασμένα αποτελέσματα.

2.Μηχανική της Σχετικότητας ή Σχετικιστική Μηχανική:Οι θεμελιώδεις σχέσεις της Κλασικής Μηχανικής αντικαταστάθηκαν από καινούργιες σχέσεις όπου είναι ισοδύναμες μεταξύ τους όταν τις εφαρμόσουμε σε μικρές ταχύτητες, αλλά ταυτόχρονα ισχύουν και σε πολύ ψηλές ταχύτητες (παραπλήσιες της ταχύτητας του φώτος).

3.Κβαντομηχανική:Είναι η μηχανική του μικρόκοσμου του ατόμου ,γιατί αυτήν την περιοχή δεν μπορούμε να την ερμηνεύσουμε με τους δύο προηγούμενους τρόπους (Κλασική Μηχανική, Μηχανική της Σχετικότητας).

Η Κλασική Μηχανική διαιρείται ως εξής:

- Θεωρητική Μηχανική

-Εφαρμοσμένη ή Τεχνική Μηχανική.

Επίσης την Μηχανική ανάλογα με το είδος των σωμάτων που εξετάζουμε την χωρίζουμε σε δύο κλάδους:

-τη Μηχανική Στερεών που εξετάζει τα στερεά σώματα,

-τη Μηχανική Ρευστών που εξετάζει τα υγρά και τα αέρια σώματα.

Η Μηχανική Στερεών χωρίζεται σε τρία μέρη:

-τη Στατική που εξετάζει την ισορροπία των σωμάτων όταν πάνω σε αυτά ενεργούν διάφορες δυνάμεις.

-τη Κινηματική που εξετάζει την κίνηση των σωμάτων ,την τροχιά , την ταχύτητα και την επιτάχυνση αλλά δεν ασχολείται με τα αίτια που προκαλούν την κίνηση.

-τη Δυναμική που εξετάζει τις δυνάμεις που προκαλούν τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης των σωμάτων δηλαδή τα αίτια.. [1]

1.2 Στατική

Η Στατική ασχολείται με τα εξής θεμάτα:

1.Τον προσδιορισμό της συνισταμένης μερικών δυνάμεων.

2.Την αντικατάσταση μιας δύναμης από τις συνιστώσες αυτής.

3.Την εξέταση ισορροπίας μιας κατασκευής.

4.Τον προσδιορισμό των αντιδράσεων που πρέπει να αναπτύξουν τα στηρίγματα μιας κατασκευής.

5.Τον προσδιορισμό των δυνάμεων που αναλαμβάνουν τα διάφορα μέρη μιας κατασκευής.

6. Τον προσδιορισμό του κέντρου βάρους των στοιχείων και ολόκληρης της κατασκευής.

7.Την εξέταση της ευστάθειας και του κινδύνου ανατροπής μιας κατασκευής.

Μέθοδοι Στατικής:Οι μέθοδοι που χρησιμοποιηούμε για να λύσουμε προβλήματα που εμφανίζονται στη Στατική είναι οι εξής:. [1]

A) Γραφική Μέθοδος:Στην Γραφική Μέθοδο φθάνουμε στη λύση με γραφικές κατασκευές . Για αυτές πρέπει να γνωρίζουμε ορισμένες βασικές αρχές και στοιχειώδεις γνώσεις γραμμικού σχεδίου . [1]

Η γραφική μέθοδος εμφανίζει τα εξής χαρακτηριστικά :

1.Είναι απλή.

2.Είναι παραστατική επειδή η πορεία της λύσης είναι εμφανής και ο κίνδυνος λάθους είναι πολύ μικρός.

3.Είναι κατάλληλη για απλές περιπτώσεις και δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε περίπλοκα προβλήματα.

4.Είναι χρονοβόρα ,διότι πρέπει να κάνουμε γραφικές κατασκευές. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις είναι ταχύτερη και την προτιμούμε.

5.Τα αποτελέσματα που μας δίνει δεν έχουν μεγάλη ακρίβεια. [1]

B) Αναλυτική Μέθοδος: Στην Αναλυτική Μέθοδο φθάνουμε στη λύση χρησιμοποιώντας ορισμένες βασικές αρχές και μαθηματικές σχέσεις .Για πιο καλή παρακολούθηση της επίλυσης κατασκευάζουμε κάποια σχήματα χωρίς κλίμακα και ακρίβεια.

Η αναλυτική μέθοδος παρουσιάζει τα εξής χαρακτηριστικά:

1.Τα αποτελέσματα που μας δίνει έχουν ακρίβεια.

2.Εφαρμόζεται σε κάθε παρουσιαζόμενο πρόβλημα,ανεξάρτητα της περιπλοκότητας που παρουσιάζει.

3. Είναι σύντομη.

4.Επιδέχεται χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. [1]

1.3 Δύναμη

Με την έννοια δύναμη εννοούμε ένα φυσικό μέγεθος το όποιο γίνεται αντιληπτό από τα αποτελέσματα που προκαλεί και η οποία είναι η αιτία που:

1.Αναγκάζει ένα σώμα να κινηθεί.

2. Αναγκάζει ένα σώμα να επιβραδύνει ή να ακινητοποιηθεί.

3.Δημιουργεί σε ένα σώμα παραμόρφωση. [1]

Βαρος

Η δύναμη με την οποια το σώμα έλκετο απο τη γη λέγεται βάρος του σώματος .[2]

Τα φυσικά μεγέθη διακρίνονται σε δύο κατηγορίες :

-Βαθμωτά είναι τα φυσικά μεγέθη όπου μπορούμε να τα προσδιορίσουμε με ένα στοιχείο .Αυτά τα μεγέθη είναι το μήκος ,η μάζα,η θερμοκρασία,η επιφάνεια,ο όγκος και άλλα.

-Ανυσματικά ή διανυσματικά είναι τα μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε πρέπει να δώσουμε περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά στοιχεία όπως η ταχύτητα,η δύναμη και η επιτάχυνση .Τα μεγέθη αυτά τα παριστάνουμε με ένα διάνυσμα. [1]

Χαρακτηριστικά μιας δύναμης :

Α .Γραφικός καθορισμός

Για να προσδιορίσουμε μια δύναμη πρέπει να δώσουμε τα εξής χαρακτηριστικά:

-1.Το μέγεθος της δύναμης.

-2.Την ευθεία ενέργειας .Είναι η ευθεία πάνω στην όποια ενεργεί η δύναμη.

-3.Την φορά προς την οποία ενεργεί.

-4.Το σημείο εφαρμογής. [1]

Β .Αναλυτικός Καθορισμός

Με αυτόν τον τρόπο για να καθορίσουμε μια δύναμη δίνουμε τα εξής στοιχεία:

-1.Το μέγεθος της δύναμης.

-2.Τη διεύθυνση της δύναμης. Αυτή ορίζεται με την γωνία α που πρέπει να στραφεί ο θετικός ημιάξονας Χ ενός τυχαίου συστήματος συντεταγμένων,αντίθετα από την φορά των δεικτών ενός ρολογιού,μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ενέργειας της δύναμης.

-3.Τη θέση της δύναμης[1]

Μονάδες μέτρησης της δύναμης:

Οι μονάδες μέτρησης για μια δύναμη που χρησιμοποιούνται σήμερα είναι οι εξής:

ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ SI	ΤΕΧΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	ΑΓΓΛΙΚΟ ΤΕΧΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
1 N (ΝΙΟΥΤΟΝ)	1 kp (ΚΙΛΟΠΟΝΤ)	1 lb (ΛΙΜΠΡΑ)

Τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια αυτών είναι τα εξής :

ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ	ΤΕΧΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
1 KN = 1000 N (ΚΙΛΟΝΙΟΥΤΟΝ)	1 P =1/100 kp (ΠΟΝΤ)
1 MN =1000 KN (ΜΕΓΑΝΙΟΥΤΟΝ)	1 KP=1000 P (ΚΙΛΟΠΟΝΤ)
1 GN = 1000MN (ΓΙΓΑΝΙΟΥΤΟΝ)	1MP=1000kp(ΜΕΓΑΠΟΝΤ ή ΤΟΝΟΣ)
	1 GP=1000MP(ΓΙΓΑΠΟΝΤ)

Η συνισταμένη και οι συνιστώσες – Ισορροπία:

Συνισταμένη δύναμη λέγεται η δύναμη η οποία όταν σε ένα σε σώμα ενεργούν κάποιες δυνάμεις δημιουργώντας κάποιο αποτέλεσμα αυτή η δύναμη το δημιουργεί μόνη της. [1]

Συνιστώσες λέγονται οι δυνάμεις που αντικαθιστά η Συνισταμένη δημιουργώντας το ίδιο αποτέλεσμα με αυτές. [1]

Η Συνισταμένη σαν έννοια προέρχεται από την αρχή της επαλληλίας που σημαίνει ότι συνισταμένη είναι η δύναμη που φέρνει αποτέλεσμα ίσο με αυτό με αυτό που προκύπτει από τη διαδοχική επίδραση των συνιστωσών . [1]

Αξίωμα δράσης – αντίδρασης:

Όταν ένα σώμα Α ασκεί μια δύναμη F_A σε ένα σώμα Β , τότε το σώμα Β ασκεί στο Α ίση και αντίθετη δύναμη F_B.

Οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι :

1.Στην φύση οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα ανά δύο .Η μία είναι η δράση και η αντίθετη της είναι η αντίδραση.

2.Η δράση και η αντίδραση είναι ίσες αλλά και αντίθετες μεταξύ τους.

3.Η δράση και η αντίδραση είναι ίσες σε μέγεθος αλλά εφαρμόζονται σε διαφορετικά σώματα.

4.Όταν ένα σώμα δεν μπορεί να αναλάβει φορτίο δηλαδή να αντιδράσει ,υποχωρεί από την δράση .

Οι δυνάμεις ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο που ενεργούν στις κατασκευές ως εξής: [1]

1.Δυνάμεις στον χώρο: Είναι οι δυνάμεις που δρουν σε διαφορετικά επίπεδα του χώρου. [1]

2. Συνεπίπεδες δυνάμεις: Είναι οι δυνάμεις που ενεργούν στο ίδιο επίπεδο .Οι συνεπίπεδες δυνάμεις παρουσιάζονται σε πολλά συστήματα. [1]

Α.Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις :Είναι οι δυνάμεις που ενεργούν σε κοινό σημείο αυτό μπορεί να προκύπτει και μετά από μετάθεση αυτών πάνω στην ευθεία ενέργειας τους. [1]

Β.Συγγραμμικές δυνάμεις:Είναι οι δυνάμεις που έχουν κοινή ευθεία ενέργειας. Αυτές αποτελούν ειδική περίπτωση των συντρεχουσών δυνάμεων, αφού προκύπτουν για α=0 και α=180. [1]

Γ.Συνεπίπεδες τυχαίες δυνάμεις :Είναι οι δυνάμεις που έχουν τυχαία ευθεία ενέργειας πάνω στο επίπεδο που ενεργούν. [1]

Δ.Συνεπίπεδες παράλληλες δυνάμεις :Είναι ειδική περίπτωση συνεπίπεδων τυχαίων δυνάμεων. [1]

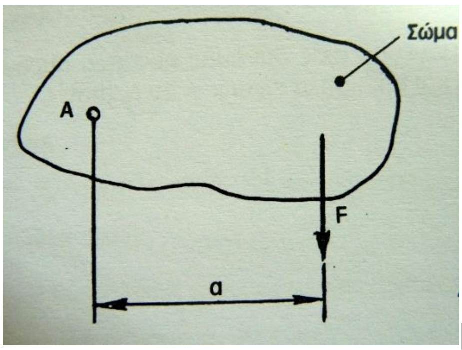
1.4 Η ροπή

Η ροπή είναι η αιτία περιστροφής των σωμάτων,η αιτία ακινητοποίησης στρεφόμενων σωμάτων και η αιτία στρεπτικής παραμόρφωσης των σωμάτων.

Η περιστροφή ενός σώματος δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της δύναμης που ενεργεί σε αυτό αλλά και από την απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης από το σημείο περιστροφής. Έτσι εμφανίζεται η έννοια της ροπής ,στην οποία συνυπάρχει και η δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σώμα και η απόσταση της δύναμης από το σημείο περιστροφής.. [1]

Ροπή δύναμης ως προς ένα σημείο:Όπως η δύναμη έτσι και η ροπή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος .Αυτό σημαίνει ότι έχει μέγεθος , ευθεία ενέργειας και φόρα.

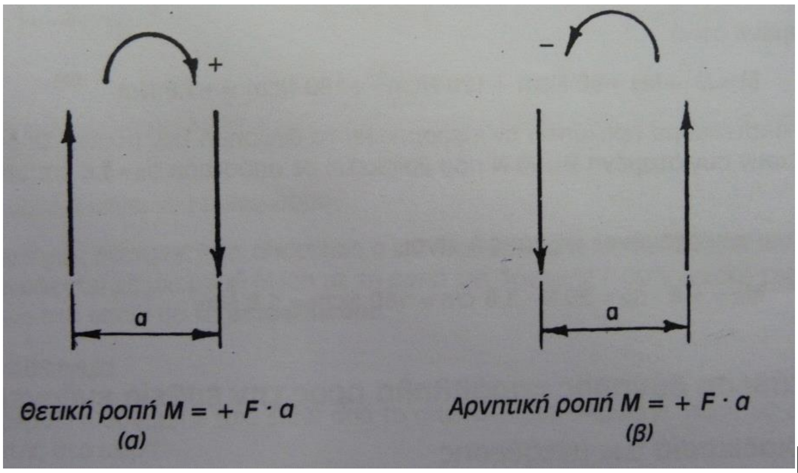
Το μέγεθος της ροπής:Το μέγεθος της ροπής μια δύναμης F, ως προς ένα σημείο Α, είναι το γινόμενο της δύναμης F επί την απόσταση α που απέχει η δύναμη από το σημείο Α,δηλαδή : $M=F*A$. [1]



[1]

Σχήμα 1

Το πρόσημο της ροπής ορίζεται ως εξής :Αν η δύναμη F που εφαρμόζεται σε ένα σώμα προσπαθεί να το στρέψει δεξιόστροφα τότε κατά σύμβαση η ροπή λαμβάνεται θετική .Στην αντίθετη περίπτωση η ροπή λαμβάνεται θετική. [1]



[1]

Σχήμα 2

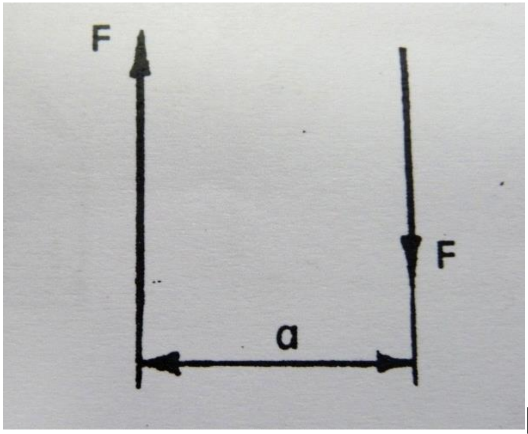
Από τον ορισμό της και τις μονάδες κάθε συστήματος προκύπτει ο πίνακας

Σύστημα μονάδων	M= F * A
Διεθνές (S.I)	N m(Νιουτόμετρο)
Τεχνικό Μετρικό	Kp m (Κιλοποντόμετρο)
Τεχνικό Αγγλικό	Lb ft (Ποδόλιμπρο)

Ζεύγος δυνάμεων :Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο δυνάμεις ίσες σε μέγεθος , παράλληλες και αντίθετης φοράς. Αυτές οι δυνάμεις λέγονται ζεύγος δυνάμεων.

Ροπή ζεύγους δυνάμεων :Ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων λέμε το γινόμενο μιας εκ των δύο ίσων δυνάμεων επί την απόσταση μεταξύ των δυνάμεων. [1]

M=F*A



[1]

Σχήμα 3

Πρόσημο της ροπής:Αν οι δυνάμεις προσπαθούν να περιστρέψουν το σώμα τους δεξιόστροφα,τότε η ροπή του ζεύγους θεωρείται κατά σύμβαση θετική.

Αν όμως οι δυνάμεις προσπαθούν να περιστρέψουν το σώμα τους αντίθετα ,τότε η ροπή του ζεύγους θεωρείται κατά σύμβαση αρνητική.

Το θεώρημα των ροπών: Όταν σε ένα σώμα ενεργούν μερικές δυνάμεις που έχουν ,ως προς ένα σημείο Α,αντίστοιχη ροπή,τότε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι ίσο με την ροπή M_R της συνισταμένης R των πιο πάνω δυνάμεων,ως προς το ίδιο σημείο Α :

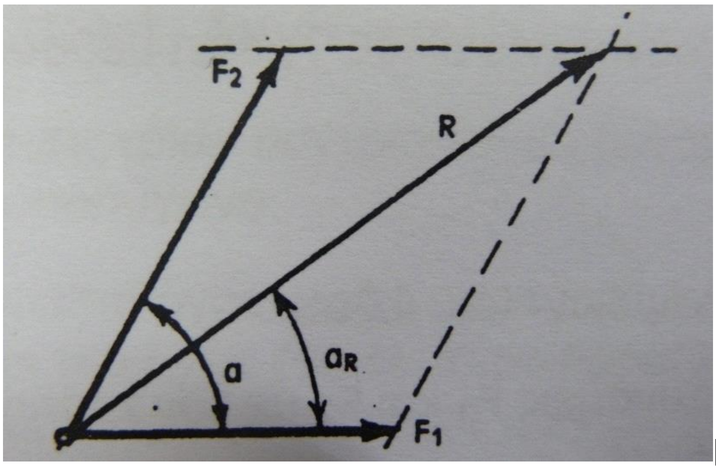
$M_R=M_1+M_2+M_3+$.....[1]

1.5 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ- ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Συντρέχουσες δυνάμεις είναι οι δυνάμεις που ενεργούν στο ίδιο σημείο ενός σώματος ή οι δυνάμεις όπου οι ευθείες ενέργειες αυτών διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Υπενθυμίζουμε ότι οι συνεπίπεδες δυνάμεις ενεργούν πάνω στο ίδιο επίπεδο. [1]

Δύο συντρέχουσες δυνάμεις F1 και F2 έχουν για συνισταμένη R την διαγώνιο ενός παραλληλόγραμμου που σχηματίζεται με πλευρές τις δυνάμεις F1 και F2. [1]



[1]

Σχήμα 4

1.5.1 Σύνθεση δύο συντρεχουσών δυνάμεων με το δυναμοπολύγωνο

Ένας τρόπος σύνθεσης δύο ή και περισσότερων δυνάμεων είναι το δυναμοπολύγωνο .Αυτό προκύπτει από το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων και σχηματίζεται ως εξής:

1.Γράφουμε μια ευθεία Ε1 παράλληλη προς τη δοθείσα δύναμη F1 και πάνω σε αυτή λαμβάνουμε μήκος ΑΒ , με βάση την κλίμακα των δύναμεων ,που θα παριστάνει την δύναμη F1. [1]

2.Από το τέλος Β της δύναμης F1 γράφουμε την δύναμη F2 παράλληλη προς την δοθείσα .Το μήκος ΒΔ παριστάνει την δύναμη F2 με την κλίμακα των δυνάμεων. [1]

3.Η συνισταμένη είναι το μήκος της ευθείας ΑΔ,που προκύπτει με την ένωση της αρχής Α της πρώτης δύναμης με το τέλος Δ της τελευταίας δύναμης. [1]

Μετά από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τα εξής συμπεράσματα:

1.Μερικές συντρέχουσες ή συγγραμμικές δυνάμεις ισορροπούν αν έχουν συνισταμένη μηδέν που σημαίνει ότι πρέπει να έχουν δυναμοπολύγωνο κλειστό.

2.Δύο συντρέχουσες δυνάμεις F1 και F2 μπορούν να ισορροπήσουν όταν είναι ίσες συγγραμμικές και αντίρροπες.

3.Αν τρεις ή περισσότερες συντρέχουσες δυνάμεις έχουν συνισταμένη,τότε δεν βρίσκονται σε ισορροπία . Το δυναμοπολύγωνο τους είναι ανοικτό. Αυτό σημαίνει πως η αρχή της πρώτης δύναμης και το τέλος της τελευταίας δεν συμπίπτουν.

4. Τρεις ή περισσότερες συντρέχουσες δυνάμεις έχουν συνισταμένη R , μπορούν να ισορροπήσουν, αν εφαρμοσθεί στο ίδιο σημείο μια ακόμα δύναμη ίση και αντίθετη προς την συνισταμένη R. [1]

1.5.2 Φορείς - Είδη καταπονήσεων φορέων

1.Εφελκυσμός :Ένας φορέας καταπονείται σε εφελκυσμό , όταν ενεργούν σε αυτόν δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετης φοράς που ενεργούν πάνω στην ίδια ευθεία ενέργειας και οι οποίες προσπαθούν να τον επιμηκύνουν. [1]

2.Θλίψη:Ένας φορέας καταπονείται σε θλίψη, όταν οι δυνάμεις ίσες και αντίθετης φοράς που ενεργούν πάνω στην ίδια ευθεία ενέργειας και οι οποίες προσπαθούν να του ελαττώσουν το μήκος. [1]

3.Κάμψη :Ένας φορέας καταπονείται σε κάμψη ,όταν ενεργούν πάνω του δυνάμεις κάθετα στον άξονα του και προκαλούν αλλαγή του σχήματος αυτού. [1]

4. Τμήση:Ένας φορέας καταπονείται σε τμήση ,όταν ενεργούν πάνω του δυνάμεις κάθετα στον άξονα όπου είναι αντίρροπες και οι ευθείες ενέργειας αυτών είναι παράλληλες και πολύ κοντά η μία στην άλλη σχεδόν πάν στηνίδια ευθεία ενέργειας.[1]

5 . Διάτμηση:Ένας φορέας καταπονείται σε διάτμηση ,όταν οι δυνάμεις ενεργούν όπως στην τμήση αλλά δεν βρίσκονται σχεδόν πάνω στην ίδια ευθεία .Βρίσκονται σε απόσταση και προκαλούν ολίσθηση των διαδοχικών διατομών . [1]

6. Στρέψη:Ένας φορέας καταπονείται σε στέψη ,όταν ενεργούν σε αυτόν δύο ροπές ίσες και αντίθετης φοράς,αλλά σε διαφορετικό επίπεδο. [1]

7. Λυγισμός :Μια ράβδος καταπονείται σε λυγισμό όταν ενεργούν σε αυτή δυνάμεις όπως στη θλίψη ,αλλά το μήκος της είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το μέγεθος της διατομής. [1]

16 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

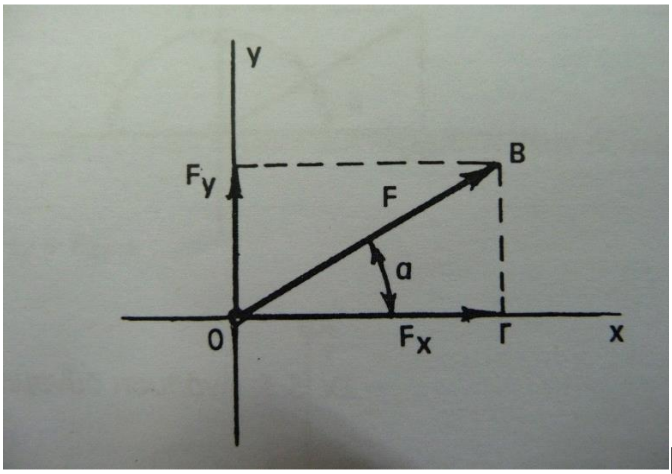
Ανάλυση μιας δύναμης με δύο συνιστώσες: Μια δύναμη F μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες που θα προκαλούν στο σώμα το ίδιο αποτέλεσμα .

Αυτή η ανάλυση θα γίνει με την βοήθεια τριγωνομετρίας.

Στο σχήμα 1.5 βλέπουμε την δύναμη F που πρέπει να την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες πάνω στους άξονες x και y. Οι συνιστώσες αυτές φαίνεται στο σχήμα και τις υπολογίζουμε ως εξής: [1]

Συνιστώσα πάνω στον άξονα x : συνα=ΑΓ/ΑΒ =>ΑΓ=ΑΒ*συνα => Fx=F*συνα.

Συνιστώσα πάνω στον άξονα y: ημα=ΒΓ/ΑΒ => ΒΓ=ΑΓ*ημα => Fy=F*ημα.



[1]

Σχήμα 5

Σύνθεση συντρεχουσών δυνάμεων αναλυτικά

Κάθε δύναμη μπορούμε να την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες. Έτσι αν έχουμε μερικές δυνάμεις F1,F2,F3....μπορούμε να αναλύσουμε κάθε μια από αυτές σε δύο συνιστώσες. Την F1 σε F1x και σε F1y, την F2 σε F2x και F2y, την F3 σε F3x και F3y κλπ.

Μετά από αυτήν την ανάλυση θα έχουμε μερικές δυνάμεις -συνιστώσες F1x,F2x,F3x κλπ. στον άξονα x και μερικές δυνάμεις-συνιστώσες F1y,F2y,F3y κλπ στον άξονα y.

Οι δυνάμεις F1x, F2x ,F3x κλπ είναι συγγραμμικές και μας δίνουν συνισταμένη στον άξονα x το αλγεβρικό άθροισμα:ΣFx=F1x+F2x+F3x+...

Οι δυνάμεις F1y, F2y ,F3y κλπ είναι συγγραμμικές και μας δίνουν συνισταμένη στον άξονα x το αλγεβρικό άθροισμα:ΣFy=F1y+F2y+F3y+...

Έτσι οι δυνάμεις F1,F2,F3,... αντικαταστάθηκαν από δύο δυνάμεις ΣFx και ΣFy στους άξονες x και y αντίστοιχα .Αυτές όμως μπορούν να δώσουν μια συνισταμένη R. Έτσι τα αθροίσματα ΣFx και ΣFy είναι οι συνιστώσες Rx και Ry της ζητούμενης συνισταμένης των αρχικών δυνάμεων F1,F2,F3.....

Επειδή η Rx και η Ry σχηματίζουν γωνία 90^0 μπορούμε να εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα : $R^2=R_x^2+R_y^2$, άρα :

Την γωνία της συνισταμένης R από τον άξονα x μπορούμε να την υπολογίσουμε με την χρησιμοποίηση κάποιου τριγωνομετρικού αριθμού.Αν χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη θα έχουμε :

$εφα_R=Σ_y/Σ_x$ => $α_R=....^0$ [1]

Ισορροπία συντρεχουσών δυνάμεων με την αναλυτική μέθοδο

Μέγεθος και γωνία της συνισταμένης

Όταν έχουμε δύο δυνάμεις μπορούμε να προσδιορίσουμε την συνισταμένη με την χρήση δύο απλών σχέσεων.

Το μέγεθος της συνισταμένης το υπολογίζουμε με την πιο κάτω σχέση ,η οποία προκύπτει με εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων:

Την γωνία $α_R$ της συνισταμένης R από τη δύναμη F1 την υπολογίζουμε από την σχέση: $ημα_R$ =(F2*ημα)/R

Ισορροπία συντρεχουσών δυνάμεων με την αναλυτική μέθοδο:

Μερικές συντρέχουσες δυνάμεις ισορροπούν αν έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν, δηλαδή όταν R=0.

Με την αναλυτική μέθοδο η συνισταμένη είναι:

Η απαίτηση αυτή για να υπάρχει ισορροπία λέγεται συνθήκη ισορροπίας και γράφεται ως εξής:

Για ισορροπία συντρεχουσών δυνάμεων πρέπει :

$R=0 \Rightarrow ΣF_x=0$ & $ΣF_y=0$. [1]

1.7 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Σύνθεση συνεπίπεδων τυχαίων δυνάμεων

Μερικές δυνάμεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια συνισταμένη δύναμη που θα προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα που προκαλούσαν οι συνιστώσες. Έτσι μερικές τυχαίες δυνάμεις μπορούν αντικατασταθούν από μια συνισταμένη δύναμη. Προσδιορισμός της συνισταμένης δύναμης σημαίνει να βρεθεί: Το μέγεθος , η φορά και η ευθεία της ενέργειας.

Το μέγεθος και η φορά μπορούν να προσδιοριστούν με το δυναμοπολύγωνο. Η ευθεία ενέργειας βρίσκεται με το σχοινοπολύγωνο . [1]

Ευθεία ενέργειας της συνισταμένης δύναμης:

Για να βρούμε τη θέση της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του σχοινοπολύγωνου .Για την κατασκευή του σχοινοπολύγωνου ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

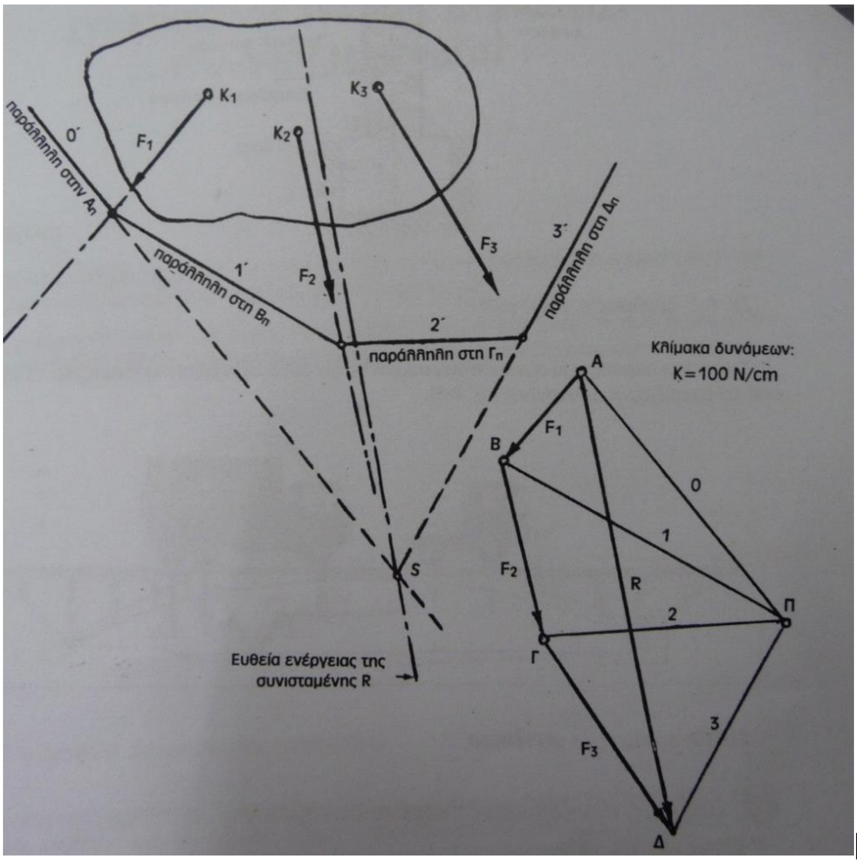
1.Λαμβάνουμε ένα τυχαίο σημείο Π έξω από το δυναμοπολύγωνο που στο εξής θα λέγεται πόλος.

2.Συνδέουμε την αρχή και το τέλος κάθε δύναμης με τον πόλο Π. Αυτές οι γραμμές λέγονται πολικές ακτίνες και τις αριθμίζουμε αρχίζοντας από το μηδέν. Οι πολικές ακτίνες είναι όσες και οι δυνάμεις συν ένα.

3.Το σχοινοπολύγωνο γίνεται πάνω στις ευθείες ενέργειας των δυνάμεων F1,F2 και F3. Αριστερά της ευθείας ενέργειας της F1 γράφουμε μια ευθεία Ο παράλληλη στην πολική ακτίνα Ο. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε μια ευθεία και τις γραμμές ΄1,΄2,΄3, παράλληλες προς τις πολική ακτίνες 1,2,3 αντίστοιχα.

4.Προεκτείνουμε την πρώτη σχοινική ακτίνα Ο και την τελευταία ΄3. Αυτές τέμνονται στο σημείο S από το οποίο διέρχεται και η ευθεία ενέργειας της συνισταμένης R.

5.Γράφουμε την ευθεία ενέργειας τηε συνισταμένης R έτσι, ώστε να διέρχεται από το σημείο S και να είναι παράλληλη στη γραμμή ΑΔ του δυναμοπολύγωνο , που είμαι το μέγεθος της συνισταμένης.. [1]



[1]

Σχήμα 6

1.8 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Σύνθεση συνεπίπεδων τυχαίων δυνάμεων:Γνωρίζουμε ότι μερικές δυνάμεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια άλλη δύναμη που επιφέρει το ίδιο αποτέσμα με τις συνιστώσες και λέγεται συνισταμένη. Η διαδικασία της αντικατάστασης λέγεται σύνθεση δυνάμεων.

Η σύνθεση συνεπίπεδων δυνάμεων απετεί τις παρακάτω ενεργούν:1.Την μεταφορά όλων των τυχαίων δυνάμεων σε ένα κοινό σημείο για να γίνουν συντρέχουσες.

2.Σύνθεση των συντρεχουσών δυνάμεων ,δηλαδή προσδιορισμός μιας συνισταμένης δύναμης.

3.Προσδιορισμός της πραγματικής θέσης της συνισταμένης.

Τελικά στο κοινό σημείο που έγινε η μεταφορά θα υπάρχει μια συνισταμένη δύναμη R και μια ροπή Μ.

Η πραγματική θέση της συνισταμένης R προκύπτει με την παράλληλη μεταφορά αυτής σε τόση απόσταση α,ώστε:$M=R*α$. [1]

1η περίπτωση:Το σώμα θα κάνει σύνθεση κίνηση, δηλαδή θα κάνει ταυτόχρονα και μεταφορική κίνηση και περιστροφική λόγω του ότι το $R>0$ και το $M\neq 0$.

2η περίπτωση: Όταν $R>0$ το σώμα δεν ισορροπεί, αλλά η συνισταμένη περνάει από την αρχή των αξόνων Ο. Αυτό φαίνεται από την σχέση:$α=M/R=O/R=O$

Οπότε το σώμα θα κάνει μεταφορική κίνηση ($R\neq 0$) χωρίς περιστροφή ($M=0$)

$3^η$ περίπτωση: Όταν R=0 και M≠0 το σώμα περιστρέφεται .Η ροπή είναι η αιτία περιστροφής των σωμάτων. Το σύστημα των τυχαίων συνεπίπεδων ισοδυναμεί με ένα ζευγάρι δυνάμεων που έχει ροπή M, αυτή προέκυψε από την σύνθεση.

$4^η$ περίπτωση:Εδώ ούτε συνισταμένη R υπάρχει και ούτε ροπή M. Οι διάφορες ροπές αλληλοεξουδετερώνονται και έτσι δεν υπάρχει αίτιο για περιστροφή(M=0). Αφού δε και R=0 βγαίνει το συμπέρασμα ότι το σώμα ισορροπεί. [1]

Οι πιο πάνω περιπτώσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Περίπτωση	Αποτέλεσμα της σύνθεσης	Τι θα κάνει το σώμα	Απόσταση α της συνισταμένης από την αρχή των αξόνων
1	R>0 M≠0	Θα κάνει σύνθετη κίνηση	α=M/R
2	R>0 M=0	Θα κάνει μεταφορική	α=0
3	R=0 M≠0	Θα περιστρέφεται	Δεν υπάρχει συνισταμένη
4	R=0 M=0	Θα ισορροπεί	Δεν υπάρχει συνισταμένη

1.9 ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ-ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η δύναμη με την οποία ένα σώμα έλκεται από την γη λέγεται βάρος του σώματος. Η ιδιότητα της γης να έλκει όλα τα υλικά σώματα προς το κέντρο αυτής λέγεται βαρύτητα της γης. Το βάρος του σώματος βρίσκεται από την σχέση : G=m*g.

Όπου m=η μάζα του σώματος σε kg.

g=η επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2 η οποία είναι $9.81m/s^2$.

G=το βάρος του σώματος σε N.

Το βάρος του σώματος ως δύναμη έχει και σημείο εφαρμογής .Το σημείο αυτό το λέμε κέντρο βάρους.. [1]

Το κέντρο βάρους του σώματος είναι το σημείο S το οποίο παραμένει αμετάβλητο όποια θέση και αν πάρει το σώμα και είναι δυνατόν να βρίσκεται και έξω από το σώμα .Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο βάρους λέγεται κεντροβαρικός άξονας.Η ταχύτητα του κέντρου βάρους είναι σταθερή, όταν στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.[1]

Θεώρημα Διατηρησης της στροφορμής

Αν η ροπη των εξώτερικων δυνάμεων που ασκουνται σε ενα σύστημα υλικων σημειών ειναι μηδενική σω προς κάποιο σταθερό άξονα ,τοτε η στροφορμή του συστήματος ως προς τον αξονα αυτον διατηρειτε.[3]

1.9.1 Κεντροειδές

Όταν ένα σώμα είναι ομογενές , έχει την μορφή πλάκας και σταθερό πάχος σε όλη την επιφάνεια το θεωρούμε ως «υλική επιφάνεια».Το κέντρο μιας τέτοιας επιφάνειας το ονομάζουμε κεντροειδές . Για παράδειγμα, το κεντροειδές μιας πλάκας με ορθογωνική διατομή βρίσκεται στο σημείο των διαγώνιων της . [1]

Ένα σώμα μπορούμε να το θεώρησουμε ως «υλική γραμμή» όταν είναι ομοιογενές ,έχει σχήμα ράβδου και σταθερή διατομή σε όλο το μήκος. Το κέντρο βάρους της υλικής γραμμής ονομάζεται κεντροειδές της γραμμής. [1]

Κεντροειδές απλών επιφανειών

1.Κυκλική επιφάνεια:Το κεντροειδές κυκλικής επιφάνειας βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. [1]

2. Επιφάνεια τετραγώνου, ορθογωνίου και πλάγιου παραλληλόγραμμου:

Το κεντροειδές αυτών των επιφανειών βρίσκεται στην τομή των διαγωνίων αυτών. [1]

Η ταχυτητα του κεντρου βαρους ειναι σταθερη οταν στο σωμα δεν ασκουνται σξωτερικες δυναμεις .[5]

3.Τριγωνική επιφάνεια:Το κεντροειδές μιας τριγωνικής επιφάνειας βρίσκεται στην τομή δύο διαμέσων του τριγώνου, δηλαδή στο 1/3 από την βάση. [1]

1.9.2 Είδη ισορροπίας

Όταν ένα σώμα ισορροπεί και το απομακρύνουμε από την θέση του ,τότε μπορούν να συμβούν τα εξής:

Α) Επαναφορά του σώματος στην αρχική του θέση ισορροπίας.

Β) Ανατροπή του σώματος.

Γ) Ισορροπία του σώματος σε μια νέα θέση.

Με βάση αυτό το στοιχείο διακρίνουμε την ισορροπία των σωμάτων στα εξής τρία είδη: [1]

Α) Ευσταθής ισορροπία

Β) Ασταθής ισορροπία

Γ) Αδιάφορη ισορροπία.

1.9.3 Ευστάθεια των κατασκευών

Ροπή ανατροπής:

Ροπή ανατροπής M_A ονομάζεται η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο στροφής Α , η οποία είναι : $M_A=F*h$

Ροπή επαναφοράς :

Ροπή επαναφοράς M_E είναι η ροπή που αναπτύσσει το βάρος του σώματος G καθώς η δύναμη F ενεργεί στο σώμα και προσπαθεί να το ανατρέψει, η οποία είναι : $M_E=G*e$[1]

Συντελεστής ασφάλειας από ανατροπή:

Για να μην έχουμε ανατροπή του σώματος πρέπει η ροπή επαναφοράς M_E να είναι μεγαλύτερη από την ροπή ανατροπής M_A.

Ο αριθμός που δείχνει πόσες φόρες είναι είναι μεγαλύτερη η ροπή επαναφοράς από την ροπή ανατροπής λέγεται συντελεστής ασφάλειας από ανατροπή ν, δηλαδή : $v= M_E/M_A$. [1]

1.10 ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Οι αρχές του Νεύτωνα είναι θεμελιώδεις και χαρακτηρίζονται ως αξιώματα. Αυτές είναι οι εξής:

1. Αρχή της αδράνειας ή πρώτο αξιώμα

2.Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής ή δεύτερο αξιώμα

3. Αρχή της δράσης – αντίδρασης ή τρίτο αξιώμα[1]

Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση:

Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση ονομάζεται η κίνηση όπου το κινητό σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα σε μια ευθύγραμμη τροχεία ή αλλιώς το κινητό έχει σταθερή ταχύτητα u που δίνεται από τη σχέση : $u=s/t$[1]

Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ονομάζεται την κίνηση στην όποια η ταχύτητα αυξάνεται ομαλά. Τη σταθερή αύξηση της ταχύτητας στην μονάδα του χρόνου την λέμε επιταχυνόμενη και την συμβολίζουμε με το γράμμα γ.

Οπότε: γ=Μεταβολή ταχύτητας /Χρόνος μεταβολής $=\Delta u/\Delta t$.

Όταν $u_0=0$ τότε : $u=\gamma*t$

Όταν u_0 διάφορο του μηδενός τότε : $u=u_0+\gamma*t$

Το διάστημα που διανύει το κινητό όταν ξεκινάει από την ηρεμία: $s=1/2\ (\gamma*t^2)$.

Το διάστημα που διανύει το κινητό όταν έχει αρχική ταχύτητα: $s=u_o*t+1/2(\gamma*t^2)$. [1]

Ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

Ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ονομάζεται η κίνηση κατά την όποια η ταχύτητα μειώνεται ομαλά. Τη σταθερή μείωση της ταχύτητας στην μονάδα του χρόνου την λέμε επιβράδυνση και την συμβολίζουμε με το γράμμα γ. Την επιβραδυνόμενη μπορούμε να την θεωρήσουμε ως αρνητική επιτάχυνση.

Σε αυτήν την κίνηση έχουμε πάντα αρχική ταχύτητα u_0 και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

1. Ταχύτητα u την χρονική στιγμή t: $u=u_0-\gamma*t$

2. Χρόνος για να μηδενιστεί η ταχύτητα: $t=u_0/\gamma$

3. Το διάστημα που διάνυσε την χρονική στιγμή t: $s=u_o*t-1/2\gamma*t^2$

4. Το διάστημα που διάνυσε μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα: $s=u_0^2/2*\gamma$[1]

Πρώτο αξίωμα της Δυναμικής

Το πρώτο αξίωμα της δυναμικής διατυπώνεται ως εξής: Κάθε σώμα στο οποίο δεν ενεργεί εξωτερική δύναμη είτε παραμένει σε ηρεμία είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

Επίσης λόγω του ότι το σώμα εμμένει στην κινητική του κατάσταση αν δεν αναγκασθεί σε αλλαγή αυτής από εξωτερικές δυνάμεις, μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής: Η κινητική κατάσταση ενός σώματος (ηρεμία ή κίνηση) δεν μπορεί να μεταβληθεί αν δεν επιδράσει σε αυτό κάποια εξωτερική δύναμη. [1]

Δεύτερο αξίωμα (θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής)

Το δεύτερο αξίωμα διατυπώνεται ως εξής :Αν σε ένα υλικό σημείο με μάζα m ασκήσουμε μια δύναμη F, τότε αυτό θα αποκτήσει επιτάχυνση γ ανάλογη προς την δύναμη F που την προκάλεσε. Το αξίωμα αυτό με τον εξής μαθηματικό τρόπο: $F=m*\gamma$ Αν στο υλικό σημείο ενεργούν περισσότερες δυνάμεις F1,F2,F3…., τότε ο πιο πάνω θεμελιώδης νόμος γράφεται με τον εξής τρόπο: $\Sigma F=m*\gamma$

Το ΣF εκφράζει το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν στο υλικό σημείο. Οι δυνάμεις που κινούνται προς την φορά κινήσεως είναι θετικές και αυτές που έχουν αντίθετη φορά είναι αρνητικές. [1]

Διερεύνηση του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής

Κάνοντας διερεύνηση του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν ένα σώμα κινείται με επιτάχυνση γ, τότε οπωσδήποτε ενεργεί σε αυτό μια δύναμη F.
- Όταν σε ένα σώμα ενεργεί σταθερή δύναμη F, τότε αυτό αποκτά σταθερή επιτάχυνση, η οποία είναι ανάλογη της δύναμης F και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας, δηλαδή: $\gamma= F/m$.
- Όταν η δύναμη που ενεργεί σε ένα σώμα (ή η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό) είναι μηδέν($F=0$), τότε η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν($\gamma=0$) [1]

1.11 ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΚΑΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Ομαλή κυκλική κίνηση

Ομαλή κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου Α ονομάζεται αυτή στην οποία η τροχιά που διαγράφει το υλικό σημείο Α είναι περιφέρεια κύκλου και επιπλέον το μέτρο της περιφερειακής ταχύτητας παραμένει σταθερό. [1]

Περιφερειακή ταχύτητα

Ισχύουν οι σχέσεις : $u=\omega*r$ και $u=2\pi*n*r/60$

Όπου u= η περιφερειακή ταχύτητα σε m/s,

ω= η γωνιακή ταχύτητα σε rad/s,

r= η ακτίνα της κυκλικής σε m,

n= ο αριθμός στροφών ανά λεπτό (rpm).

Γωνιακή ταχύτητα : $\omega= 2\pi n/60=\pi n/30$.

Κεντρομόλος επιτάχυνση :$\gamma_\kappa=u^2/r=\omega^2 r$.

Κεντρομόλος δύναμη:Η Κεντρομόλος δύναμη έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1.Διεύθυνση που συμπίπτει με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

2.Φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

3.Σημείο εφαρμογής το υλικό σημείο Α.

4.Μέτρο το οποίο προκύπτει σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής και είναι : $F_\kappa=(m*u^2)/r$.

Επειδή όμως $u=\omega*r$ θα έχουμε: $F\kappa=m*u^2/r=m*\omega^2*r$

Σε ένα υλικό σημείο με μάζα m που κινείται ομαλά σε μια περιφέρεια κύκλου αναπτύσεται μια κεντρομόλος δύναμη Fκ με διεύθυνση την ακτίνα του κύκλου, φορά προς του κύκλου και μέτρο $F\kappa=m*u^2/r=m*\omega^2*r$[1]

Φυγόκεντρη δύναμη

Η Φυγόκεντρος δύναμη έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Διεύθυνση που συμπίπτει με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς , δηλαδή την ίδια διεύθυνση με την κεντρομόλο δύναμη.

2.Φορά αντίθετη από αυτή που έχει η κεντρομόλος δύναμη , δηλαδή από το κέντρο της τροχιάς προς την περιφέρεια.

3.Σημείο εφαρμογής το κέντρο της τροχιάς.

4.Μέτρο ίσο με το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης, δηλαδή: $F_\Phi=F_\kappa=m*u^2/r= m*\omega^2*r$. [1]

Νόμοι της κεντρομόλου και της φυγόκεντρης δύναμης :

1ος νόμος:Η κεντρομόλος δύναμη είναι ανάλογη με την μάζα του υλικού σημείου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

2ος νόμος: Η κεντρομόλος δύναμη είναι ανάλογη με το τετράγωνο της περιφερειακής ταχύτητας u ή το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας ω του υλικού σημείου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση , σε ακτίνα r.

3ος νόμος: Η κεντρομόλος δύναμη που αναπτύσεται σε ένα υλικό σημείο με μάζα m και σταθερό αριθμό στροφών n (σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω) είναι ανάλογη με την ακτίνα περιστροφής r. [1]

Φυγόκεντρη δναμη :

Η φυγόκεντρη δύναμη αποτελεί την αντιδράση στην κεντρομόλο δύναμη όπως και στην περίπτωση του υλικού σημειού. Επίσης η φυγόκεντρη δύναμη ως αντίδραση ενεργεί σε διαφορετικό σώμα από ότι η κεντρομόλος δύναμη. [1]

1.12 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

1.12.1 Ομαλή περιστροφική κίνηση

Στην ομαλή περιστροφική κίνηση το στερεό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή με σταθερό αριθμό στροφών n.Κάθε σημείο του στερεού έχει σταθερή περιφερειακή ταχύτητα u ανάλογα με την θέση του. Όσο πιο μακριά από τον άξονα είναι το σημείο τόσο μεγαλύτερη είναι και η περιφερειακή ταχύτητα u, η οποία δίνεται από τον τύπο :

$u= \omega*r=2\pi n/60*r$[1]

1.12.2 Το πρώτο αξίωμα της δυναμικής για την περιστροφική κίνηση:

Σε κάθε σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα, αν δεν ενεργεί κάποια ροπή ή η συνισταμένη των ροπών που ενέργουν είναι μήδεν, τότε το σώμα είτε παραμένει σε ηρεμία είτε περιστρέφεται ομαλά. [1]

1.12.3 Δεύτερο αξίωμα της δυναμικής για την περιστροφική κίνηση:

Όταν σε ένα σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα ενεργήσει μία ροπή ή μία συνισταμένη ρόπη , τότε το σώμα θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση ω΄,δηλαδή θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση.

Η σχέση που ισχύει λέγεται θεμελιώδης εξίσωση της περιστροφικής κίνησης και είναι η εξής: $M=I* \omega'$

1.12.4 Ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση

Ισχύει ότι: $\omega'=M/I$Από τη σχέση συμπεραίνουμε τα εξής:

α. Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ένα περιστρεφόμενο σώμα είναι ανάλογη της ροπής που ενεργεί σε αυτό. Αν η ροπή που ενεργεί είναι σταθερή,τότε η γωνιακή επιτάχυνση θα είναι σταθερή και το σώμα θα εκτελεί ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση.

β. Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ένα περιστρεφόμενο σώμα από την επίδραση μιας ροπής M είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας I του σώματος ,ως προς τον άξονα περιστροφής αυτού. [1]

1.12.5 Ροπή αδράνειας

1.12.5.1 Ροπή αδράνειας υλικού σημείου

Ροπή αδράνειας Ix ενός υλικού σημείου με μάζα m, ως προς έναν άξονα x που βρίσκεται σε απόσταση r, λέμε το γινόμενο της μάζας m επί το τετράγωνο της απόσταση , δηλαδή : $Ix=m*r^2$. [1]

1.12.5.2 Ροπή αδράνειας στερεού σημείου

Ροπή αδράνειας στερέου σημείου είμαι το άθροισμα των ροπών αδράνειας όλων αυτών των σωματιδίων που έχουν μάζες m_1,m_2,m_3....και απέχουν r_1,r_2,r_3,......από τον άξονα περιστροφής x , δηλαδή: $Ix=m_1*r_1^2+m_2*r_2^2+....=\Sigma m_i*r_i^2$[1]

1.12.5.3 Ροπή ταλαντώσεως

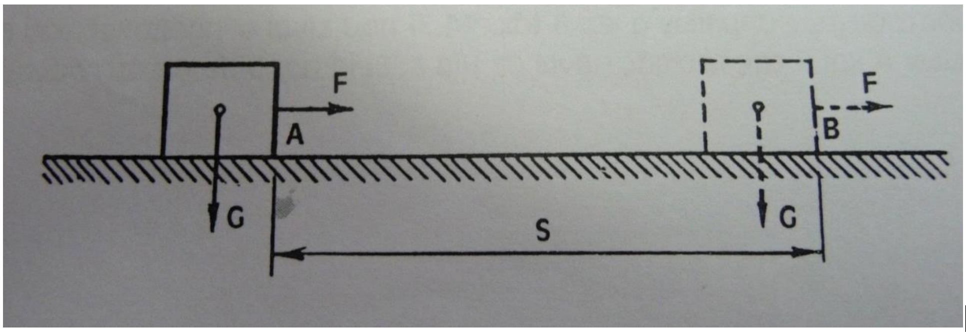
Ισχύει ότι: $I_{\sigma\varphi}=m*R^2=m*D^2/4$

Το γινόμενο mD^2 ονομάζεται ροπή ταλαντώσεως του σφονδύλου ή σφονδύλικη ροπή και έχει διαστάσεις $Kg*m^2$[1]

1.13 ΕΡΓΟ

1.13.1 Έργο σταθερής δύναμης που συμπίπτει με την μετατόπιση

Έργο μιας δύναμης F με σταθερή ένταση ,που μετακίνει το σημείο εφαρμογής της πάνω στην διεύθυνση της , λέμε το γινόμενο της δύναμης F επί την απόσταση s που μετακίνειται το σημείο εφαρμογής. W=F*s . [1]



[1]

Σχήμα 7

1.13.2 Μονάδες έργου

Έργο ενός joule (1J) παράγει μία δύναμη ενός Newton (1N) της οποίας το σημείο εφαρμογής της μετατοποίζεται κατά 1 m. W=F*s=>1J=1Nm

1.13.3 Κινητήριο και καταναλισκόμενο έργο

Όταν σε ένα σώμα ενεργεί μία ή περισσότερες δύναμεις οι οποίες προκαλούν την κίνηση του σώματος ή βοηθούν την κίνηση του, τότε λέμε ότι αυτές οι δυνάμεις παράγουν έργο κινητήριο.

Αντίθετα αν σε ένα σώμα ενεργούν μία ή περισσότερες δύναμεις οι οποίες προβάλλουν αντίσταση στην κίνηση, τότε το έργο που πράγουν είναι έργο αντιστάσεως ή καταναλισκόμενο έργο. [1]

1.14 ΙΣΧΥΣ

1.14.1 Ορισμός της ισχύος

Ισχύς μίας δύναμης ή μίας μηχανης ονομάζεται το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται σε χρόνο ενός δευτερολέπτου.

Αν W το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται σε χρόνο t, τότε σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό η ισχύς P προκύπτει από την σχέση : P=W/t[1]

1.14.2 Μονάδες μέτρησης ισχύος

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το Watt δηλαδή: P=W/t=>1W=1J/s

Επίσης χρησιμοποιήται και ο μετρικός ίππος (PS) ο οποίος ορίζεται ως εξής: 1PS=75Kpm/s

1.14.3 Ισχύς δύναμης με σταθερή ένταση και διεύθυνση που προκάλει ομαλή ευθύγραμμη κίνηση

Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου σε ένα σώμα ενεργεί μία δύναμη με σταθερή ένταση και διεύθυνση και προκαλεί σε αυτό ομάλη ευθύγραμμη κίνηση στην διεύθυνση της.

Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα U είναι σταθερή και την υπολογίζουμε από τον γνωστό τύπο:$U=s/t$

Λόγω του ότι ισχύει ο παραπάνω τύπος η ισχύς είναι: $P=F*U$[1]

1.14.4 Ισχύς περιφερειακής δύναμης

Η περιφερειακή δύναμη σε μία στροφή παράγει έργο:

$W=F*2\pi*r$

και σε στροφές ανά λέπτο $W=F*2\pi*n$

Επομένως η ισχύς, που είναι το πραγόμενο έργο ανά δευτερόλεπτο είναι:

$P=F*2\pi*r*n/60$

Επειδή το γινόμενο $F*r$ είναι η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα περιστροφής, η ισχύς υπολογίζεται και από την σχέση :$P=M2\pi*r*n/60$[1]

1.14.5 Ροπή στρέψεως σώματος με ομάλη περιστροφική κίνηση

Αν ένα σώμα(π.χ. τύμπανο,άξονας,κ.λ.π.) εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση με αριθμό στροφών ανά λεπτό ή και ισχύ P σε W, τότε η ροπή στο σώμα αυτό, σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις θα είναι:

$M=P/\omega=60\ P/2\pi*n=9{,}554P/n$ [1]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

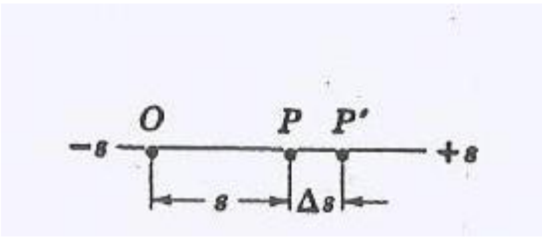
2.1 Περιγραφή τής κίνησης

Η κινηματική μελετάει τη θέση στό χώρο σαν συνάρτηση του χρόνου και συχνά ονομάζεται ‘’γεωμετρία της κίνησης ΄΄. Ο υπολογισμός των τροχιών αεροσκαφών ,πυραύλων και διαστημικών σκαφών και η σχεδίαση έκκεντρων οδοντωτών τροχών και μοχλών που ελένχουν ή παράγουν τις κινήσεις που θέλουμε ,ειναι παραδείγματα κινηματικών προβλημάτων .Η κινηματική που μελετάει μονο την κίνηση ,ειναι μια απαραίτητη εισαγωγή στην κινητική αφού η ικανότητα περιγραφής μιας κίνησης ειναι προαπαιτούμενη για την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ δυνάμεων και των κινήσεων που τις ακολουθούν .

Η κινηση των υ.σ περιγράφεται με τον προσδιορισμό γραμμικών και γωνιακών συντεταγμένων και των παράγωγων τους ως προς το χρόνο .Η κίνηση υ.σ πάνω σε ευθείες λέγεται ευθύγραμμη κίνηση ,ενω η κίνηση πανω σε καμπύλες λέγεται καμπυλόγραμμη κίνηση .Η καμπύλη τροχειάς μπορεί να ειναι δυσδιάστατη ή τρισδιάστατη .Η κινηματική των υ.σ θα ανα πτυχθεί σταδιακά, μελετώντας μια, δύο και στο τελος τρεις συντεταγμένες .[1]

2.2 Ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου

Θεωρούμε ενα υ.σ P που κινείται κατα μήκος μιας ευθείας κατα τη διεύθυνση s (σχ.2). Η θέση του P σε κάθε χρονική στιγμή t, μπορεί να προσδιοριστεί απο τη μετατόπιση του s , απο κάποιο σταθερό σημείο αναφοράς ο που βρίσκεται πάνω στην ευθεία .Αν το υ.σ κινηθεί κατα ενα διάστημα Δs απο το P στο P’ μέσα στο χρόνο Δt ,η μεση ταχύτητά του γιαυτο το διάστημα είναι $υ_μ=Δs/Δt$. Όσο το χρονικό διάστημα μικραινει τείνοντας στο 0 ,η μέση ταχύτητα τείνει στη στιγμιαία ταχύτητα του P που είναι υ= $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta s/\Delta t$[1]



[1]

Σχήμα 2

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \qquad \textbf{(4)}$$

Αν η στιγμιαία ταχύτητα του υ.σ αλλάζει απο u που είναι στο P,σε υ+Δυ στο P'' ,η μέση επιτάχυνση κατα τη διάρκεια του αντίστοιχου χρονικού διστήματος Δt ειναι αμ =Δu/Δt και θα είναι θετική ή αρνητική ,ανάλογα αν η ταχύτητα αυξάνεται ή μειώνεται .Η στιγμιαία επιτάχυνση α του υ.σ ειναι το μέτρο της μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου δηλαδή υ = $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta u/\Delta t$[1]

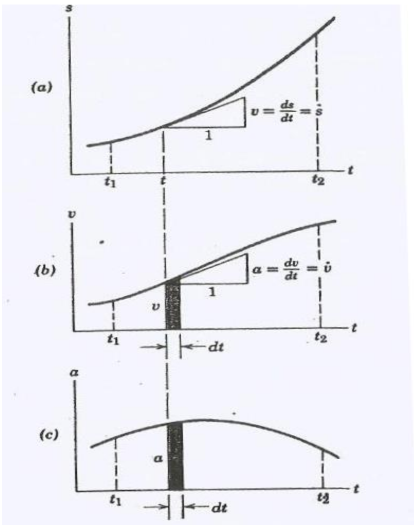
$$\boldsymbol{\alpha = \frac{du}{dt} = \dot{\upsilon}} \qquad \textbf{ή} \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}} \qquad \textbf{(5)}$$

Απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των εξισώσεων 4 και 5 , βρίσκουμε μια διαφορική εξίσωση που σχετίζει τη μετατόπιση ,την ταχύτητα και την επιτάχυνση :

$$\mathbf{udu=ads} \qquad \textbf{ή} \qquad \boldsymbol{\dot{s}d\dot{s}} = \boldsymbol{\ddot{s}}\mathbf{ds} \qquad \textbf{(6)}$$

Οι εξισώσεις 4,5 και 6 ειναι διαφορικές εξισώσεις για την ευθύγραμμη κίνηση ενος υ.σ .Προβλήματα ευθύγραμμης κίνησης που περιέχουν πεπερασμένες μεταβολές μετατοπίσεων και ταχυτήτων λύνονται με την ολοκλήρωση αυτων των βασικών διαφορικών εξισώσεων .Η μετατόπιση s , η ταχύτητα u και η επιτάχυνση α ειναι αλγεβρικές ποσότητες ,άρα τα πρόσημά τους μπορούν να ειναι θετικά και αρνητικά . [1]

Κατα τη λύση πολλών προβλημάτων , είναι χρήσιμο να παραστήσουμε γραφικά τις σχέσεις μεταξύ των s,u,α και t.Το σχήμα 3^{α} παριστάνει καθε αυθαίρετη μεταβολή του s σαν συνάρτηση του χρόνου t ,κατα το χρονικό διάστημα μεταξή t1 και t2



[1]

Σχήμα 3

Η κλίση της καμπύλης σε κάθε χρονική στιγμή t ειναι υ ταχύτητα u=$\dot{s}$ αυτης της στιγμής .Το σχήμα 3 ειναι μια σχηματική παράσταση αυτών των κλίσεων και δίνει τη μεταβολή της ταχύτητας u συναρτήσει του χρόνου t .Η κλίση της καμπύλης της ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή ειναι η επιτάχυνση α=$\dot{u}$ αυτης της στιγμής .Το σχήμα ε ειναι η παράσταση αυτων των κλίσεων και δίνει τη μεταβολή της επιτάχυνσης α συναρτήσει του χρόνου t. [1]

Φαίνεται αμέσως απο το σχήμα 3b οτι η επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη u-t ,κατα την διάρκεια του χρόνου dt ειναι u dt που απ την εξίσωση 4 ειναι μετατόπιση ds.Αρα η μετατόπιση του υ.σ κατα το χρονικό διάστημα απο t1 ως t2 ειναι η αντίστοιχη επιφανεια κάτω απο την καμπύλη , που είναι

$\int_{s1}^{s2} ds$=$\int_{t1}^{t2} udt$ ή s2-s1= (επιφάνεια κάτω απο την

καμπύλη u-t)

Με τον ιδιο τρόπο , απο το σχήμα 3c βλέπουμε οτι η επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη α-t κατα τη διάρκεια του χρόνου dt ειναι a*dt,που παο την πρώτη των εξισώσεων 5 είναι du . Δηλαδή η μεταβολή της ταχύτητας μεταξή t1 και t2 ειναι η αντίσοιχη επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη που είναι

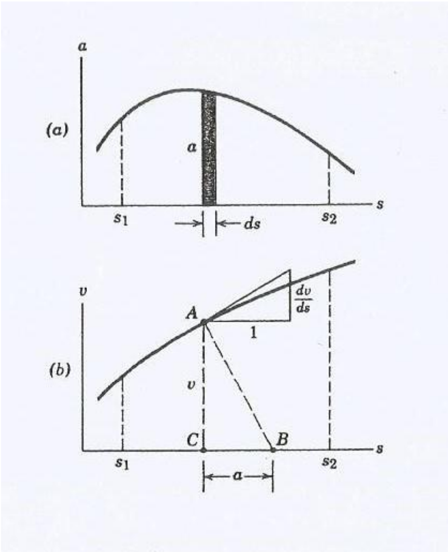
$\int_{u1}^{u2} du$=$\int_{t1}^{t2} \alpha dt$ ή u2-u1 = (επιφάνεια κάτω απο την

καμπύλη a-t)

Σημειώνουμε δυο πρόσθετες γραφικές παραστάσεις .Αν παραστήσουμε με την επιτάχυνση α σαν συνάρτηση της μετατόπισης s ,(σχ.4α),η επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη κατα την διάρκεια της μετατόπισης ds ειναι α ds ,που απο την εξίσωση 6 ειναι u du =d(u^2/2).Δηλαδή η επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη μεταξύ των μετατοπίσεων s1 και s2 είναι

$\int_{u1}^{u2} u\,du \;=\int_{s1}^{s2} a\,ds$ ή $\frac{1}{2}$(u1-u2) = (επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη α-s)

Αν παραστήσουμε την ταχύτητα u σαν συνάρτηση της μετατόπισης s (σχ.4b),η κλίση της καμπύλης σε κάθε σημείο Α ειναι du/ds .Φέρνοντας την κάθετο ΑΒ της καμπύλης σε αυτό το σημείο ,βλέπουμε απο τα όμοια τρίγωνα ότι



Σχημα 4

$\overline{CB}$/c =du/ds.Αρα απο την εξ.6 $\overline{CB}$=(ds/du)=α, δηλαδή η επιτάχυνση .Ειναι απαραίτητο οι άξονες της ταχύτητας και της μετατόπισης να εχουν την ιδια αριθμητική κλίμακα ,ώστε η επιτάχυνση που μετράμε στην κλίμακα των μετατοπίσεων σε μέτρα , να παριστάνει την πραγματική επιτάχυνση σε m/s^2. [1]

Οι γραφικές παραστάσεις που περιγράψαμε ,ειναι χρήσιμες για να βλέπουμε τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων ποσοτήτων της κίνησης ,αλλά και για να βρίσκουμε προσεγγιστικά αποτελέσματα με γραφική ολοκλήρωση ή διαφόριση,οταν η έλλειψη γνώσης της μαθηματικής σχέσης εμποδίζει την έκφραση της σαν σαφή μαθηματική συνάρτηση .Πειραματικές πληροφορίες αναλύονται γραφικά πολύ συχνά . [1]

Οι ποσότητες μετατόπιση,ταχύτητα και επιτάχυνση μπορούν να γραφτούν και σαν διανύσματα.Αν ο άξονας των χ αντικαταστήσει τη διεύθυνση s και αν $\vec{\imath}$ ειναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατα τη θετική φορά πάνω στον χ, τότε οι όροι της κίνησης μπορούν να γραφτούν ως εξής : μετατόπιση $\vec{s}=\vec{\imath}$x , ταχύτητα $\vec{V}=\vec{\imath}\dot{x}$ και επιτάχυνση $\vec{\alpha}=\vec{\imath}\dot{u}=\vec{\imath}\ddot{x}$.Για ευθύγραμμη κίνηση ,όπου η διεύθυνση της κίνησης είναι γνωστή κατα μήκος μιας ευθείας γραμμής δεν χρειάζεται η έκφραση των πιο πάνω ποσοτήτων με διανύσματα .Η μονόμετρη αλγεβρική τους έκφραση αρκεί . Η φορά της ποσότητας προσδιορίζεται απο το αλγεβρικό τους σημείο . [1]

Αν γνωρίζουμε τη μετατόπιση s για όλες τις τιμές του χρόνου t,βρίσκουμε την ταχύτητα u και την επιτάχυνση α παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς το χρόνο .Όμως σε πολλά προβλήματα , η συναρτησιακή σχέση μεταξύ μετατόπισης και χρόνου είναι άγνωστη και πρέπει να προσδιοριστεί με διαδοχικές ολοκληρώσεις απο την επιτάχυνση .Η επιτάχυνση προσδιορίζεται απο τις δυνάμεις και τις ροπές που εξασκούνται στα κινούμενα σώματα και υπολογίζεται απο τις εξισώσεις της κινητικής που θα συζητηθεί παρακάτω. Ανάλογα με τη φύση των δυνάμεων και των ροπών ,η επιτάχυνση προσδιορίζεται σα συνάρτηση του χρόνου ,της ταχύτητας ή της μετατόπισης της ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης σε κάθε περίπτωση φαίνεται πιο κατω . [1]

Σταθερή επιτάχυνση

Οταν το α ειναι σταθερό η πρώτη απο τις εξισώσεις 5,6 μπορούν να ολοκληρωθούν απ'ευθείας .Για απλούστευση με s=0,u=u1 και t=0 στην αρχή του διαστήματος ,για πάροδο t οι ολοκληρωμένες εξισώσεις γίνονται

$$\int_{u1}^{u} du = \alpha \int_{0}^{t} dt \qquad ή \qquad u = u1 + \alpha t$$

$$\int_{u1}^{u} u\, du = \alpha \int_{0}^{g} ds \qquad ή \qquad u^2 = u1^2 + 2\alpha s$$

Αν αντικαταστήσουμε την ολοκληρωμένη έκφραση του υ στην εξίσωση 4 και ολοκληρώσουμε ως προς t έχουμε

$$\int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (u1 + \alpha t) dt \qquad ή \qquad s = u1t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Αυτες οι σχέσεις ισχύουν μόνο για την περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης .Τα όρια ολοκλήρωσης εξαρτώνται απο την αρχική και τελική κατάσταση και για ένα δοσμένο πρόβλημα μπορεί να είναι διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν εδώ.Για παράδειγμα ,μπορεί να βολεύει περισσότερο να αρχίσουμε την ολοκλήρωση απο κάποιο προσδιορισμένο χρόνο t1 η αρχική μετατόπιση s1. [1]

Η επιτάχυνση δοσμένη σα συνάρτηση του χρόνου α=f(t).

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση στην πρώτη απο τις εξισώσεις 5 έχουμε f(t)=du/dt ,οπότε η ταχύτητα βρίσκεται με άμεση ολοκλήρωση :

$$\int_{u1}^{u} du = \int_{0}^{t} f(t) dt \qquad ή \qquad u = u1 + \int_{0}^{t} f(t)\, dt$$

Από αυτή την ολοκληρωμένη έκφραση της ταχύτητας συναρτήσει του t βρίσκουμε τη μετατόπιση s ολοκληρώνοντας την εξ.4 που γίνεται :

$$s = \int_{0}^{g} ds = \int_{0}^{t} u dt$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αόριστο ολοκλήρωμα ,πρέπει να βρούμε τις οριακές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές της ολοκλήρωσης .Τα αποτελέσματα ομως θα βγούν ιδια με εκείνα που βγαίνουν οταν χρησιμοποιούμε ορισμένο ολοκλήρωμα .

Αν θέλουμε μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση s λύνοντας τη β΄ βαθμού διαφορική εξίσωση s=f(t) ,που βρίσκεται αν αντικαταστήσουμε την f(t) στη δεύτερη απο τις εξ.5. [1]

Η επιτάχυνση δοσμένη σαν συνάρτηση της ταχύτητας a=f(u)

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση στην πρώτη δοσμένη απο τις εξ.5 έχουμε f(u)=du/dt που ολοκληρώνεται ως εξης :

$$\int_0^t dt = \int_{u1}^{u} \frac{du}{f(u)}$$

Απο την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε την u σε σχέση με το t .Μετά όπως πριν ,ολοκληρώνοντας τη u ως προς t βρίσκουμε τη μετατόπιση s. [1]

Επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε την επιτάχυνση στην εξ.6 και να ολοκληρώσουμε οπότε

$$\int_{u1}^{u} \frac{udu}{f(u)} \int_0^s ds = s$$

Η επιτάχυνση δοσμένη σαν συνάρτηση της μετατόπισης a=f(s)

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση στην εξ.6 και ολοκληρώνοντας έχουμε :

$$\int_{u1}^{u} udu = \int_0^g f(s)ds \qquad \text{ή} \qquad u^2 = u1^2 + 2\int_0^g f(s)\,ds$$

Αντικαθιστώντας τώρα το ds/dt αντί u s σε αυτή την ολοκληρωμένη εξίσωση ,βρίσκουμε μια εξίσωση που μπορούμε να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το s σα συνάρτηση του t.

Σε κάθε μια απο τις προηγούμενες περιπτώσεις οπου η επιτάχυνση διαφέρει ανάλογα με κάποια συναρτησιακή σχέση ,η δυνατότητα επίλυσης των εξισώσεων με άμεση μαθηματική ολοκλήρωση εξαρτάται απο τη μορφή της συνάρτησης .Σε περιπτώσεις που η ολοκλήρωση ειναι πολύ δύσκολη, μπορούμε να την κάνουμε γραφικά ,αριθμητικά ή ακόμα και με υπολογιστή. [1]

Γωνιακή κίνηση μιας γραμμής

Παραπάνω αναλύθηκε η ευθύγραμμη μετατόπιση και οι παράγωγοι της ως προς το χρόνο .Μια δεύτερη ποσότητα που χρησιμοποιείται στην κινηματική είναι η γωνιακή μετατόπιση .Σε αυτή την παράγραφο θα αναπτυχθεί η γωνιακή κίνηση μιας γραμμής ,όταν αυτή γίνεται πάνω σε ένα ορισμένο επίπεδο. Το σχήμα 5 δείχνει δύο παραδείγματα ,όπου η θέση σε ένα επίπεδο περιγράφεται με γωνιακές μετρήσεις .Στο σχήμα 5^{α} η θέση του υ.σ P που κινείται κατά μήκος ορισμένου δρόμου, στο επίπεδο χ-ψ μπορεί να προσδιοριστεί απο την γωνία θ που σχηματίζεται από τη γραμμή ΟΑ και τον άξονα των χ. Στο σχήμα 5b η γωνια θ απο τον άξονα αναφοράς μέχρι την γραμμή ΑΒ που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη γωνιακή θέση του κύκλου .Σημειώνουμε ότι η γωνιακή θέση μιας γραμμής δεν απαιτεί την ύπαρξη ενός ορισμένου σημείου πάνω στην γραμμή ,περι το οποίο γίνεται η περιστροφή . [1]

Γενικά λοιπόν ,για την γραμμή ΑΒ του σχ.5c που έχει περιοριστεί να κινείται στο επίπεδο του σχήματος ,η γωνιακή μετατόπιση της γραμμής ως προς μια σταθερή διεύθυνση αναφοράς ,είναι η γωνία θ .Για τις περιπτώσεις που εξετάζουμε, η γωνιακή μετατόπιση είναι θετική κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η εκλογή του άξονα αναφοράς και της φοράς των θετικών μετρήσεων είναι τελείως αυθαίρετη . [1]

Η γωνιακή κίνηση μιας γραμμής εξαρτάται μόνο απο τη γωνιακή της συνιστώσας και των παραγώγων ως προς το χρόνο της συνιστώσας αυτής.Η κεντρική γραμμή ΑΒ του συνδέσμου στο σχ.6 για παράδειγμα, δεν έχει γωνιακή κίνηση κατά τη διάρκεια της περιστροφής των 01Α και 02Β αφού δεν υπάρχει μεταβολή της γωνίας που σχηματίζει η ΑΒ ως προς ένα σταθερό άξονα αναφοράς , όπως είναι η 0102. Ακόμα πρέπει να σημειωθεί ότι ένα σημείο ή ένα υ.σ δεν μπορεί να έχει γωνιακή κίνηση ,γιατί αυτή συνδέεται μόνο με τη γωνιακή κίνηση μιας γραμμής . [1]

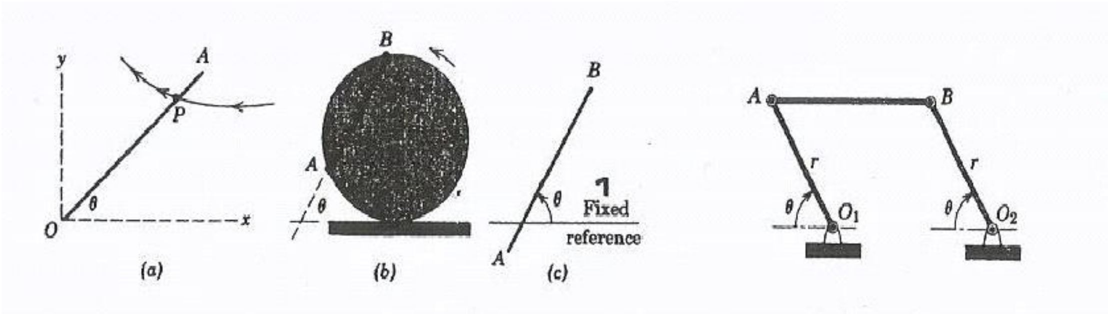
Η γωνιακή ταχύτητα ω και η γωνιακή επιτάχυνση α μια γραμμής , είναι αντίστοιχα ,η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της γωνιακής μετατόπισης θ Αυτοί οι ορισμοί δίνουν :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \qquad (7)$$

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \quad \text{ή} \quad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta$$

Η τρίτη σχέση λαμβάνεται αν απαλείψουμε το dt απο τις δυο πρώτες .Σε κάθε μια απο αυτές τις σχέσεις η θετική φορά για το ω και το α,κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού η αντίθετη είναι η ίδια με αυτήν που διαλέχτηκε για το θ .οι εξισώσεις 7 είναι ανάλογες με τις εξισώσεις 4,5 και 6 που περιγράφουν την ευθύγραμμη κίνηση στην παράγραφο 10 για την ευθύγραμμη κίνηση, μπορούν να εφαρμοστούν και στην περιστροφή σε ένα επίπεδο αν οι γραμμικές ποσότητες s,u και α αντικατασταθούν αντίστοιχα από τις γωνιακές ποσότητες θ ω και α. [1]



[1]

Σχημα 11

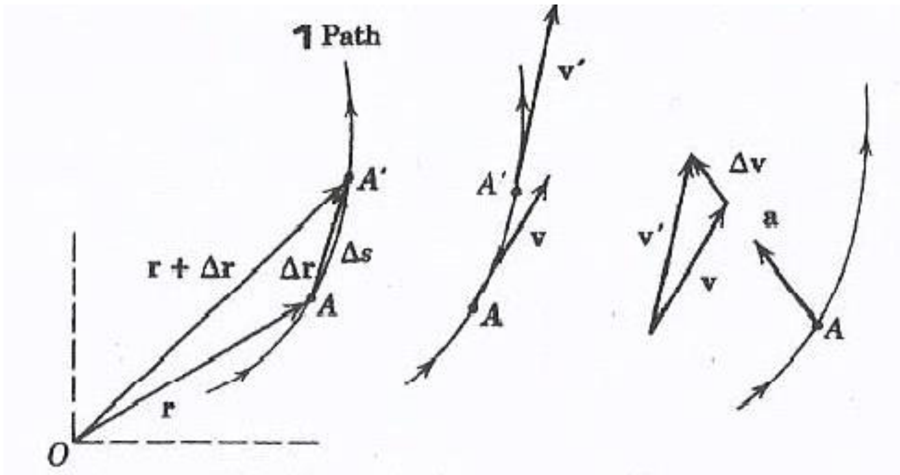
2.3 Επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση

Η κίνηση ενός υ.σ κατα μήκος μιας γραμμής που βρίσκεται πάνω σε ένα μόνο επίπεδο ,λέγεται επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση .Η πλειοψηφία των κινήσεων σημείων η υ.σ που συναντάμε στα προβλήματα του μηχανικού είναι αυτου του τύπου.Θεωρείστε ένα υ.σ που κινείται πάνω στην επίπεδη καμπύλη του σχ.8. Στη θέση της Α το υ.σ προσδιορίζεται απο το διάνυσμα θέσης r,που μετριέται απο μια σταθερή αρχή Ο και στο Α απο το διάνυσμα r+Δr. Η διανυσματική μεταβολή θέσης λέγεται μετατόπιση Δr και ειναι ανεξάρτητη απο την εκλογή της αρχής Ο.Η απόσταση που πραγματικά διανύεται ειναι το μονόμετρο μήκος Δs που μετριέται κατά μήκος της τροχιάς. Αν το διάστημα τείνει στο μηδέν, η απόσταση Δs μπορεί να γραφτεί σαν το διαφορικό ds που το όριο ισούται με το μέτρο της αντίστοιχης διαφορικής μετατόπισης dr . [1]

Η μέση ταχύτητα του υ.σ απο το Α στο Α’ ορίζεται ως

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

Πρέπει να σημειωθεί οτι το δίανυσμα ṙ ειναι η ταχύτητα εφαπτομένη στην τροχιά ,ενω το ṙ ειναι μονόμετρο μέγεθος και αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο ,το μήκος ή το μέτρο του r.Το μέτρο της ταχύτητας ειναι ṡ =|v|.[1]

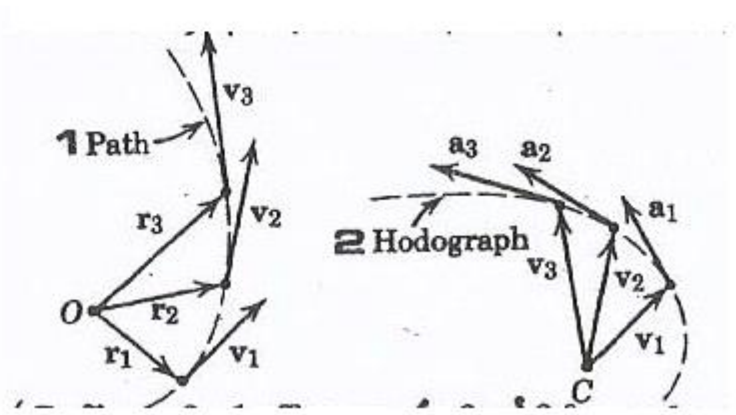


Σχημα 12

Κατά την κίνηση αοι ο Α στο Α’ η ταχύτητα μεταβάλλεται απο το ν σε ν’ κατα την ποσότητα Δν όπως φαίνεται στο σχ.8.Η μέση επιτάχυνση του υ.σ μεταξύ Α και Α’ ειναι Δν/Δt.Στη γενική περίπτωση το Δν δεν ειναι ούτε εφαπτόμενο ούτε κάθετο στην τροχιά .Όσο το διάστημα μικραίνει,το Δν πλησιάζει τη διεύθυνση της στιγμιαίας επιτάχυνσης α που ορίζεται απο τη σχέση

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\ddot{r}$$

Στο σχ.9 φαίνονται τρείς αυθαίρετες θέσεις του υ.σ πάνω στην τροχιά του και τα αντίστοιχα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης .Σε κάθε διάνυσμα θέσης αντιστοιχεί ένα διάνυσμα ταχύτητας εφαπτόμενο στην τροχιά σύμφωνα με τη σχέση v=$\dot{r}$.Αν τώρα σχεδιάσουμε αυτα τα τρία διανύσματα της ταχύτητας αρχίζοντας απο το ίδιο αυθαίρετο σημείο ψ,σχηματίζεται απο τα τέλη τους μια καμπύλη ,που λέγεται οδογράφος της κίνησης .Οι παράγωγοι αυτών των διανυσμάτων ταχύτητας ,θα είναι τα διανύσματα της επιτάχυνσης α=$\dot{v}$*και* ειναι εφαπτόμενα στην οδογράφο.Φαίνεται καθαρά οτι η επιτάχυνση με την ταχύτητα εχουν την ιδια σχέση που είχε η ταχύτητα με το διάνυσμα θέσης . [1]



[1]

Σχημα 13

Το γεωμετρικό πορτραίτο των παραγώγων του διανύσματος θέσης r και του διανύσματος της ταχύτητας v του σχ.8, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την παράγωγο οποιασδήποτε διανυσματικής ποσότητας ςς προς t ή ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή .Μετά την εισαγωγή που κάναμε για την παράγωγο ενος διαστήματος ,στους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ειναι απαραίτητο σε αυτο το σημείο να θέσουμε τους κανόνες που διέπουν την παραγώγηση διανυσματικών ποσοτήτων.Αυτοι οι κανόνες είναι ίδιοι με εκείνους της παραγώγησης μονόμετρων μεγεθών,εκτός απο την περίπτωση του εξωτερικού γινόμενου ,όπου δεν μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των όρων . [1]

Υπάρχουν τρία διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων ,που συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση ενός υ.σ .Απο τη μελέτη των συστημάτων αυτών θα μάθουμε να διαλέγουμε ποιό είναι το κατάλληλο για κάθε δοσμένο πρόβλημα .Η εκλογή αυτή εξαρτάται απο το είδος της κίνησης ή απο τον τρόπο που δίνονται οι πληροφορίες.Τώρα θα εξετάσουμε χωριστά κάθε ένα απο τα τρία συστήματα . [1]

2.4 Ορθογώνιες συντεταγμένες (χ-y)

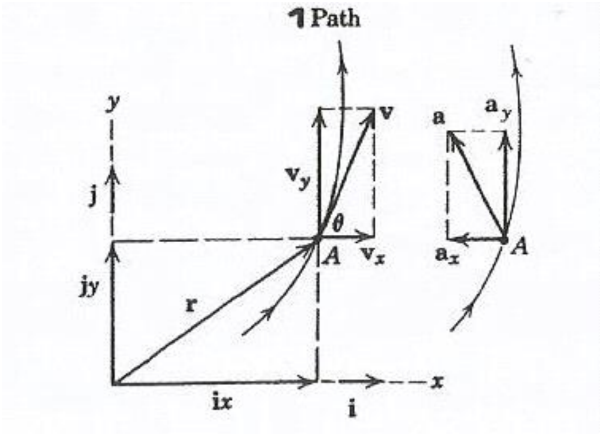
Αυτο το σύστημα αναφοράς ειναι ιδιαίτερα χρήσιμο για κινήσεις όπου οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στους άξονες χ και y ,παράγονται ή προσδιορίζονται ανεξάρτητα .Στην περίπτωση αυτή η καμπυλόγραμμη κίνηση λαμβάνεται συνδιάζοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες της κίνησης .Το διάνυσμα θέσης r , η ταχύτητα v και η επιτάχυνση α του υ.σ στο σχ.8 μπορούν να γραφτούν σα συναρτήσεις των συνιστωσών τους ως πρός τους άξονες χ,y με τη βοήθεια των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j. [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}x+\mathbf{j}y \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{i}\dot{x}+\mathbf{j}\dot{y} \\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{i}\ddot{x}+\mathbf{j}\ddot{y} \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

όπως φαίνεται και στο σχ.10 όπου τα μέτρα των συνιστωσών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι $υx=\dot{x}$,$υy=\dot{y}$,και $αx=\dot{υ}x=\ddot{x}$,$αy=\dot{υ}y=\ddot{y}$ (όπως φαίνεται σε αυτό το σχήμα το αx κατευθύνεται πρός τα αριστερά ,άρα το $\ddot{x}$,είναι αρνητικός αριθμός).Η διεύθυνση της ταχύτητας είναι πάντα κατα μήκος της τροχιάς και απο το σχήμα φαίνεται οτι ισχύουν οι σχέσεις :

$$u^2=ux^2+uy^2 \qquad \text{και} \qquad εφθ=\frac{uy}{uz}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα i και j δεν έχουν χρονικές παραγώγους ,αφού και οι διευθύνσεις τους και τα μέτρα τους είναι σταθερά .Η ολοκλήρωση των συνιστωσών της επιτάχυνσης δυο φορές ως πρός το χρόνο δίνει τις αντίστοιχες συνιστώσες της μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου ,x=f1=(t) και y=f2=(t).Η απαλοιφή του t απο αυτές τις δύο κινήσεις σε ορθογώνιες συντεταγμένες ,δεν ειναι τίποτε άλλο απο την υπέρθεση των συντεταγμένων δυο ταυτόχρονων ευθύγραμμων κινήσεων ,μιας κατα τον άξονα x και μιας κατά τον y. [1]



[1]

Σχημα 14

2.5 Κάθετες και εφαπτομενικές συντεταγμένες (n-t)

Αυτές οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της κίνησης ,που βρίσκονται κατα μήκος της εφαπτομένης τ και της κάθετης n στην καμπύλη τροχιά στη στιγμιαία θέση του υ.σ (σχ.11 α),δίνουν την πιο συνηθισμένη και χρήσιμη περιγραφή της καμπυλόγραμμης κίνησης .Η θετική φορά του n λαμβάνεται προς το κέντρο καμπυλότητας 0 της τροχιάς . [1]

Η ταχύτητα ν ενος υ.σ κατα μήκος της τροχιάς έχει μέτρο :

$$\mathbf{U=\dot{s}=\frac{ds}{dt}=\frac{\rho d\theta}{dt}=\rho\theta} \qquad \textbf{(9)}$$

Όπου ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στη θεωρούμενη θέση. Μεταξύ των Α και Α' η διανυσματική αλλαγή της ταχύτητας ,που φαίνεται στο σχ.11b, είναι

$$\mathbf{Dv=dvn+dvt} \qquad \textbf{(10)}$$

Όπου, η ως πρός n συνιστώσα, οφείλεται στη μεταβολή της διεύθυνσης του v και έχει μέτρο |dvn|=udθ,και η πρός t συνιστώσα, οφείλεται στην αλλαγή του μέτρου του v και είναι |dvt|=d(ρθ) .Πρέπει να σημειωθεί οτι το μέτρο dv της διαφορικής μεταβολής του διανύσματος v, δεν ειναι το ίδιο με τη διαφορική μεταβολή du του μέτρου του v.Με άλλα λόγια ,για ένα διάνυσμα που αλλάζει διεύθυνση ,το μέτρο της παραγώγου διαφέρει απο την παράγωγο του μέτρου. [1]

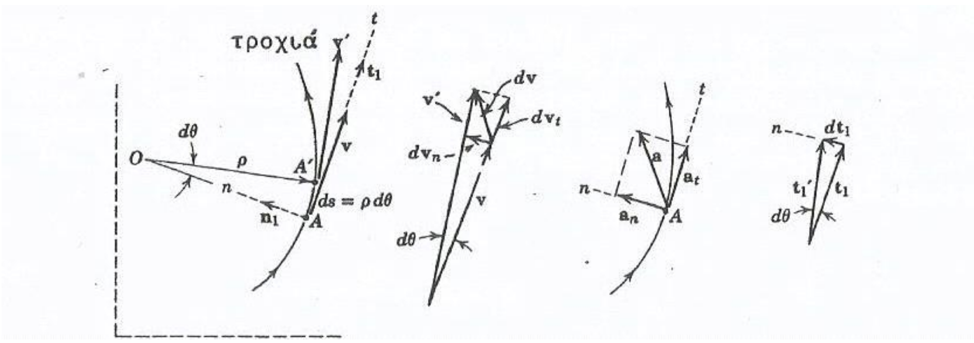
Η επιτάχυνση α λαμβάνεται στο όριο ,διαιρώντας την εξίσωση 10 με dt ,και εχει δύο συνιστώσες (σχ.11c),

$$\mathbf{a=an+at} \qquad \textbf{(11)}$$

Η συνιστώσα ως πρός n , οφείλεται στην αλλαγή της διεύθυνσης του v και εχει μέτρο

$$\boldsymbol{\alpha n=\frac{|dvn|}{dt}=\frac{u\,d\theta}{dt}=u\dot{\theta}=\rho\dot{\theta}^2=\frac{u^2}{\rho}} \qquad \textbf{(12)}$$

Οι δυο τελευταίες εκφράσεις για το αn,προέρχονται απο αντικατάσταση της εξ.9 και θα πρέπει να μελετηθούν προσεχτικά .Παρατηρείστε οτι η ως πρός n συνιστώσα της επιτάχυνσης ,διευθύνεται πάντα στο κέντρο καμπυλότητας, οπως φαίνεται στα σχ.11b,c. [1]



[1]

Σχημα 15

Η ως πρός t συνιστώσα της επιτάχυνσης ,οφείλεται στη μεταβολή του μέτρου v και έχει τιμή

$$\boldsymbol{\alpha t=\frac{|dvt|}{dt}=\dot{u}=\ddot{s}} \qquad \textbf{(13)}$$

όπου s είναι η απόσταση που μετριέται πάνω στην τροχιά .Οι δυο συνιστώσες της επιτάχυνσης φαίνονται στο σχ.11c.Αν η ταχύτητα του υ.σ ελαττωνόταν αντί να αυξάνεται ,η at θα είχε αντίθετη φορά . [1]

Η προηγούμενη ανάλυση της επιτάχυνσης ,έδωσε μια φυσική και γεωμετρική εικόνα των διανυσμάτων και των μεταβολών τους και είναι απαραίτητο υπόβαθρο, για να καταλάβουμε την παραγώγιση της διανυσματικής εξίσωσης της ταχύτητας ,απο όπου παίρνουμε την επιτάχυνση .Για το λόγο αυτό θεωρούμε δυο μοναδιαία διανύσματα t1 και n1 κατά μήκος της εφαπτομένης και της κάθετης σε αυτήν διεύθυνση στη τροχιά ,στο εξεταζόμενο σημείο ,όπως φαίνεται στο σχ.11. Αρα η ταχύτητα μπορεί να γραφτεί με διανυσματική μορφή ως εξής . [1]

$$v = t1u$$

όπου u είναι το μέτρο v και το t1 δίνει τη διευύθυνση του v. Η παραγώγιση του γινομένου αυτού ως προς το χρόνο δίνει :

$$a = \dot{v} = \dot{t}1u + t1\dot{u}$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα εχει χρονική παράγωγο ,αφού η διεύθυνση του αλλάζει,ενω το μέτρο του παραμένει μοναδιαίο .Η διανυσματική μεταβολή του t1 κατά τη διάρκεια του διαστήματος μεταξύ Α και Α' φαίνεται στο σχ.11d. Το μέτρο της μεταβολής αυτής σε χρόνο dt είναι |t1|=dθ=dθ,και η διεύθυνση της καθορίζεται απο το μοναδιαίο διάνυσμα n1. [1]Άρα

$$\boldsymbol{\dot{t}1 = \frac{dt1}{dt} = \frac{n1d\theta}{dt} = n1\dot{\theta}} \qquad \textbf{(14)}$$

Αρα η επιτάχυνση γίνεται

$$\boldsymbol{a = n1u\dot{\theta} + t1\dot{u}} \qquad \textbf{(15)}$$

όπου οι δύο όροι είναι ίδιοι με αυτούς που εκφράστηκαν στις εξ.12 και 13 .

Η κυκλική κίνηση ειναι ειδική περίπτωση της επίπεδης καμπυλόγραμμης κίνησης .Σ'αυτην, η ακτίνα καμπυλότητας ρ, γίνεται η σταθερή ακτίνα r του κύκλου .Αν χρησιμοποίησουμε το σύμβολο ω για τη γωνιακή ταχύτητα θ,και το α για τη γωνιακή επιτάχυνση θ του διανύσματος της ακτίνας ,η ταχύτητα και η επιτάχυνση για την απλή κυκλική κίνηση είναι . [1]

$$u = r\omega$$

$$an=r\omega^2=\frac{u^2}{r}=u\omega \quad \textbf{(16)}$$

$$at=ra$$

2.6 Πολικές συντεταγμένες (r-θ)

Σε πολλές περιπτώσεις η καμπυλόγραμμη κίνηση ενος υ.σ προσδιορίζεται απο τις πολικές συντεταγμένες r και θ .Στο σχ.12α η διαφορική μετατόπιση dr του υ.σ μεταξύ Α και Α' παριστάνεται απο τις δυο πολικές συνιστώσες της dr=drr+drθ . Η ακτινική συνιστώσα drr έχει μέτρο dr ίσο με τη διαφορική μεταβολή του r σε μήκος .Η ως πρός θ συνιστώσα drθ έχει μέτρο ίσο με το μήκος του ισοδύναμου διαφορικού τόξου rdθ .Διαιρώντας με το χρόνο dt έχουμε το μέτρο των συνιστωσών της ταχύτητας ,ετσι ώστε η ταχύτητα να γράφεται ως εξής :

$$\mathbf{n=vr+v\theta}$$

$$\mathbf{ur=\frac{dr}{dt}=\dot{r}} \quad \textbf{(17)}$$

$$\mathbf{u=r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta}}$$

οπως το υ.σ κινείται απο το Α στο Α' στο σχ.12b και κάθε μια απο τις συνιστώσες της ταχύτητας Vr και Vθ θα μεταβληθεί διανυσματικά ,όπως φαίνεται στο σχ.12.c .Οι συνιστώσες του dvr έχουν μέτρα |(dvr)r|=dur=d$\dot{r}$ κατα τη διεύθυνση του $\dot{r}$,όπου οφείλεται στην αλλαγή του μέτρου του $\dot{r}$ και |(dvr)θ|=urdθ=$\dot{r}$dθ κατά τη διεύθυνσης του Vr.Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης που οφείλονται στο dVr λαμβάνονται διαιρώντας τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας με dt και είναι d$\dot{r}$/dt =$\ddot{r}$ κατά τη διεύθυνση του r και $\dot{r}$dθ=$\dot{r}$θ κατά τη διεύθυνση του θ. [1]

όμοια οι συνιστώσες του dVθ έχουν μέτρα |(dVθ)θ|=duθ=d(r$\dot{\theta}$) κατά την διεύθυνση του θ ,που οφείλεται στην μεταβολή του μέτρου του Vθ και |(dVθ)r|=uθdθ=rθdθ κατά την αρνητική διεύθυνση του r ,που οφείλεται στη μεταβολή της διεύθυνσης του vθ.Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης απο το dvθ λαμβάνονται διαιρώντας με dt τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας και ειναι d(r$\dot{\theta}$)/dt=$\dot{r}\dot{\theta}$+$\dot{r}\dot{\theta}$ κατά τη διεύθυνση του θ και rθdθ/dt=r$\dot{\theta}^2$ κατά την αρνητική διεύθυνση του r. [1]

Συγκεντρώνοντας τους όρους ως προς r και ως προς θ βρίσκουμε τις εκφράσεις των συνιστωσών της επιτάχυνσης της καμπυλόγραμμης κίνησης σε πολικές συντεταγμένες .Άρα η επιτάχυνση που φαίνεται στο σχ.12d μπορεί να γραφτεί ως εξής [1] :

$$\mathbf{a=ar+a\theta}$$

$$\mathbf{ar=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2} \quad \textbf{(18)}$$

$$\mathbf{a\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}$$

Από τους κονόνες της παραγώγισης αποδεικνύεται εύκολα οτι η αθ μπορεί να γραφτεί και ως εξής [1]:

$$α_θ=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

2.7 Σχετική κίνηση σε ενα επίπεδο

Υπάρχουν πολλά προβλήματα μηχανικής στα οποία η ανάλυση απλοποιείται αν χρησιμοποιήσουμε μετρήσεις που γίνονται σχετικά με ενα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων.Αυτές οι μετρήσεις αν συνδιαστούν με την παρατηρούμενη κίνηση του κινούμενου συστήματος συντεταγμένων, επιτρέπουν τον προσδιορισμό της απόλυτης κίνησης που εξετάζουμε .Η μέθοδος αυτή ονομάζεται ανάλυση δια της σχετικής κίνησης . [1]

Η κίνηση του κινούμενου συστήματος συντεταγμένων προσδιορίζεται αναφορικά με ενα σταθερό σύστημα συντεταγμένων .Αν εξετάσουμε το θέμα πολύ αυστηρά ,αυτό το ακίνητο σύστημα στην Νευτώνεια μηχανική είναι το αρχικό αδρανειακό σύστημα ,που θεωρείται οτι παραμένει ακίνητο στο χώρο .Απο την άποψη όμως του μηχανικού ,σαν ακίνητο σύστημα, μπορεί να ληφθεί κάθε σύστημα του οποίου η απόλυτη κίνηση είναι αμελητέα για το δοσμένο σύστημα .Για τα περισσότερα προβλήματα του μηχανικού πάνω στην γη είναι αρκετά ακριβές να πάρουμε σαν σταθερό σύστημα ,ενα σύστημα αξόνων συνδεδεμένο με τη γη ,διότι η κίνηση της γης είναι αμελητέα .Για προβλήματα όπου εξετάζεται η κίνηση δορυφόρων γύρω απο την γη ,είναι βολικό να θεωρούμε ένα μη περιστρεφόμενο σύστημα με αρχή πάνω στον άξονα περιστροφής της γης .Για μια περιγραφή ενός διαπλανητικού ταξιδιού ,κατάλληλο είναι ένα μη περιστρεφόμενο σύστημα σταθερά συνδεδεμένο με τον ήλιο :Οπως βλέπουμε η εκλογή του ακίνητου συστήματος εξαρτάται απο το είδος του προβλήματος . [1]

Σε αυτή την παράγραφο θα περιοριστούμε να εξετάσουμε την καμπυλόγραμμη κίνηση , πάνω σε ενα δοσμένο επίπεδο .Η κίνηση αυτή θα περιγράφει με παρατηρήσεις που γίνονται αναφορικά με ενα σύστημα αξόνων που κινείται πάνω στο επίπεδο .Στο πρώτο μέρος της παραγράφου θα περιγράψουμε ενα μεταφερόμενο σύστημα αξόνων αναφοράς ,και στο δεύτερο μέρος ,θα περιγράψουμε ενα σύστημα που μεταφέρεται και περιστρέφεται ταυτόχρονα. [1]

2.8 Μεταφερόμενοι αξονες αναφοράς

Θεωρείστε την επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση δυο υ.σ. σημείων του σχήματος 13. Θα παρατηρήσουμε την κίνηση του Α απο ενα μεταφερόμενο πλαίσιο αναφοράς χ-y με αρχή το Β .Το διάνυσμα θέσης του Α σχετικά με το πλαίσιο αναφοράς του Β ,είναι rA/B = ix +jy όπου i και j ειναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων χ και y .Η θέση του Β προσδιορίζεται απο το διάνυσμα θέσης του rB ως πρός τους ακίνητους άξονες αναφοράς X-Y .Η απόλυτη θέση ταχύτητα και επιτάχυνση του Α ως προς το ακίνητο σύστημα X-Y δίνεται απο τις σχέσεις . [1]

$\dot{r}$**A=**$\dot{r}$**B+**$\dot{r}$**A/B** **ή** **Va=VB+VA/** **(19)**

$\ddot{r}$**A=** $\ddot{r}$**B+**$\ddot{r}$**A/B** **ή** **aA=aB+aA/B** **(20)**

Στις εξισώσεις αυτές της σχετικής κίνησης , η ταχύτητα του Α σχετικά με το χ-y

είναι $\ddot{r}$A/B=$\dot{V}$A/B=i$\ddot{x}$+j$\ddot{y}$. Σημειώνουμε οτι στις παραγωγίσεις αυτές ,τα μοναδιαία διανύσματα δεν έχουν παραγώγους γιατί οι διευθύνσεις και τα μέτρα τους ειναι σταθερά . [1]

Με λόγια η εξ.19 (η20) λέει ότι η απόλυτη ταχύτητα (ή επιτάχυνση) του Α ισούται με την απόλυτη ταχύτητα (ή επιτάχυνση) του Β συν-δια-νυσματικα – την ταχύτητα (ή επιτάχυνση) του Α σχετικά με το Β .Ο σχετικός ορός ειναι η μέτρηση της ταχύτητας (ή της επιτάχυνσης) που έγινε απο ενα παρατηρητή συνδεδεμένο με το κινούμενο σύστημα συντεταγμένων χ-y .Οι όροι της σχετικής κίνησης μπορούν να εκφραστούν σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων θέλουμε –ορθογώνιο ,κάθετο και εφαπτομενικό ή πολικό –και μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της προηγούμενης παραγράφου, γίνεται τώρα το κινητό σύστημα . [1]

Η εκλογή του κινούμενου σημείου Β που είναι η αρχή του κινούμενου συστήματος αναφοράς ,ειναι αυθαίρετη .Το σημείο Α θα μπορούσε εξ ίσου να χρησιμοποιηθεί σαν αρχή του κινούμενου συστήματος ,οπότε οι αντίστοιχες εξισώσεις της σχετικής κίνησης θα ήταν

rB=rA+rA/B VB=VA+VB/A aB=aA+aB/A

Φαίνεται λοιπόν οτι

rB/A=-rA/B,VB/A=-VA/B ,και aB/A=-aA/B

Οι εξισώσεις της σχετικής ταχύτητας τριών σημείων Α,Β και C γράφονται

VA=VB+VB/A **VA=VC+VC/B** **VC=VB+VC/B**

Απαλείφοντας το VC από τις δύο τελευταίες εξισώσεις και συνδιάζοντας με την πρώτη εξίσωση το αποτέλεσμα ,για να απαλείψουμε τα VA και VB βρίσκουμε

VA/B =VA/C+Vc/B

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε την αντίστοιχη εξίσωση της σχετικής επιτάχυνσης που ειναι

aA/B=aA/C+aC/B

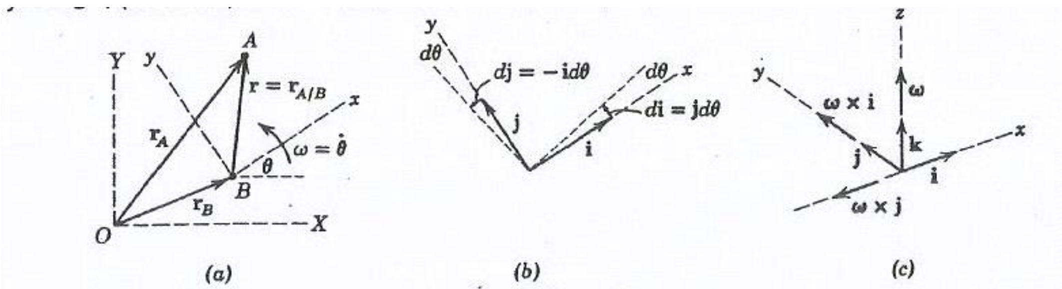
Οι σχέσεις αυτές μεταξύ των όρων της σχετικής κίνησης χρησιμοποιουνται συχνά ,γιατι πλεονεκτούν οταν εξετάσουμε τις σχετικές κινήσεις τριών υ.σ

Μια σπουδαία παρατήρηση που πρέπει να γίνει στην ανάλυση για τη σχετική κίνηση ,είναι οτι η επιτάχυνση ενος υ.σ όπως παρατηρείται σε ενα μεταφερόμενο σύστημα χ-y ,είναι ιδια με αυτην που παρατηρείται σε ενα ακίνητο σύστημα X-Y αν το κινούμενο σύστημα εχει σταθερή ταχύτητα .Το συμπέρασμα αυτό κάνει πιο ευρεία την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton,που εξετάσαμε πιο πριν. [1]

2.9 Περιστρφόμενοι άξονες αναφοράς

Η χρήση των περιστρεφόμενων αξόνων αναφοράς ,διευκολύνει πολύ τη λύση πολλών προβλημάτων της κινηματικής ,στα οποία η κίνηση παράγεται ή παρατηρείται απο ενα σύστημα που περιστρέφεται κι αυτό .Παράδειγμα τέτοιας κίνησης ειναι ο δρόμος που ακολουθεί ενα υγρό σωματίδιο, κινούμενο κατα μήκος του καμπύλου πτεριγίου μιας φυγόκεντρικης αντλίας, όπου η τροχιά σε σχέση με τα πτερύγια του στροφέα ,αποκτά μεγάλη σχεδιαστική σπουδαιότητα . [1]

Θεωρούμε την καμπυλόγραμμη κίνηση δυο υ.σ A και B στο σταθερό επίπεδο χ-y οπως στο σχ.14. Θα παρατηρήσουμε την κίνηση του A απο ενα κινούμενο πλαίσιο αναφοράς χ-y με αρχή στο B ,το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=$\dot{\theta}$. Μπορούμε να γράψουμε αυτη τη γωνιακή ταχύτητα σαν διάνυσμα : ω=kω=k$\dot{\theta}$ το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο επίπεδο της κίνησης και εναι θετικό κατα τη θετική φορά του Z ,οπως βρίσκουμε και από τον δεξιόστροφο κανόνα. [1]



[1]

Σχημα 16

Η απόλυτη θέση δίνεται απο τη σχέση :

rA=rB+r=rB+(ix+iy)

οπου όπως φαίνεται το $\vec{r}$ αντικαθιστά το $\vec{r}$AB ,όπου είναι το διάνυσμα θέσης του A σχετικά με το B .Για να βρούμε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης παραγωγίζουμε την εξίσωση του διανύσματος θέσης .Στην περίπτωση όμως αυτή –

αντίθετα με την προηγούμενη του μέρους Α – τα μοναδιαία διανύσματα i και j περιστρέφονται ,άρα έχουν παραγώγους που πρέπει να βρούμε .Αυτές οι παραγώγοι φαίνονται στο σχ.14b ,που δείχνει την απειροστή μεταβολή κάθε μοναδιαίου διανύσματος μέσα σε χρόνο dt οπότε οι άξονες αναφοράς περιστρέφονται κατά γωνία dθ=ωdt .Η διαφορική μεταβολή του $\vec{\imath}$ είναι d$\vec{\imath}$ και εχει τη διεύθυνση του $\vec{\jmath}$ και μέτρο ισο με τη γωνία dθ επι το μήκος του διανύσματος $\vec{\imath}$,που ειναι μονάδα .Δηλαδή d$\vec{\imath}$=$\vec{\jmath}$dθ. Εντελώς ανάλογα το μοναδιαίο διάνυσμα j έχει απειροστή μεταβολή d$\vec{\jmath}$ που διευθύνεται στα αρνητικά του χ ετσι ωστε να ισχύει d$\vec{\jmath}$=-$\vec{\imath}$dθ. Διαιρώντας δια dt και αντικαθιστώντας το d$\vec{\imath}$/dt με $\vec{\imath}$,το d$\vec{\jmath}$/dt me $\dot{\vec{\jmath}}$,και το dθ/dt με $\dot{\theta}$=ω έχουμε

i=jω και **j =-iω**

Αν χρησιμοποιήσουμε το εξωτερικό γινόμενο ,βλέπουμε απο το σχ.14c οτι ω×i=jω και ω×j=-iω .Αρα οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων μπορούν να γραφτούν και ως εξής

i = ω×I και **j= ω×j**

Μπορούμε λοιπόν τώρα να παραγωγίσουμε την εξίσωση του διανύσματος θέσης για τα Α και Β ,για να βρούμε την εξίσωση της σχετικής ταχύτητας που γίνεται

$$\dot{r}A=\dot{r}B+(ix+jy)+(ix+jy)$$

Όμως $\vec{\imath}$x+ jy=$\vec{\omega}$x+$\vec{\imath}$x+$\vec{\omega}\times\vec{\jmath}$y=$\vec{\omega}\times\vec{r}$ και $\vec{\imath}\dot{x}$+$\vec{\jmath}$y = Vσχ. ,που ειναι γ ταχύτητα που θα μετρούσε ένα ς παρατηρητής συνδεδεμένος με το πλαίσιο αναφοράς χ-y. Άρα η εξίσωση της σχετικής ταχύτητας γίνεται :

$$VA=VB+\omega\times r+Vrel \qquad (22)$$

Συγκρίνοντας τις εξ.22 και 19 για μη περιστρεφόμενους άξονες αναφοράς, βλέπουμε ότι $\vec{v}$A/B=$\vec{\omega}\times\vec{r}$ +$\vec{v}$σχ.Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε οτι ο όρος $\vec{\omega}\times\vec{r}$ είναι η διαφορά μεταξύ της σχετικής ταχύτητας που μετριέται απο μη περιστρεφόμενους και απο περιστρεφόμενους άξονες .Για να εξηγήσουμε καλύτερα το νόημα των δυο τελευταίων όρων της εξ.22 θεωρούμε στο σχ.15 την κίνηση του Α μέσα στην καμπύλη σχισμή ενός δίσκου,ο οποίος παριστάνει το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς χ-Υ .Η ταχύτητα του Α οπως μετριέται σχετικά με το δίσκο (Vσχ) ειναι εφαπτόμενη στην τροχιά ,που ειναι ακίνητη ως προς το δίσκο χ-y και εχει μέτρο $\dot{s}$.Αυτη η σχετική ταχύτητα μπορεί ακόμα να θεωρηθεί σαν την ταχύτητα VA/P θεωρούμενη στιγμή .Ο όρος $\vec{\omega}\times\vec{r}$ εχει μέτρο r$\dot{\theta}$ και διεύθυνση κάθετη στο $\vec{r}$ και είναι η ταχύτητα του Ρ η σχετική με το Β οπως φαίνεται απο μη περιστρεφόμενους άξονες, συνδεδεμένους με το Β . [1]

Οι επόμενες συγκρίσεις θα βοηθήσουν στην κατανόηση της διαφοράς μεταξύ των εξισώσεων της σχετικής ταχύτητας ,για περιστεφόμενους και μη περιστρεφόμενους άξονες αναφοράς . [1]

$$VA=VB+\vec{\omega}\times\vec{r}+Vrel$$

$$\mathbf{VA=VB+VP/B+VA/P} \qquad \mathbf{(22\,\alpha)}$$

$$\mathbf{VA=VP+VA/P}$$

$$\mathbf{VA=VB+VA/B}$$

Στην δεύτερη εξίσωση ο όρος $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$/B μετριέται απο μια μη περιστρεφόμενη θέση ,αλλοιώς ειναι μήδεν.Ο όρος $\overrightarrow{\mathrm{VA}}$/P ειναι ο ίδιος με την $\vec{\mathrm{V}}$σχ, και είναι η ταχύτητα του A οπως μετριέται στο σύστημα χ-y .Στην τρίτη εξίσωση το $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$ είναι η απόλυτη ταχύτητα του P ,και παριστάνει την επιροή του κινούμενου συστήματος που μεταφέρεται και περιστρέφεται .Η τέταρτη εξίσωση ειναι ίδια με την εξίσωση 19 για μη περιστρεφόμενους άξονες και φαίνεται οτι $\vec{\mathrm{V}}$A/B=$\vec{\mathrm{V}}$P/B+$\vec{\mathrm{V}}$A/P=ω× $\vec{r}$+$\vec{\mathrm{V}}$σχ. [1]

Η εξίσωση της σχετικής επιτάχυνσης λαμβάνεται αν παραγωγίσουμε την σχέση της σχετικής ταχύτητας (εξ.22)Δηλαδή

$$\mathbf{aA=aB+\dot{\omega}\times r+\omega\times \dot{r}+\dot{V}rel}$$

Απο την παραγώγιση της εξ.22 ,φαίνεται οτι ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης της επιτάχυνσης γίνεται

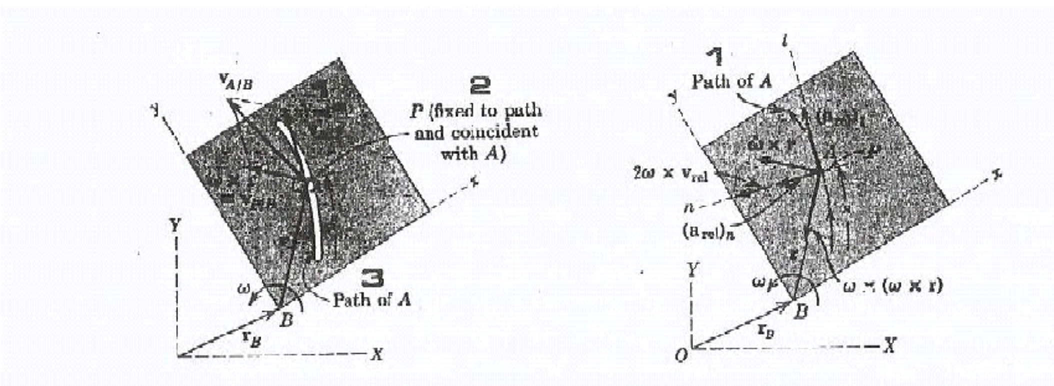
$$\boldsymbol{\omega\times \dot{r}= \omega\times \frac{d}{dt}(ix+jy)= \omega\times(\,\omega\times r)+\,\omega\times Vrel}$$

Ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης του $\vec{a}$A ειναι

$\dot{V}$rel=$\frac{d}{dt}$(i$\dot{x}$+j$\dot{y}$)= $(i\dot{x}+j\dot{y})$+ $(i\ddot{x}+j\ddot{y})$=

=ω×$(i\dot{x}+j\dot{y})$+ $(i\ddot{x}+j\ddot{y})$

=ω×Vrel+arel



[1]

Σχημα 17

Αν αντικαταστήσουμε τώρα στην έκφραση για το A και κάνουμε τις πράξεις έχουμε

$$\mathbf{aA=aB+\dot{\omega}\times r+\omega\times(\omega\times r)+2\omega\times Vrel+arel} \qquad \mathbf{(23)}$$

Η εξ.23 είνα ι η γενική διανυσματική έκφραση για την απόλυτη επιτάχυνση ενος υ.σ Α συναρτήσει της $\vec{a}$σχ που μετριέται σχετικά με ενα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων ,το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.Οι οροι $\vec{\omega}\times\vec{r}$ και $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ φαίνονται στο σχ.16 .Παριστάνουν αντίστοιχα τις συνιστώσες ως προς t και n της επιτάχυνσης $\vec{a}$P/B του σημείου P κατα την κυκλική του κίνηση ,σε σχέση με το B .Η κίνηση αυτή παρατηρείται από ένα σύστημα μη περιστρεφόμενων αξόνων,κινούμενων με το B .Το μέτρο του $\vec{\omega}\times\vec{r}$ είναι r$\ddot{\theta}$ και η διεύθυνση του εφαπτομένη στο κύκλο .Το μέτρο του $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ειναι rω^2και η διεύθυνση του απο το P στο B κατα μήκος της κάθετης στον κύκλο . [1]

Ο όρος 2$\vec{\omega}\times\vec{v}$σχ φαίνεται στο σχ.16,και ειναι γνωστός σαν επιτάχυνση Cariolis παριστάνει τη διαφορά μεταξύ της επιτάχυνσης του Α σχετικά με το P όπως μετρήθηκε απο μη περιστρεφόμενους άξονες και απο περιστρεφόμενους άξονες .Η διεύθυνσή του ειναι πάντα κάθετη στο $\vec{v}$σχ και η φορά του βρίσκεραι απο τον δεξιόστροφο κανόνα για το εξωτερικό γινόμενο .Η επιτάχυνση του Α σχετικά με την τροχιά ,$\vec{a}$σχ ,μπορεί να εκφραστεί σε ορθογωνικές ,κάθετες και εφαπτομενικές ή πολικές συντεταγμένες ,στο περιστρεφόμενο σύστημα.Οι κάθετες και εφαπτομενικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται συχνά ,γι αυτό και απεικονίζονται στο σχ.16 .Η εφαπτομενική συνιστώσα εχει μέτρο (ασχ)t =$\ddot{s}$,οπου s ειναι η απόσταση που μετρήθηκε κατά μήκος της τροχιάς του Α .Η κάθετη συνιστώσα έχει μέτρο υσχ$^{2/\rho}$ οπου ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς όπως μετρήθηκε στο χ-y .Η φορά του διανύσματος είναι πάντα προς το κέντρο καμπυλότητας .Η επόμενη σύγκριση θα βοηθήσει στην κατανόηση της διαφοράς μεταξύ των εξισώσεων της σχετικής επιτάχυνσης για περιστρεφόμενους και μη περιστρεφόμενους άξονες αναφοράς

$$\mathbf{aA=aB+\dot{\omega}\times r+\omega\times(\omega\times r)+2\omega\times Vrel+arel}$$

$$\mathbf{aA=aB+ \quad aP/B \quad + \quad aA/P} \qquad \mathbf{(23\,\alpha)}$$

$$\mathbf{aA= \quad aP \quad + \quad aA/P}$$

$$\mathbf{aA=aB+ \quad aA/B}$$

Η ισοδυναμία του aP/B και του $\dot{\omega}\times$r+ω×(ω×r), όπως φαίνεται στη δεύτερη εξίσωση ,έχει ηδη περιγραφεί .Απο την τρίτη εξίσωση οπου τα $\vec{a}$B+$\vec{a}$P/B συνδιάστηκαν για να δώσουν το $\vec{a}$p ,φαίνεται οτι ο όρος $\vec{a}$A/P της σχετικής επιτάχυνσης ,δεν είναι ίσος με τη σχετική επιτάχυνση ασχ όπως μετριέται απο το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς χ-y .Αρα ο ορός Coriolis ειναι η διαφορά μεταξύ της επιτάχυνσης $\vec{a}$A/P του Α σχετικά με το P οπως μετριέται σε περιστρεφόμενο σύστημα .Απο την τέταρτη εξίσωση φαίνεται οτι η επιτάχυνση $\vec{a}$A/B του Α σχετικά με το B οπως μετριέται σε ενα μη περιστρεφόμενο σύστημα ,εξ.20 είναι ενας συνδιασμός των τεσσάρων τελευταίων όρων της πρώτης εξίσωσης για το περιστρεφόμενο σύστημα . [1]

Στην ανάλυση της επιτάχυνσης ,με χρήση περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς ,ειναι συχνά βολικό να παίρνουμε την αρχή των συντεταγμένων αναφοράς στο σημείο P ,οπου συμπίπτει με τη θέση του θ.σ A κατα τη θεωρούμενη στιγμή .Με την εκλογή αυτή φεύγουν οι όροι $\dot{\omega}$ ×r και ω×(ω×r), αφου εξαφανίζεται το διάνυσμα $\vec{r}$.Οι όροι αυτοι λοιπόν εξαφανίζονται κατα τον υπολογισμό της επιτάχυνσης του P .Αρα οπως φαίνεται απο τα προηγούμενα ,οτι η εξίσωση της σχετικής επιτάχυνσης μπορεί να γραφτεί πιο απλά ως εξης :

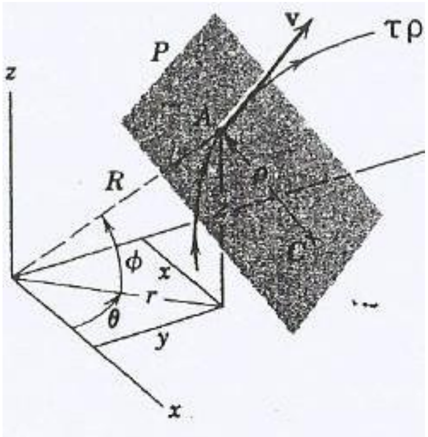
$$\mathbf{aA=aP+2\omega\times Vrel+arel} \qquad \mathbf{(23b)}$$

Οταν χρησιμοποιείται η πιο πάνω μορφή ,το σημείο P δεν πρέπει να διαλέγεται στην τύχη ,γιατι ειναι το σημείο που συμπίπτει με το υ.σ A τη θεωρούμενη στιγμή τους περιστρεφόμενους άξονες αναφοράς . [1]

Σειμειώστε οτι στη χρήση των διανυσμάτων,εφαρμόστηκε επίμονα ο δεξιόστροφας κανόνας . [1]

2.10 Καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο

Η κίνηση ενός υ.σ κατα μήκος μιας καμπύλης τροχιάς στο χώρο (σχ.17) λέγεται καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο .Στη θέση A μπορούμε να θεωρήσουμε οτι η κίνηση γίνεται στο επίπεδο P ,που περιέχει την καμπύλη τροχιά στη θέση αυτη .Το επίπεδο αυτο ,που συχνά λέγεται επίπεδο συνεπαφής ,μπορεί να οριστεί απο το σημείο A και απο δυο αλλα σημεία της τροχιάς κοντά στο A και εκατέρωθεν αυτου .Οσο τα σημεία αυτα πλησιάζουν το A ,το επίπεδο που περιέχει τα τρία σημεία ,τείνει στο οριακό επίπεδο P .Η ταχύτητα $\vec{v}$,που είναι εφαπτομένη στην τροχιά ,βρίσκεται πάνω στο επίπεδο συνεπαφής .Επίσης η επιτάχυνση $\vec{a}$ του υ.σ βρίσκεται πάνω σε αυτο το επίπεδο και ,οπως στην περίπτωση της επίπεδης κίνησης ,μπορεί να παρασταθεί απο τις συνιστώσες της at=$\dot{u}$ (εφαπτομήνη στην τροχιά και οφειλόμενη στη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας) και αn=u^2/ρ (κάθετη στην καμπύλη και οφειλόμενη στην μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας).Οπως πριν ρ ειναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στη θεωρούμενη θέση και η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης διευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας C,στο επίπεδο P .Η περιγραφή του επιπέδου συνεπαφής ειναι γενικά άβολη για τρισδιάστατη κίνηση .Γιαυτο χρησιμοποιούνται συχνότερα άλλες συντεταγμένες ,εκτός απο τις συντεταγμένες τροχιάς .Στο πρώτο μέρος περιγράφουμε τρία τέτοια συστήματα συντεταγμένων ,ενω στο δεύτερο μέρος δίνουμε τους μετασχηματισμούς μεταξύ των συστημάτων αυτων , εκφρασμένους με πίνακες.[1]



[1]

Σχημα 18

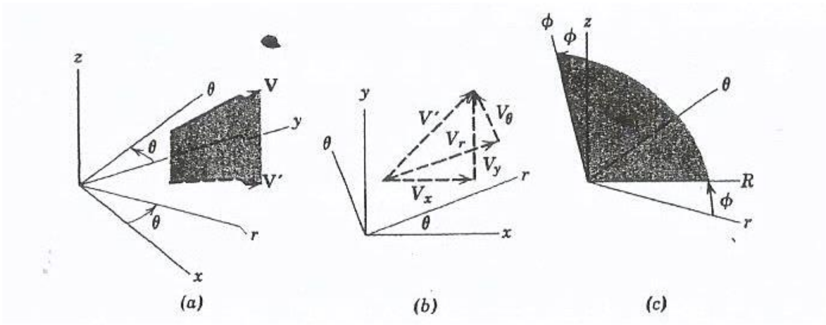
2.11 Συστήματα συντεταγμένων

Κυλινδρικές συντεταγμένες (r-θ-z)

Για να περιγράψουμε μια κίνηση στο χώρο με κυλινδρικές συντεταγμένες ,πρέπει να προσθέσουμε την ως προς z συντεταγμένη ,οπως φαίνεται στο σχ.17 ,στις εκφράσεις των πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο χ-y ,που αναφέραμε στην προηγουμενη παράγραφο . [1]

2.12 Αλλαγή Συντεταγμένων

Συχνά ειναι απαραίτητο ,ιδίως στην τρισδιάστατη ανάλυση ,να μετατρέπουμε διανυσματικές ποσότητες απο το ενα σύστημα συντεταγμένων στο αλλο .Επειδή η μετατροπή αυτη ,μπορεί να γίνει γράφοντας τις σωστές σχέσεις απ ευθείας απο τη γεωμετρική του προβλήματος ,το πρόβλημα οδηγείται σε πράξεις ρουτίνας με τη βοήθεια της άλγεβρας των πινάκων αφου οι εξισώσεις μετασχηματισμού ειναι γραμμικές .Θεωρούμε μια διανυσματική ποσότητα $\vec{V}$ με συνιστώσες Vx,Vy,Vz σε ορθογώνιες συντεταγμένες Vr,Vθ,Vz, σε κυλινδρικές συντεταγμένες και Vr,Vθ,Vφ σε σφαιρικές συνταταγμένες .Η ποσότητα αυτη μπορεί να είναι η ταχύτητα ή η επιτάχυνσης ενός θ.σ .Μπορεί ακόμα να ειναι η ορμή του ή απλα το διάνυσμα θέσης του .Θεωρούμε τις εξισώσεις μετατροπής του $\vec{V}$ οταν μετατρεπεται απο οσθογωνικές σε κυλινδρικές συντεταγμένες .Η διανυσματική ποσότητα $\vec{V}$ παριστάνεται στο σχ.19 .Αφου η ως προς z συνιστώσα του ειναι ιδια και στα δυο σχήματα



[1]

Σχημα 19

Οι μετασχηματισμοί φαίνονται αμέσως απο το σχ.18,που δείχνει την προβολή V’ του $\vec{V}$ στα επίπεδα χ-y και r-θ .Αυτες οι σχέσεις ειναι

Vr=cosθ(Vx)+sinθ(Vy)+0(Vz)

Vθ=-sinθ(Vx)+cosθ(Vy)+0(Vz)

Vz=0(Vx)+0(Vy)+1(Vz)

Οπου οι μηδενικοί όροι προστέθηκαν για να φαίνεται η συμμετρία των τριών εξισώσεων .Σημειώνουμε οτι οι όροι εχουν διαταχτεί με την ίδια σειρά

Vx,Vy,Vz και στις τρείς εξισώσεις .Με μορφή πινάκων οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν

$$\begin{array}{llllll} \boldsymbol{Vr} & \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{sin\theta} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Vx} & \\ \boldsymbol{V\theta}= & \boldsymbol{-sin\theta} & \boldsymbol{cos\theta} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Vy} & \qquad \mathbf{(29)} \\ \boldsymbol{Vz} & \mathbf{0}(\boldsymbol{Vx}) & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{Vz} & \end{array}$$

Οπου η σειρά συνδιασμού ειναι αυτη που χρειάζεται για να παράγουμε τις δοσμένες εξισώσεις .Για παράδειγμα η πρώτη εξίσωση δίνει το Vr και λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο της δεξιάς στήλης με το αντίστοιχο στοιχείο στην πρώτη γραμμή του τετραγωνικού πίνακα και προσθέτοντας τα γινόμενα .Αυτος ο συνδιασμός δίνει το Vr.Αυτη η εξίσωση πινάκων μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$\{Vr\theta z)=[T\theta]\{Vxyz\}$$

Οπου το [Tθ] αντικαθιστά τον τετραγωνικό πίνακα και ονομάζεται πίνακας μετασχηματισμού απο χ-y-z σε r-θ-z .Αφου ο μετασχηματισμός περιέχει μονο μια περιστροφή των αξόνων κατα γωνία θ ,ο πίνακας μετασχηματισμού ,θα περιέχει μόνο τη γωνία θ

Ο μετασχηματισμός απο κυλινδρικές συντεταγμένες σε ορθογώνιες ειναι

$$\{Vxyz\}=[T\theta]^{-1}\{Vr\theta z\}$$

$$\text{Οπου} = \quad [T\theta]^{-1}= \begin{matrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ \sigma\iota\nu\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας $[T\theta]^{-1}$ ειναι ο πίνακας μετασχηματισμού απο κυλινδρικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες .Αυτο μπορούμε να το εξακριβώσουμε συγκρίνοντας με τη γεωμετρία του σχ.19 οταν τα vx και vy εκφραστούν συναρτήσει των vr και vθ.

Οι δυο πίνακες μετασχηματισμού υπακούουν στον εξής κανόνα :

$$[T\theta][T\theta]^{-1}=[1]$$

Οπου ο μοναδιαίος πίνακας είναι

$$[1]=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Αποδεικνύεται οτι ο αντίστροφος πίνακας λαμβάνεται εναλλάσοντας τα αντίστοιχα στοιχεία γύρω απο την κύρια διαγώνιο . [1]

Η μεταβολή απο κυλινδρικές σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται με μια περιστροφή φ των αξόνων γύρω απο τον αξόνα των θ (σχ.19) . [1]

Ο πίνακας μετασχηματισμού γράφεται απ'ευθειας απο την εξ.29 οπου η περιστροφή φ γίνεται στο επίπεδο R-φ στο επίπεδο r-θ .Δηλαδή

$$\begin{matrix} \boldsymbol{VR} \\ \boldsymbol{V\theta} \\ \boldsymbol{V\varphi} \end{matrix} = \begin{matrix} \boldsymbol{cos\varphi} & \mathbf{0} & \boldsymbol{sin\varphi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-\sigma\iota\nu\varphi} & \mathbf{0} & \boldsymbol{cos\varphi} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{Vr} \\ \boldsymbol{V\theta} \\ \boldsymbol{Vz} \end{matrix} \qquad \textbf{(32)}$$

Πάλι η εξίσωση αυτη μπορεί να γραφτεί πιο σύντομα ως εξης

$$\{\mathbf{VR\theta\varphi}\}=[\mathbf{T\varphi}]\{\mathbf{Vr\theta z}\} \qquad \textbf{(33)}$$

Απο την οποια συμπεραίνουμε οτι

$$\{\mathbf{Vr\theta z}\}[\boldsymbol{T\varphi}]^{-1}\{\mathbf{VR\theta\varphi}\} \qquad \textbf{(34)}$$

Οπου ο αντίστροφος πίνακας ειναι

$$[T\varphi]^{-1} = \begin{matrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\,\varphi & 0 & -\cos\varphi \end{matrix}$$

Απ’ευθείας μετασχηματισμός απο ορθογώνιες σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να γίνει συνδιάζοντας τις εξ.30 και 33 οποτε έχουμε

$$\{\mathbf{VR\theta\varphi}\}=[\mathbf{T\varphi}][\mathbf{T\theta}]\{\mathbf{Vxyz}\} \qquad \textbf{(35)}$$

Οπου ο πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$[\mathrm{T\varphi}][\mathrm{T\theta}] = \begin{matrix} cos\varphi cos\theta & cos\varphi sin\Theta & sin\varphi \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ -sin\varphi cos\theta & -sin\theta sin\theta & cos\varphi \end{matrix}$$

Για παράδειγμα η πρώτη απο τις εξισώσεις μετασχηματισμού γινεται

Vr=Vxcosφcosθ+Vycosφsinθ+Vzsinφ

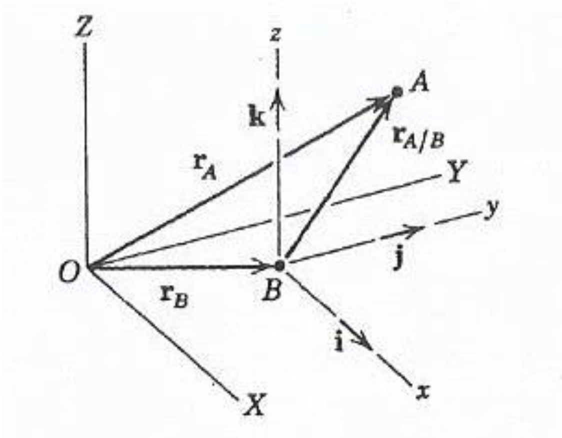
Η γραφή των εξισώσεων με πίνακες μας διευκολύνει πολυ ,οταν θέλουμε να λυσουμε ενα πρόβλημα με συνηθισμένα προγράμματα του υπολογιστή . [1]

2.13 ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Θα επεκτείνουμε εδω όσα ειπαμε νωρίτερα για την επίπεδη κίνηση ενος υ.σ σχετικά με μεταφερόμενους και περιστρεφόμενους αξονες αναφορας ,ετσι ωστε να καλυψουμε την κινηση ενος υλικου σημειου στον χωρο. [1]

2.13.1Μεταφερόμενοι αξονες αναφοράς

Θεωρουμε την καμπυλογραμμη κινηση στον σωρο δυο υ.σ του Α και του Β .Η κινηση του Α μπορει να παρατηρηθει πρωτα απο ενα μεταφερομενο συστημα αναφορας x-y-z που κινειται με το Β σχ.20 .Το διανυσμα θεσης του Α σχετικα με το Β ειναι $\vec{r}$A/B=$\vec{\imath}$x+$\vec{\jmath}$y+$\vec{k}z$ οπου $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ και $\vec{k}$ ειναι τα μοναδιαια διανυσματα στο κινουμενο συστημα χ-y-z



[1]

Σχημα 20

Αρα η απολυτη θεση ,ταχυτητα και επιταχυνση του Α ειναι

rA=rB+rA/B

$\dot{r}A$=$\dot{r}$B+$\dot{r}$A/B ή Va=Vb+VA/B (36)

$\ddot{r}$A=$\ddot{r}B + \ddot{r}$A/B ή aA=aB+aA/B (37)

Οπου η ταχύτητα μετρημένη σχετικά με το χ-y-z ειναι $\vec{V}$A/B=$\dot{\vec{r}}A/B$=$\vec{\imath}\dot{x}$+$\vec{\jmath}\dot{y}$+$\vec{k}\dot{z}$ και η επιτάχυνση μετρημένη σχετικά με το χ-y-z είναι aA/B=$\dot{\vec{V}}$A/B=$\dot{\vec{\imath}}\ddot{x}$+$\dot{\vec{\jmath}}\ddot{y}$+$\dot{\vec{k}}\ddot{z}$. Για τους μεταφερόμενους άξονες χ-y-z τα μοναδιαία διανύσματα δεν εχουν χρονικές παραγώγους αφου οι διευθύνσεις τους ειναι αμετάβλητες . [1]

Οι όροι της σχετικής κίνησης μπορούν να εκφραστούν σε οποιοδήποτε μεταφερόμενο σύστημα αναφοράς μας βολεύει-ορθογώνιο ,κυλινδρικό η σφαιρικό.Οπως αναφέραμε και πιο πριν ,η εκλογή εξαρτάται απο τον τρόπο που παράγεται η κινηση ή απο τις πληροφορίες που μας δίνονται

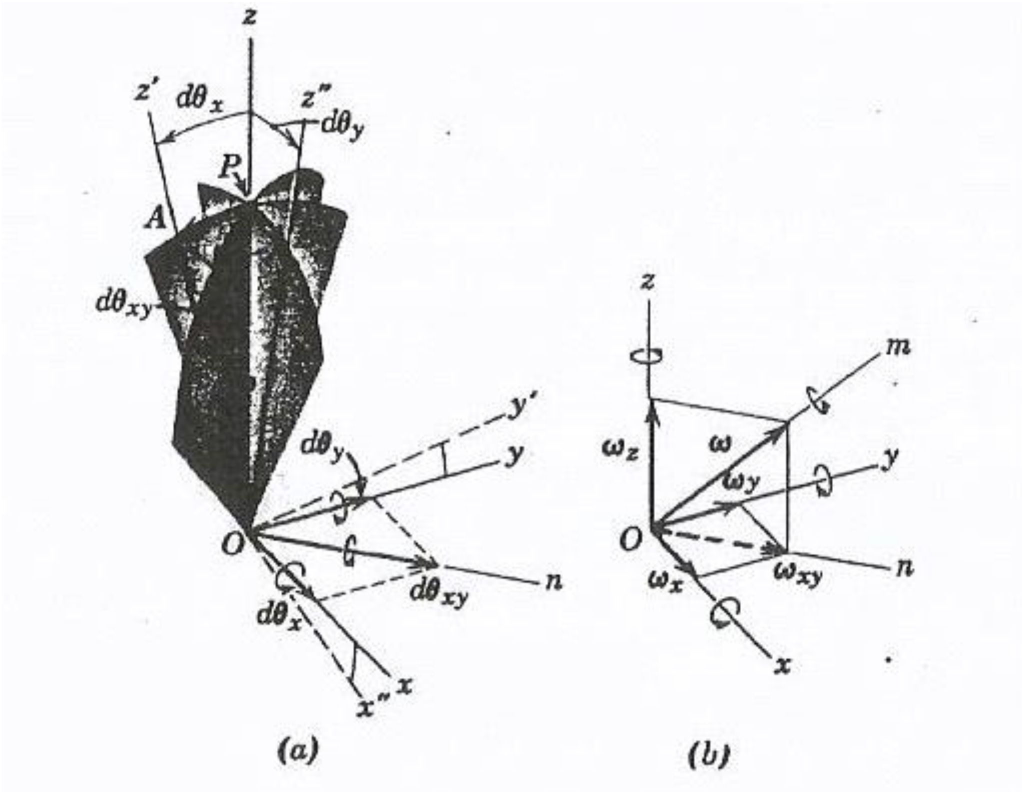
Η χρήση του Α αντι για το Β σα σημείο αναφοράς και η εξίσωση που συσχετίζει τις σχετικές κινήσεις τριών υ.σ Α,Β και C ακολουθούν ακριβώς τα οσα είπαμε προηγουμένως . [1]

2.13.2.Περιστρεφόμενοι άξονες αναφοράς

Υπάρχουν πολλά προβλήματα στην τρισδιάστατη κίνηση ,στα οποία η περιγραφή απλουστεύεται πολύ αν κάνουμε τις παρατηρήσεις μας σχετικά με ενα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς .Η εξίσωση της σχετικής κίνησης για την τρισδιάστατη περίπτωση ,μπορεί να βρεθεί αν προσθέσουμε την τρίτη διάσταση ,στην ανάλυση που κάνουμε στις προηγούμενες παραγράφους για την επίπεδη κίνηση.Συνιστούμε λοιπόν να γίνει λεπτομερώς αυτη η διαδικασία .Εμείς εξετάζουμε το θέμα λιγο γενικευμένα ,για να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ της χρονικής παραγώγου οποιουδήποτε διανύσματος σε ενα ακίνητο και σε ενα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς . [1]

Οταν λοιπόν εξετάζουμε ετσι το θέμα ή κάνουμε απευθείας επέκταση της ανάλυσης που οδηγεί στην εξίσωση (23),είναι απαραίτητο να ξέρουμε τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς . [1]

Στο σχήμα 21 φαίνονται οι άξονες χ-y-z που περιστρέφονται σαν απόλυτα στερεό σώμα γύρω απο το Ο .Το σημείο Ο μπορεί να θεωρηθεί σταθερό ως εδώ ,αφου μας ενδιαφέρει η περιγραφή της περιστροφής . [1]



[1]

Σχημα 21

Κατα την διάρκεια του χρόνου dt το πλαίσιο αναφοράς περιστρέφεται γύρω απο τον άξονα x κατά γωνία dθx,οπότε ο άξονας y γίνεται y' και ο z γίνεται z' και το σημείο P πάνω στον άξονα z σε απόσταση b απο το O ,φθάνει στο A σε απόσταση bdθz .Η περιστροφή ορίζεται απο το διάνυσμα $\vec{d}$θχ, οπου η διεύθυνση του διανύσματος συμπίπτει με τον άξονα της περιστροφής και η φορά του διανύσματος καθορίζεται απο το δεξιόστροφο κανόνα .Το μέτρο του διανύσματος είναι η γωνία dθx,εκφρασμένη σε ακτίνια .Ομοια ,μια ανεξάρτητη περιστροφή του πλαίσιου αναφοράς κατα γωνία dθ γύρω απο τον άξονα y ,κάνει τον άξονα χ να πάει στον χ'' ,τον z στον z'' και το σημείο P να πάει στο B κατά την απόσταση bdθy. [1]

Η περιστροφή αυτη ορίζεται απο το διάνυσμα $\vec{d}$θy .Αν και οι δυο περιστροφές συμβούν ταυτόχρονα ,το σημείο P θα πάει στο C κατα το μήκος του τόξου bdθxy .Αυτη η συνολική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί οτι οφείλεται σε μια περιστροφή dθxy του πλαισίου αναφοράς ,γύρω απο τον άξονα O-n που βρίσκεται στο επίπεδο χ-y και ειναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής OPC.Αφου στο όριο το PC ειναι η διαγώνιος ενος στοιχειωδούς ορθογωνίου πλευρών PA και PB,συμπεραίνουμε οτι (dθxy) ^{2}=$(d\theta x)^2 + d\theta y^2$,και ενα παρόμοιο στοιχειώδες ορθογώνιο σχηματίζεται απο τα διανύσματα περιστροφής .Παρατηρούμε ακομα οτι η σειρά συνδιασμού των διαφορικών αυτων περιστροφών δεν εχει σημασία ,αφού το P θα καταλήξει στο C άσχετα με το ποιά περιστροφή έγινε πρώτη .Αρα τα διανύσματα της διαφορικής περιστροφής υπακούουν στους γνωστούς νόμους των διανυσματικών ποσοτήτων .Απο την άλλη μεριά όμως οι πεπερασμένες περιστροφές δεν υπακούουν στον μεταθετικό νόμο ,γιατι ο τελικός σχηματισμός εξαρτάται απο τη σειρά της πρόθεσης .Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν βρούμε τις τελικές θέσεις του P για δυο περιστροφές 90^o για παράδειγμα ,μιας κατα τον άξονα x και μιας κατά τον άξονα y . [1]

Βλέπουμε οτι οι θέσεις αυτές εξαρτώνται απο τη σειρά που πήραμε τις περιστροφές .Αν το πλαίσιο αναφοράς του σχ.21 α περιστραφεί ακόμα κατά $\vec{d}$θz γύρω απο τον άξονα z ,αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο παίρνοτας ενα σημείο πάνω στον άξονα x ή τον y ,οτι η περιστροφή αυτή μπορεί να συνδιαστεί διανυσματικά με τα $\overrightarrow{d\theta x}$ και $\overrightarrow{d\theta y}$.Διαιρώντας τις διαφορικές περιστροφές με dt έχουμε τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας ωx=$\dot{\theta}$x,ωy=$\dot{\theta}$y,ωz=$\dot{\theta}$z για το πλαίσιο αναφοράς .Ετσι αποδείχτηκε οτι η γωνιακή ταχύτητα των αξόνων αναφοράς χ-y-z μπορεί να παρασταθεί απο το διανυσμα

$$\boldsymbol{\omega = i\omega x + j\omega y + k\omega z}$$

οπως φαίνεται στο σχ21.b .Αρα στη δεδομένη στιγμή .το πλαίσιο αναφοράς περιστρέφεται γύρω απο τον άξονα Om. [1]

Σε προηγούμενη παράγραφο δώσαμε τις χρονικές παραγώγους των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$ που οφείλονταν στην περιστροφή των αξόνων χ-y γύρω απο τον z .Πριν προχωρήσουμε παραπέρα είναι απαραίτητο να βρούμε αυτές τις παραγώγους ,που οφείλονται τώρα στη γενική περιστροφή $\vec{\omega}$.Στο σχ.22 φαίνεται η επίδραση της περιστροφής των αξόνων στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\imath}$ κατα την διάρκεια του χρόνου dt.Εξ αιτίας της περιστροφής dθY το άκρο του διανύσματος $\vec{\imath}$ κινείται κατα μήκος τόξου $|\vec{\imath}|$dθy κατά την αρνητική διεύθυνση του z και εχει διανυσματική μεταβολή -$\vec{k}$dθy αφου το $|\vec{\imath}|$ είναι μονάδα .Ομοια ,εξαιτίας της dθz,το άκρο του $\vec{\imath}$ κινείται κατά μήκος τόξου $|\vec{\imath}|$dθz,ετσι ώστε η διανυσματική μεταβολή είναι jdθz.Είναι φανερό οτι οτ $\vec{\imath}$ δεν μεταβάλλεται κατά την περιστροφή γύρω απο τον άξονα χ.Αρα η διανυσματική μεταβολή του $\vec{\imath}$,που οφείλεται στην απειροστή περιστροφή $\vec{\omega}$dt είναι d$\vec{\imath}$=$\vec{\jmath}$dθz-$\vec{k}$dθy .Διαιρώντας με dt καθώς περνάμε στο όριο και αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας εχουμε $\dot{\vec{\imath}}$=$\vec{\jmath}$ωz-$\vec{k}$ωy.Αυτή η έκφραση είναι ιδια με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\omega} \times \vec{\imath}$,πράγμα που εύκολα αποδεικνύεται αν κάνουμε τις πράξεις .Παρόμοιες είναι και οι μεταβολές των $\vec{\jmath}$ και $\vec{k}$ που οφείλονται στην περιστροφή .Αρα οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων για σύστημα αναφοράς περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$,μπορούν να γραφτούν

$$\dot{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{\omega}\times \mathbf{i} \qquad \dot{\boldsymbol{j}}=\boldsymbol{\omega}\times \mathbf{j} \qquad \dot{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{\omega}\times \mathbf{k} \qquad \textbf{(38)}$$

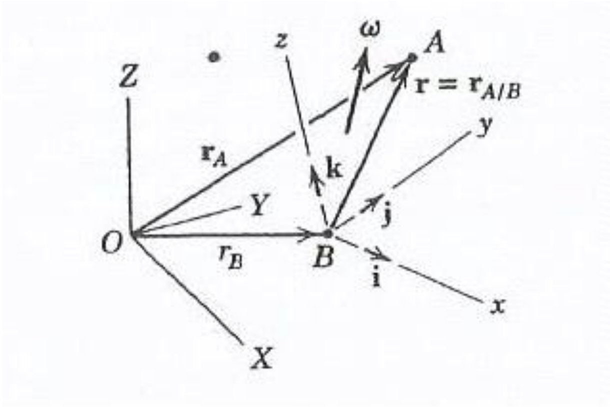
Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο νόημα της χρονικής παραγώγου κάθε διανυσματικής ποσότητας $\vec{V}$=$\vec{\imath}$Vx+$\vec{\jmath}$Vy+$\vec{k}$Vz στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (σχ.23).Η παράγωγος του $\vec{V}$ ως πρός το χρόνο οπως μετριέται στο ελεύθερο πλαίσιο X-Y-Z είναι

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i}V_x+\mathbf{j}V_y+\mathbf{k}V_z)=(\dot{\mathbf{i}}V_x+\dot{\mathbf{j}}V_y+\dot{\mathbf{k}}V_z)+(\mathbf{i}\dot{V}_x+\mathbf{j}\dot{V}_y+\mathbf{k}\dot{V}_z)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις 38 στην πρώτη παρένθεση ,αυτή γίνεται $\vec{\omega} \times \vec{V}$.Οι όροι στη δεύτερη παρένθεση παριστάνουν τις συνιστώσες της χρονικής παραγώγου (d$\vec{V}$/dt)xyz οπως μετριέται σχετικά με τους κινούμενους άξονες αναφοράς x-y-z.Αρα

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \boldsymbol{\omega}\times \mathbf{V}+\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xyz} \qquad \textbf{(39)}$$

Η εξίσωση 39 δίνει τη σχέση μεταξύ της χρονικής παραγώγου μιας διανυσματικής ποσότητας σε ενα σταθερό σύστημα και της χρονικής παραγώγου της ποσότητας όπως παρατηρείται σε ενα περιστρεφόμενο σύστημα . [1]



[1]

Σχημα 22

Ε χοντας έτοιμη την εξ.39,θεωρούμε τώρα την κίνηση στο χώρο ενός υ.σ. Α (σχ.24) όπως παρατηρείται και απο ενα περιστρεφόμενο σύστημα χ-y-z και απο ενα σταθερό σύστημα X-Y-Z .Η αρχή του περιστρεφόμενου συστήματος συμπίπτει με τη θέση ενός δεύτερου υ.σ αναφοράς Β ,και το σύστημα εχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.Η εξίσωση του διανύσματος θέσης είναι $\vec{r}$Α=$\vec{r}$Β+$\vec{r}$ οπου το $\vec{r}$ αντικαθιστά το $\vec{r}$Α/Β .Η χρονική παράγωγος της σχέσης αυτής δίνει $\vec{V}$Α=$\vec{V}$Β+$\dot{\vec{r}}$.Απο την εξ.39 έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\left(\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}}\right)\mathbf{XYZ} = \boldsymbol{\omega}\times \mathbf{r} + \mathbf{Vrel}$$

Οπου η ταχύτητα μετρημένη στο χ-y-z είναι $\vec{V}$σχ=(d$\vec{r}$/dt)xyz=$\vec{\imath}\dot{x}$ +$\vec{\jmath}\dot{y}$+$\vec{k}\dot{z}$.Αρα η εξίσωση της σχετικής ταχύτητας γίνεται

$$\mathbf{VA}=\mathbf{VB}+ \boldsymbol{\omega}\times \mathbf{r} + \mathbf{Vrel} \qquad \mathbf{(40)}$$

που είναι ίδια με την εξ.22 που βρήκαμε για την επίπεδη σχετική κίνηση . [1]

Η εξίσωση της σχετικής επιτάχυνσης είναι η χρονική παράγωγος της εξ.40 ,που δίνει $\vec{a}$Α=$\vec{a}$Β+$\dot{\vec{\omega}}$+$\vec{r}$+$\vec{\omega}$+$\dot{\vec{r}}$+$\dot{\vec{V}}$σχ. Απο την εξ.39 ο τελευταίος όρος γίνεται

$$\dot{\boldsymbol{V}}\mathbf{rel}=\left(\frac{\boldsymbol{dVrel}}{\boldsymbol{dt}}\right)\mathbf{XYZ}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{Vrel}+\mathbf{arel}$$

Οπου $\vec{a}$σχ.=(d$\vec{v}$σχ/dt)xyz=$\vec{\imath}\ddot{x}$+$\vec{\jmath}\ddot{y}$+$\vec{k}\ddot{z}$.Το αποτέλεσμα αυτό μαζί με την έκφραση του $\dot{r}$ που βρήκαμε πρίν δίνει με την αναγωγή των ομοίων όρων

$$\mathbf{aA=aB+\dot{\omega}\times r+\omega\times(\omega\times r)+2\omega\times Vrel+arel} \qquad \mathbf{(41)}$$

Η έκφραση αυτή είναι ίδια με την εξίσωση 23 που αναλύσαμε προηγουμένως για την επίπεδη κίνηση . [1]

Οπως τονίσαμε στην εξ.22^{α} οι όροι $\vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{V}$σχ που εμφανίζονται στις εξ.22 και 40 αποτελούν την ταχύτητα του Α σχετικά με το Β οπως μετριέται απο μη περιστρεφόμενους άξονες .Αρα το $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ειναι η διαφορά μεταξύ της σχετικής ταχύτητας μετρούμενης απο μη περιστρεφόμενους άξονες .Στη σχέση επιτάχυνσης στην εξ.23 α αποδείχτηκε οτι οι όροι $2\vec{\omega} \times \vec{V}$σχ+$\vec{a}$σχ συνιστούν μαζί την επιτάχυνση του Α αναφερόμενη σε ενα σημείο Ρ πάνω στο χ-y-z που συμπίπτει με το κινούμενο υλικό σημείο κατά την θεωρούμενη στιγμή .Οι όροι $\dot{\omega} \times r+\omega\times(\omega\times r)$ συνιστούν την επιτάχυνση του Ρ ως πρός το Β.Η επιτάχυνση Coriolis $2\vec{\omega} \times \vec{V}$σχ είναι η διαφορά της επιτάχυνσης του Α ως πρός το Ρ μετρούμενη απο περιστρεφόμενους άξονες . [1] [2]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Οταν επάνω σε ενα υ.σ επιδρά μια δύναμη ,τότε το υ.σ. εχει επιταχυνόμενη κίνηση .Κινητική είναι η μελέτη των σχέσεων μεταξύ συστημάτων δυνάμεων και των μεταβολών που επιφέρουν οι δυνάμεις στην κίνηση .Οι ιδιότητες των συστημάτων δυνάμεων καλύπτονται απο τη στατική κίνηση και οι μεταβολές στην κίνηση των υ.σ καλύφτηκαν . [1]

Η βασική σχέση μεταξή δύναμης και επιτάχυνσης είναι F=ma.Ο δεύτερος νόμος του Newton .Η απόδειξη του νόμου αυτού είναι πειραματική .Θα περιγράψουμε λοιπόν το βασικό νόημα του νόμου αυτού με ενα ιδεατό πείραμα ,όπου θεωρούμε οτι μετράμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση χωρίς λάθος .Ενα σωματίδιο μάζας απομονώνεται στο αρχικοό αδρανειακό σύστημα και υφίσταται την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}1$.Μετράμε την επιτάχυνση $\vec{a}1$ του σωματιδίου και βρίσκουμε το λόγο F1/a1 των μέτρων της δύναμης και της επιτάχυνσς που θα είναι κάποιος αριθμός C1,του οποίου η τιμή θα εξαρτάται απο τις μονάδες που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της δύναμης και της επιτάχυνσης .Επαναλαμβάνουμε τώρα το πείραμα εφαρμόζοντας στο ίδιο υ.σ διαφορετική δύναμη $\vec{F}2$.Μετράμε τώρα την αντίστοιχη επιτάχυνση $\vec{a}2$.Πάλι ο λόγος των μέτρων F2/a2 θα δώσει ενα αριθμό C2 .Το πείραμα επαναλαμβάνεται όσες φορές θέλουμε . [1]

Απο τα αποτελέσματα βγάζουμε δυο σπουδαία συμπεράσματα .Πρώτον ότι οι λόγοι της εφαρμοζομένης δύναμης προς την αντίστοιχη κάθε φορά επιτάχυνση ,είναι όλοι ίσοι ,με την προυπόθεση οτι χρησιμοποιούμε τις ίδιες μονάδες για όλες τις μετρήσεις .Δηλαδή :

$$\frac{F1}{a1}=\frac{F2}{a2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{F}{a}=\text{C,μια σταθερά}$$

Η σταθερά C είναι ενα μέτρο κάποιας ιδιότητας του υ.σ. που δεν μεταβάλλεται .Αυτή η ιδιότητα είναι η αδράνεια του υ.σ. που είναι η αντίσταση του στο ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας .Για ενα υ.σ. με μεγάλη αδράνεια (Μεγάλο C) , η επιτάχυνση για μια δοσμένη δύναμη F θα είναι μεγάλη .Σαν ενα ποσοτικό μέτρο της αδράνειας χρησιμοποιείται η μάζα m και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τη σχέση C=km ,οπου k είναι μια σταθερά ,για τις μονάδες που χρησιμοποιούνται .Ετσι και η πειραματική σχέση γίνεται :

$$F=kma \qquad (42)$$

Οπου F ειναι το μέτρο της τελικής δύναμης που δρα πάνω στο υ.σ. μάζας m και α είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του υ.σ που έχουμε σαν αποτέλεσμα . [1]

Το δεύτερο συμπέρασμα απο το ιδεατό πείραμα είναι οτι η επιτάχυνση εχει πάντα τη διεύθυνση της εφαρμοσμένης δύναμης .Ετσι η εξ.42 είναι μια διανυσματική σχέση και μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\mathbf{F=kma} \qquad \mathbf{(43)}$$

Αν και κανένα πραγματικό πείραμα δεν μπορεί να γίνει με τον ιδανικό τρόπο που περιγράψαμε ,τα αποτελέσματα συνάγονται απο μετρήσεις πειραμάτων που έγιναν με μεγάλη ακρίβεια ,όπου τα αποτελέσματα προβλέπονται σωστά μέσω της υπόθεσης του ιδανικού πειράματος .Μια απο τις πιο ακριβείς δοκιμές ,είναι η ακριβής πρόβλεψη των κινήσεων των πλανητών στην εξ.43. [1]

Ειναι φανερό οτι τα αποτελέσματα αυτου του θεμελιώδους πειράματος ,λαμβάνονται μονο αν οι μετρήσεις γίνουν σχετικά με το ‘’σταθερό’’ αρχικό αδρανειακό σύστημα .Δηλαδή αν το πείραμα που περιγράψαμε γινόταν στην επιφάνεια της γης ,και όλες οι μετρήσεις γίνονταν σχετικά με ενα σύστημα αναφοράς προσδεδεμένο στη γη ,τα αποτελέσματα θα μας έδιναν μικρές διαφορές ,αν τα αντικαταστήσουμε στην εξ.43. .Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός οτι η επιτάχυνση που μετρήθηκε δεν ειναι η σωστή απόλυτη επιτάχυνση . [1]

Η διαφορά αυτή θα εξαφανιστεί αν γίνουν οι κατάλληλες διορθώσεις ,που οφείλονται στις συνιστώσες της επιτάχυνσης της γης .Σε τέτοιες περιπτώσεις οι επιταχύνσεις που μετριούνται σχετικά με άξονες αναφοράς συνδεδεμένους με τη γη ,μπορούν να θεωρηθούν σαν ΄΄απόλυτες΄΄ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αμελητέο λάθος η εξ.43 για πειραματικές μετρήσεις που γίνονται πάνω στην επιφάνεια της γης . [1]

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων ,όπως αυτά που έχουν σχέση με πυραύλους ή διαστημόπλοια ,στα οποία οι συνιστώσες της επιτάχυνσης της γης έχουν μεγάλη σημασία . Είναι απαραίτητο λοιπόν ,να καταλάβει κανείς τη θεμελιώδη βάση του νόμου του Newton ώστε να χρησιμοποιεί τις κατάλληλες συνιστώσες της απόλυτης επιτάχυνσης . [1]

Πρίν το 1950 οι νόμοι της Νευτόνειας μηχανικής αποδείχτηκαν με αναρίθμητα φυσικά πειράματα και θεωρήθηκαν η τελική περιγραφή της κίνησης των σωμάτων .Η έννοια του χρόνου που θεωρείται απόλυτη ποσότητα στην Νευτώνεια θεωρεία ,πήρε μια διαφορετική ερμηνεία στη θεωρεία της σχετικότητας ,που παρουσίασε ο Einstein το 1905 . Η νέα αυτη έννοια είχε σαν συνέπεια τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό των νόμων της μηχανικής .Η θεωρία της σχετικότητας γελιοποιήθηκε στην αρχή ,αλλα έπειτα ελένχθηκε πειραματικά και σήμερα την δέχονται οι επιστήμονες όλου του κόσμου .Αν και η διαφορά μεταξύ της μηχανικής του Newton και του Einstein είναι βασική ,υπάρχει πρακτική διαφορά στα αποτελέσματα που δίνονται απο τις δύο θεωρίες μόνο οταν χρησιμοποιούμε ταχύτητες της τάξης της ταχύτητας του φωτός $(300(10^6))$m/s . [1]

Για παράδειγμα ,προβλήματα που ασχολούνται με ατομικά και πυρηνικά σωματίδια ,περιέχουν υπολογισμούς βασισμένους στη θεωρία της σχετικότητας και έχουν βασικό ενδιαφέρον και για τους επιστήμονες αλλα και για τους μηχανικούς . [1]

Συνηθίζεται να παίρνουμε το k ίσο με τη μονάδα στην εξ.43 ,οπότε η συνηθισμένη μορφή του δεύτερου νόμου του Newton είναι

F=ma

Ενα σύστημα μονάδων ,για το οποίο το k ειναι μονάδα ,είναι γνωστό σάν ένα κινητικό σύστημα .Αρα για ενα κινητικό σύστημα οι μονάδες της δύναμης της μάζας και της επιτάχυνσης δεν ειναι ανεξάρτητες .Στο σύστημα S.I ,οι μονάδες της δύναμης (newton ,N) παράγονται απο το δεύτερο νόμο ,του Newton ,συναρτήσει των βασικών μονάδων της μάζας (Kg) επι την επιτάχυνση (m/s^2) .Δηλαδή N=kg ×m/s^2 .Αυτό το σύστημα είναι γνωστό σαν ένα απόλυτο σύστημα ,αφου η μονάδα της δύναμης εξαρτάται απο την απόλυτη τιμή της μάζας . [1]

Στο U.S, βρετανικό σύστημα μονάδων ,οι μονάδες της μάζας παράγονται απο τις μονάδες της δύναμης δια τις μονάδες της επιτάχυνσης .Αρα οι μονάδες της μάζας είναι : slugs=lbf s^2/ft

Αυτο το σύστημα είναι γνωστό σαν βαρυτικό σύστημα ,αφού η μάζα παράγεται απο τη δύναμη όπως ορίζεται απο τη βαρυτική έλξη. [1]

Για μετρήσεις που έγιναν σχετικά με την περιστρεφόμενη γη ,πρέπει να χρησιμοποιείται η σχετική τιμή του g.Η διεθνώς παραδεκτή τιμή του g σχετικά με τη γη ,στην επιφάνεια της θάλασσας και σε πλάτος 45^o είναι 9,806 65 m/s^2,εκτός απο τις περιπτώσεις που χρειαζόμαστε μεγαλύτερη ακρίβεια .Για μετρήσεις σχετικά με μη περιστρεφόμενη γη ,πρέπει να χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή του g .Η απόλυτη τιμή σε πλάτος 45^o και στην επιφάνεια της θάλασσας είναι 9,8236 m/s^2 . [1]

Στο U.S-Βρετανικό σύστημα, η τιμή του g σχετικά με την περιστρεφόμενη γη ,στο επίπεδο της θάλασσας και σε πλάτος 45^o είναι 32,1740 ft/s^2 .Η αντίστοιχή της , σχετικά με μη περιστρεφόμενη γη είναι 32,2295 ft/s^2. [1]

3.2 Εξίσωση της κίνησης

Θεωρείστε ενα υ.σ. μάζας m ,που πάνω του επιδρούν οι συντρέχουσες δυνάμεις $\vec{F}1, \vec{F}2, \vec{F}3$….. των οποίων το διανυσματικό άθροισμα είναι $\Sigma\vec{F}$.Αρα η εξίσωση F=ma γίνεται :

$$\Sigma\vec{F}=\mathbf{ma} \qquad (44)$$

Στην λύση των προβλημάτων η εξ.44 χρησιμοποιείται συνήθως με μορφή συνιστωσών,που εξαρτάται απο το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων .Η εκλογή του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων υπαγορεύεται από την εν λόγω κίνηση ,και είναι ενα βασικό πρόβλημα για τη λύση του προβλήματος .

Οταν οι δυνάμεις και η κίνηση περιγράφονται απο ορθογώνιες συντεταγμένες χ,y,z η εξ.44 έχει τις συνιστώσες

$$\Sigma Fx = max$$
$$\Sigma Fy = may \qquad (45)$$
$$\Sigma Fz = maz$$

Οπου

$$|\Sigma F| = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2} \qquad \text{και} \qquad |a| = \sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}$$

Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ,μπορούμε να διαλέξουμε π.χ τον άξονα χ,ετσι ώστε να συμπίπτει με τη διεύθυνση της επιτάχυνσης $\vec{a}$,και ετσι οι εξισώσεις της κίνησης γίνονται :ΣFx=ma,ΣFy=0,ΣFz=0.Η εξίσωση της κίνησης μπορεί ακόμα να γραφτεί και σαν διαφορική εξίσωση της μορφής ΣFx=m$\ddot{x}$.Αυτή η μορφή της εξίσωσης της κίνησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει προβλήματα όπου το ΣFx είναι συναρτήσει του χρόνου ,της μετατόπισης ή της ταχύτητας .Δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις της εξίσωσης χρειάζονται τότε ,για να εκφράσουμε το χ σαν συνάρτηση του t.Οταν γνωρίζουμε αυτη τη συναρτησιακή σχέση ,η κίνηση είναι απόλυτα γνωστή . [1]

Για επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση ενός υ.σ. και αν χρησιμοποιηθούν οι ως προς n και t συνιστώσες ,οι συνιστώσες της εξ.44 γράφονται

$$\Sigma Fn = man$$
$$\Sigma Ft = mat \qquad (46)$$

Οπου an=υ$\dot{\theta}$=ρ$\dot{\theta}^2$=υ^2/ρ και at=$\dot{\upsilon}$=$\ddot{s}$ απο τις εξ.12 και 13 .Για κυκλική κίνηση , η ακτίνα καμπυλότητας ρ ειναι σταθερή ,και οι συνιστώσες της επιτάχυνσης μπορούν να γραφτούν όπως στην εξ.16

Για επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση και χρησιμοποιώντας τις ως προς r και θ συνιστώσες ,η εξ.44 γράφεται

$$\Sigma Fr = mar$$

$$\Sigma F\theta = ma\theta \quad (47)$$

Οπου αr=$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ και αθ=$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ απο την εξίσωση 18

Με τον ίδιο τρόπο για καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο ,μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες των εξ.25 οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Sigma Fr &= mar \\ \Sigma F\theta &= ma\theta \quad (48) \\ \Sigma Fz &= maz \end{aligned}$$

ή ακόμα και οι σφαιρικές συντεταγμένες των εξ,28,οπότε :

$$\begin{aligned} \Sigma FR &= maR \\ \Sigma F\theta &= ma\theta \quad (49) \\ \Sigma F\varphi &= ma\varphi \end{aligned}$$

Υπάρχουν συχνά περιπτώσεις οπου η απόλυτη επιτάχυνση $\vec{a}$ ενός υ.σ περιγράφεται καλύτερα συναρτήσει της επιτάχυνσης ενός κινούμενου συστήματος συντεταγμένων και της επιτάχυνσης σχετικά με το κινούμενο αυτό σύστημα . [1]

Είναι φανερό οτι η εκλογή του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί σε ενα δοσμένο πρόβλημα ,είναι πολύ σπουδαίος παράγονας . [1]

Αρα λοιπόν πρέπει να υπάρχει άριστη γνώση της κινηματικής κίνησης του υ.σ για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στην κινητική του προβλήματος .Συχνά η εκλογή του συστήματος συντεταγμένων υποδεικνύεται απο τον αριθμό και τη γεωμετρία των περιορισμών.Δηλαδή αν το υ.σ. είναι ελεύθερο να κινείται στο χώρο,οπως συμβαίνει με το κέντρο μάζας ενός πυραύλου σε ελεύθερη πτήση,λέμε οτι το υ.σ εχει τρείς βαθμούς ελευθερίας που χρειάζονται τρείς ανεξάρτητες συντεταγμένες ,οι οποίες προσδιορίζουν τη θέση του υ.σ κάθε στιγμή.Και οι τρείς μονόμετρες συνιστώσες,(εξ45,48 η 49) της εξίσωσης της κίνησης ,πρέπει να χρησιμοποιηθούν και να ολοκληρωθούν ,ώστε να πάρουμε τις χωρικές συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου .Αν ενα υ.σ είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε μια επιφάνεια ,χρειάζονται μόνο δύο συνιστώσες για να προσδιορίσουν τη θέση του ,και σε αυτην την περίπτωση λέμε οτι έχει δύο βαθμούς ελευθερίας .Αν ενα υ.σ είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος μια γραμμής ,η θέση του μπορεί να καθοριστεί απο μια συντεταγμένη που μετριέται κατά μήκος της γραμμής .Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι το υ.σ. εχει μόνο ενα βαθμό ελευθερίας . [1]

Η εξίσωση44, ή οποιαδήποτε άλλη απο τις μορφές με τις συνιστώσες της εξίσωσης της δύναμης ,της μάζας και της επιτάχυνσης ,ονομάζεται εξίσωση της κίνησης .Η εξίσωση της κίνησης μας δίνει τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης που αντιστοιχεί στη στιγμιαία τιμή των δυνάμεων που δρούν πάνω στο υ.σ..Αν οι δυνάμεις μεταβάλλονται ,τότε και η επιτάχυνση θα μεταβάλλεται,και οι μεταβολές της ταχύτητας και της μετατόπισης του υ.σ. σε ενα διάστημα της κίνησής του μπορούν να υπολογιστούν με απ'ευθείας ολοκλήρωση της αντίστοιχης εξίσωσης της κίνησης .Συχνά χρειάζεται αριθμητική ή γραφική ολοκλήρωση της εξίσωσης της κίνησης ,οταν η συναρτησιακή σχέση μεταξύ των μεταβλητών δυνάμεων και των συνιστωσών δεν μπορεί να γραφτεί .Αυτή η περίπτωση είναι συνηθισμένη οταν οι δυνάμεις προσδιορίζονται πειραματικά ή απο άλλες προσεγγιστικές πληροφορίες . [1]

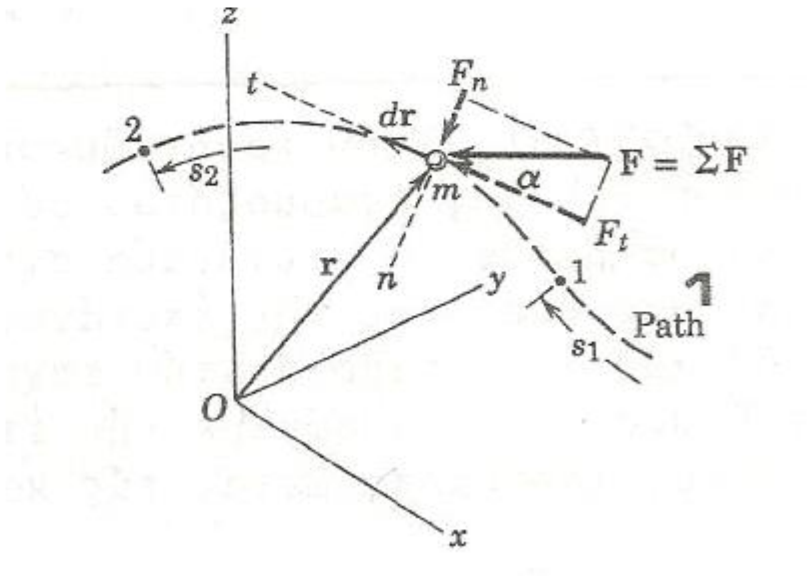
Οταν χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε απο τις εξισώσεις δύναμης-μάζας-επιτάχυνσης της κίνησης ,είναι απαραίτητο να παίρνουμε όλες τις δυνάμεις που εξασκούνται πάνω στο υ.σ. οι μόνες δυνάμεις που μπορούμε να αποκλείσουμε ,είναι αυτές που τα μεγέθη τους είναι αμελητέα σε σύγκριση με τις άλλες δρώσες δυνάμεις ,όπως είναι οι δυνάμεις μεταξύ δυο υλικών σημείων αν συγκριθούν με την έλξη που εξασκεί σε αυτά η γη .Το διανυσματικό άθροισμα $\Sigma\vec{F}$ της εξ.44 ,υποδηλώνει όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο εξεταζόμενο υ.σ.Με τον ίδιο τρόπο ,το αντίστοιχο μονόμετρο άθροισμα δυνάμεων σε οποιαδήποτε απο τις διευθύνσεις των συντεταγμένων ,εννοεί το άθροισμα των συνιστωσών όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω στο υ.σ. κατά τη διεύθυνση αυτή .Ο μόνος εύκολος τρόπος για να υπολογίσουμε σώστα όλες τις δυνάμεις ,είναι να απομονώσουμε το εξεταζόμενο υ.σ. απο όλα τα σώματα με τα οποία εφάπτεται ή απο τα οποία επηρεάζεται ,και να αντικαταστήσουμε τα σώματα αυτά με τις δυνάμεις που εξασκούν πάνω στο εξεταζόμενο υ.σ. Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος που θα πάρουμε,θα μας βοηθήσει να συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς ,κάθε δύναμη γνωστή ή άγνωστη που εξασκείται πάνω στο υ.σ. Μόνο αφού κάνουμε όσα είπαμε πριν ,γράφουμε τις κατάλληλες εξισώσεις της κίνησης .Το διάγραμμα του ελευθέρου σώματος ,εξυπηρετεί στη δυναμική τον ίδιο σκοπό ,οπως και στην στατική . [1]

Ο σκοπός αυτός είναι απλά ,να βρούμε μια αποτελεσματική μέθοδο ,για να υπολογίσουμε σωστά το αποτέλεσμα όλων των πραγματικών δυνάμεων που εξασκούνται στο εξεταζόμενο υ.σ. η σώμα .Στη στατική το αποτέλεσμα αυτό είναι μηδενικό ,ενω στη δυναμική είναι το γινόμενο της μάζας επι την επιτάχυνση .Αν πρέπει να γίνει σαφές οτι οι εξισώσεις της κίνησης πρέπει να εφαρμόζονται σωστά και επαρκώς ,και αν ενώ τις εφαρμόζουμε διατηρούμε τις ισότητες μεταξύ μονόμετρων και διανυσματικών μεγεθών ,τότε θα βρούμε ελάχιστες δυσκολίες . [1]

3.3 Εργο και ενέργεια

Προηγουμένως ο δεύτερος νόμος του Newton $\vec{F}$=m$\vec{a}$,εφαρμοζόταν σε διάφορα προβλήματα κίνησης υ.σ. για να βρεθεί η στιγμιαία σχέση μεταξύ της δύναμης που εξασκείται στο υ.σ. και της επιτάχυνσης που αποκτά το υ.σ. αυτό .Οταν θέλαμε τη μεταβολή στην ταχύτητα ή στην αντίστοιχη μετατόπιση του υ.σ. , ολοκληρώναμε την επιτάχυνση που είχαμε προηγούμενα βρει ,χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες κινηματικές εξισώσεις . [1]

Θεωρούμε ενα υ.σ. μάζας m ,που κινείται κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής του σχήματος 25. [1]



[1]

Σχημα 22

Εστω $\vec{F}$ η συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ ολων των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στη μάζα m.Η θέση της m καθορίζεται απο το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και η μετατόπιση της κατά μήκος της τροχιάς της κατά τη διάρκεια του χρόνου dt ,παριστάνεται απο τη μεταβολή $d\vec{r}$ του διανύσματος θέσης της .Το έργο dU που παράγεται απο την $\vec{F}$ κατά τη διάρκεια της μετατόπισης αυτής ορίζεται απο το εσωτερικό γινόμενο

$$dU=F\ dr$$

Η έκφραση αυτή παριστάνει το μονόμετρο μέγεθος $F_t|dr|=F_t ds=(F\cos a)ds$ οπου s είναι η μονόμετρη απόσταση που μετριέται κατά μήκος της καμπύλης .Αρα το έργο είναι μια μονόμετρη ποσότητα .Αν η Ft έχει την ίδια διεύθυνση με το $d\vec{r}$,το έργο είναι θετικό .Αν η Ft εχει την αντίθετη διεύθυνση απο το $d\vec{r}$,το έργο είναι αρνητικό .Η συνιστώσα Fn της δύναμης που είναι κάθετη στη διεύθυνση της τροχιάς ,δεν μπορεί να παράγει έργο αφού το εσωτερικό της γινόμενο με τη μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι μηδέν. [1]

Το έργο που παράγεται απο την $\vec{F}$ κατά τη διάρκεια μια ορισμένης κίνησης του υ.σ.σ απο το σημείο 1 ως το 2 είναι

$$U=\int \boldsymbol{F\,dr} = \int_{s1}^{s2} \boldsymbol{Ft\,ds}$$

Αφού τα όρια προσδιορίζουν το αρχικό και τελικό σημείο του διαστήματος κίνησης . [1]

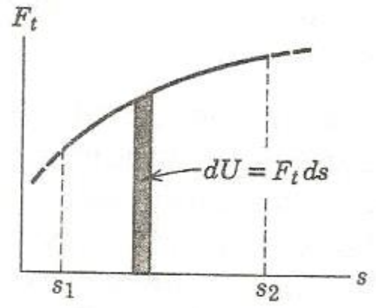
Για ενα σύστημα δυνάμεων $\vec{F}1, \vec{F}2, \vec{F}3\ldots$,που ενεργούν πάνω σε ενα υ.σ. που έχει μετατόπιση d$\vec{r}$, το έργο που παράγεται απο τη συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ του συστήματος είναι ισο με το άθροισμα των έργων που παράγει κάθε μια συνιστώσα .Δηλαδή

dU=F1 dr+F2 dr +F3 dr +…

(F1+F2+F3+…) dr=ΣF dr

Οπότε έχουμε οτι U=$\int \Sigma F$ dr

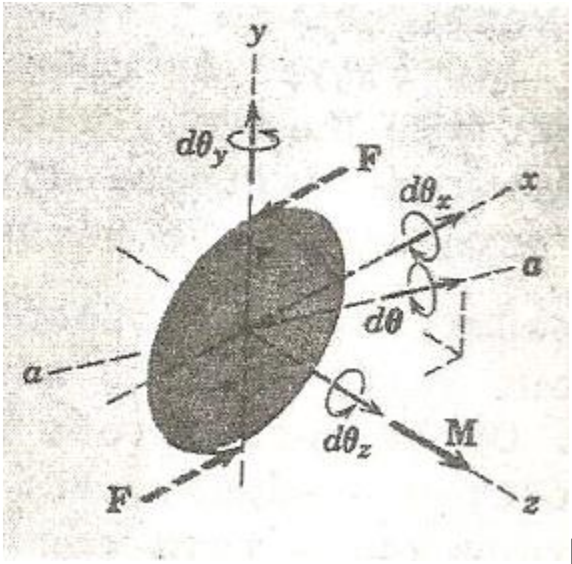
Το έργο εχει μονάδες δύναμης (N) εχει μετατόπιση (m)δηλάδη N m.Η μονάδα αυτή ονομάζεται joule (j) και ορίζεται σαν το έργο που παράγει μια δύναμη 1N κινούμενο σε απόσταση 1m κατά τη διεύθυνσή της .Η χρήση του joule για το έργο (και την ενέργεια)αντί για τις μονάδες Nm μας βοηθάει να αποφύγουμε κάποια πιθανή σύνχυση με τις μονάδες ροπής μιας δύναμης ή της ροπής στρέψης που γράφονται επίσης Nm.Αν η συναρτησιακή σχέση μεταξύ της εφαπτομενικής συνιστώσας Ft μιας δύναμης και της απόστασης s κατά μήκος της τροχιάς ,είναι γνωστή ,το ολοκλήρωμα για; Το έργο U μπορεί να αναπτυχτεί μαθηματικά .Αν η συναρτησιακή σχέση δεν είναι γνωστή σα μαθηματική έκφραση που μπορεί να ολοκληρωθεί ,αλλά καθορίζεται απο προσεγγιστικές ή πειραματικές πληροφορίες ,τότε το έργο μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε μια αριθμητική ή γραφική ολοκλήρωση που παριστάνεται απο την επιφάνεια κάτω απο την καμπύλη Ft,s όπως φαίνεται στο σχ.23. [1]



[1]

Σχημα 23

Αν και δεν χρειάζεται στην ανάπτυξη της κίνησης ενός υ.σ. το έργο που παράγεται απο ενα ζεύγος δυνάμεων ,που ενεργεί πάνω σε ενα περιστρεφόμενο σώμα ,θα αναπτυχθεί εδω αφού είναι ανάλογο με το έργο μιας δύναμης .θεωρείστε το ζεύγος ροπής $\vec{M}$ που εξασκείται στο δίσκο του σχ.27 ,και αποτελείται απο τις δυο ίσες και αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}$ παράλληλες στον άξονα των χ που απέχουν κατά 2r. [1]



[1]

Σχημα 24

Προφανώς δεν παράγεται έργο κατά τη μια μεταφορά του δίσκου .Θεωρούμε τώρα μια απειροστή περιστροφή $d\vec{\theta}=\vec{\imath}d\theta\chi+\vec{\jmath}d\theta y+\vec{k}d\theta z$ του δίσκου γύρω απο οποιοδήποτε άξονα που περνάει απο το κέντρο του ,οπως είναι ο α-α .Φαίνεται αμέσως οτι δεν παράγεται έργο απο καμία απο τις δυνάμεις ,κατά τη διάρκεια των συνιστωσών περιστροφών dθx και dθy .Κατά τη διάρκεια της περιστροφής dθz ομως ,το έργο που παράγεται είναι dU=2Frdθz=Mdθz που μπορεί να γράφεται και ως εξής

$$\mathbf{dU=M\ d\theta}$$

Αρα το συνολικό έργο που παράγεται κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης περιστροφής είναι

$$\mathbf{U=\int M\ d\theta = \int(Mxd\theta x + Myd\theta y + Mzd\theta z)}$$

Το έργο που παράγεται απο τη συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο υ.σ m του σχ.25 κατά τη διάρκεια ενός ορισμένου διαστήματος κίνησης κατά μήκος της τροχιάς του ,μπορεί να προσδιοριστεί αν αντικαταστήσουμε με το δεύτερο νόμο του Newton (εξ.44) οπότε έχουμε

$$\mathbf{U}=\int \boldsymbol{\Sigma F}\ \mathbf{dr} = \int \boldsymbol{ma\ dr}$$

Αλλά $\vec{a}\ \overrightarrow{dr}$ =at ds οπου at είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης της m και ds είναι το μέτρο του $d\vec{r}$.Συναρτήσει της ταχύτητας υ του υ.σ, η εξ.6 δίνει ds= u du .Αρα η έκφραση για το έργο της $\Sigma\vec{F}$ γίνεται

$$\mathrm{U}=\int \Sigma F\ \ dr=\int mu\ du$$

$$\mathbf{U}=\int \boldsymbol{\Sigma F}\mathbf{dr}=\frac{1}{2}\mathbf{m}(\boldsymbol{u2^2}-\boldsymbol{u1^2}) \qquad \mathbf{(50)}$$

Οπου η ολοκλήρωση έγινε μεταξύ των σημείων 1 και 2 κατά μήκος της καμπύλης ,και οι ταχύτητες στα σημεία αυτά έχουν μέτρα u1 και u2 αντίστοιχα

Η κινητική ενέργεια Τ του υ.σ. ορίζεται ως εξής

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\mathrm{m}u^2$$

Και είναι το συνολικό έργο που πρέπει να δοθεί στο υ.σ. για να το φέρει απο την κατάσταση της ηρεμίας ,σε ταχύτητα υ .η κινητηκή ενέργεια Τ είναι μια μονόμετρη ποσότητα με μονάδες Nm η joules(j) και είναι πάντα θετικά ασέτα με τη διεύθυνση της ταχύτητας ,Η εξίσωση 50 μπορεί να γραφτεί απλούστερα και ως εξής

$$\mathbf{U=\Delta T} \qquad \mathbf{(51)}$$

Η εξίσωση έργου –ενέργειας για ενα υ.σ.

Η εξίσωση λέει οτι το συνολικό έργο που παράγεται απο ολες τις δυνάμεις που εξασκούνται πάνω σε ενα υ.σ. κατά την διάρκεια ενός διαστήματος της κινήσής του ,είναι ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υ.σ. Φαίνεται τώρα απο την εξ.50,οτι το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου του έργου και της ενέργειας ,είναι οτι αποφεύγει τον υπολογισμό της επιτάχυνσης και οδηγεί απευθείας ,στις μεταβολές της ταχύτητας συναρτήσει των δυνάμεων που παράγουν το έργο .Ακόμα η εξίσωση έργου-ενέργειας περιέχει μόνο τις δυνάμεις που παράγουν έργο και αρα μεταβάλλουν το μέτρο των ταχυτήτων . [1]

Θεωρείστε δύο η περισσότερα υ.σ. ενωμένα μεταξύ τους με συνδέσμους χωρίς τριβές ,που δεν μπορούν να παραμοφώνονται ελαστικά .Οι δυνάμεις στους συνδέσμους υπάρχουν κατά ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων ,και τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων αυτών έχουν απαραίτητα τις ίδιες συνιστώσες μετατόπισης κατα τη διεύθυνση των δυνάμεων .Αρα το έργο που παράγεται απο αυτές τις εσωτερικές δυνάμεις ,είναι μηδέν κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε κίνησης του συστήματος των δύο η περισσότερων συνδεδεμένων υ.σ. .Αρα η εξ.51 μπορεί να εφαρμοστεί σε όλο το σύστημα ,οπου U είναι το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα απο εξωτερικές πρός αυτό δυνάμεις και ΔΤ είναι η μεταβολή της συνολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος .Η συνολική κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών ολων των στοιχείων του συστήματος .Παρατηρούμε τώρα οτι αλλο ενα πλεονέκτημα της μεθόδο έργου –ενέργειας είναι το οτι επιτρέπει την ανάλυση ενος συστήματος υ.σ. συνδεμένων με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν ,χωρίς να χωρίζεται το σύστημα στα μέλη του . [1]

3.4 Δυναμική ενέργεια

Το έργο που παράγεται απο μια δύναμη $\vec{F}$ κατά τη διάρκεια μιας μετατόπισης d$\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της ,μπορεί να γραφτεί και ως εξής :

$$\mathbf{U=}\int \boldsymbol{F\,dr=}\int(\boldsymbol{Fxdx+Fydy+Fzdz})$$

Το ολοκλήρωμα $\int \vec{F}$ d$\vec{r}$ είναι γραμμικό ολοκλήρωμα που εξαρτάται σε γενικές γραμμές ,απο την τροχιά που ακολουθείται μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημείων 1 και 2 στο χώρο .Αν όμως το $\vec{F}$ d$\vec{r}$ είναι ένα τέλειο διαφορικό –dV μιας μονόμετρης συνάρτησης V των συντεταγμένων ,τότε

$$\mathbf{U=}\int_{\boldsymbol{u1}}^{\boldsymbol{u2}} \boldsymbol{-dV}\mathbf{=-(V2-V1)} \qquad \mathbf{(52)}$$

που εξαρτάται μόνο απο τα τελικά σημεία της κίνησης ,και αρα είναι ανεξάρτητο απο το δρόμο που ακολουθείται .Το σημείο πρίν απο το dV είναι αυθαίρετο ,αλλα το διαλέξαμε ετσι ωστε να συμφωνεί με τους συνηθισμένους ορισμούς του προσήμου της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας στο βαρυτικό πεδίο της γής .Αν η V υπάρχει ,η διαφορική της μεταβολή μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\mathbf{dV=\frac{\theta V}{\theta x}dx+\frac{\theta V}{\theta y}dy+\frac{\theta V}{\theta z}dz}$$

Η σύγκριση με το –dV=$\vec{F}$ d$\vec{r}$=Fxdx+Fydy+Fzdz δίνει

Fx=-$\frac{\theta V}{\theta x}$ Fy=-$\frac{\theta V}{\theta y}$ Fz=-$\frac{\theta V}{\theta z}$

Η δύναμη μπορεί ακόμα να γραφτεί και σα διάνυσμα ως εξής

$$\mathbf{F=-\nabla V} \qquad \mathbf{(53)}$$

Οπου το σύμβολο ∇ αντιπροσωπεύει την παράσταση

$$\boldsymbol{\nabla = i\frac{\theta}{\theta x} + j\frac{\theta}{\theta y} + k\frac{\theta}{\theta z}}$$

Η ποσότητα V είναι γνωστή και σαν συνάρτιση δυναμικού και η έκφραση ∇V είναι γνωστή σαν κλίση της συνάρτισης δυναμικού . [1]

Οταν οι συνιστώσες μιας δυναμικής προέρχονται απο ενα δυναμικό με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν ,η δύναμη λεγεται συντηρητική και επομένως το έργο που παράγεται απο την $\vec{F}$ μεταξύ δυο σημείων είναι ανεξάρτητο του ακολουθούμενου δρόμου .Για μια τέτοια δύναμη ,το έργο που παράγεται απο την $\vec{F}$ οταν διαγράφει μια πλήρη κλειστή τροχιά είναι

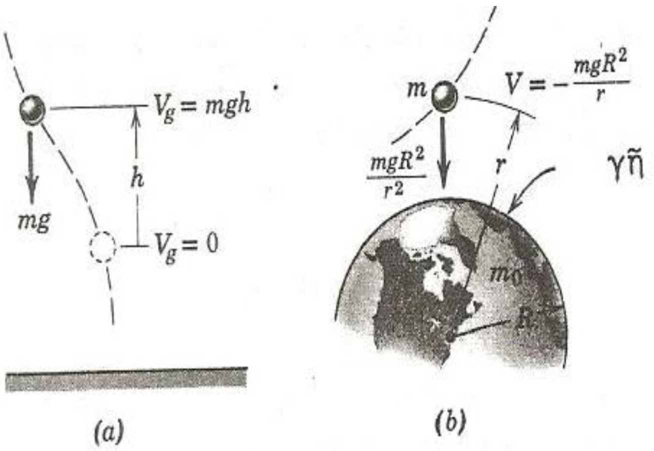
$$\boldsymbol{\oint F\, dr = 0}$$

Οταν η δύναμη είναι συνάρτηση της ταχύτητας ή περιέχει τριβή ,είναι μη συντηρητική ,και το έργο που παράγεται θα εξαρτάται απο τον ακολουθούμενο δρόμο.Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού . [1]

Το πιο κοινό παράδειγμα πεδίου συντηρητικής δύναμης ,είναι το πεδίο βαρύτητας της γης που δίνεται απο την εξ.2 Για κίνηση κοντά στην επιφάνεια της γής ,η βαρυτική έλξη ειναι F=mg και είναι σταθερή .Το έργο της δύναμης αυτής που ενεργεί στο ελκόμενο αντικείμενο του σχ.28^{α},κατά τη διάρκεια μιας ανύψωσης του αντικειμένου κατά μια κατακόρυφη απόσταση h ,καθώς κινείται σε οποιαδήποτε τροχιά είναι –mgh .Εξισώνοντας το έργο με το αρνητικό της μεταβολής δυναμικού σύμφωνα με την εξ,52 έχουμε –mgh=-(Vg-0) ή

$$\mathbf{Vg=mgh} \qquad \mathbf{(54)}$$

Οπου η δυναμική ενέργεια στην κατώτερη θέση ,λαμβάνεται αυθαίρετα μηδέν ,και ο δείκτης g δηλώνει βαρυτικό δυναμικό .Είναι προφανές οτι το επίπεδο αναφοράς για τη μηδενική δυναμική ενέργεια είναι αυθαίρετο ,αφου το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι οι μεταβολές στην δυναμική ενέργεια



[1]

Σχημα 25

Οταν αντιμετωπίζουμε μεγάλες μεταβολές ύψους στο πεδίο της γής,σχ.28b η βαρυτική δύναμη kmmo/r^2=mgR^2/r^2 δεν ειναι πια σταθερή .Εξισώνοντας το έργο της δύναμης αυτής που δρα πάνω στο αντικείμενο ,με το αρνητικό της μεταβολής του δυναμικού ,απο την εξ.52 κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε κίνησης απο μια απόσταση r απο το κέντρο της γης κατά τη διεύθυνση της ακτίνας ,σε μια μεγαλύτερη r' έχουμε

$\int_{r}^{r'} -\frac{mgR^2}{r^2}\,dr$=-(Vg'-Vg) ή Vg-Vg'=mg$R^2(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})$

Συνήθως παίρνουμε Vg'=0 οταν r'=∞,οπότε το βαρυτικό δυναμικό γίνεται

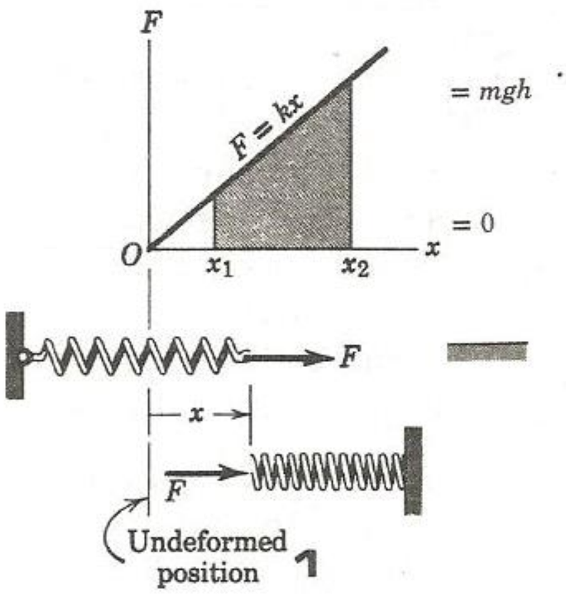
$$\mathbf{Vg=-\frac{mgR^2}{r}} \qquad \textbf{(55)}$$

Αποδεικνύεται οτι αν σε αυτήν την απόδειξη χρησιμοποιήσουμε το βαρυτικό νόμο της εξ.2,θα ισχύει με την προυπόθεση οτι η γη θεωρείται υ.σ. με όλη τη μάζα της συγκεντρωμένη στο κέντρο της . [1]

Ενα δεύτερο κοινό παράδειγμα συντηρητικής δύναμης βρίσκεται με την παραμόρφωση ενός ελαστικού σώματος .Για μονοδιάστατο ελαστικό ελατήριο σκληρότητας k σχ.29 ,η δύναμη που αναλαμβάνει το ελατήριο σε κάθε παραμόρφωση x ,συμπίεση ή έκταση ,απο την αρχική του κατάσταση ,είναι F=kx .Αρα το έργο ενός ελαστικού ελατηρίου κατά τη διάρκεια μιας συμπίεσης ή μιας έκτασης είναι

$$\int \boldsymbol{Fdx}=\int_{x1}^{x2} \boldsymbol{kxdx} = \tfrac{1}{2}\mathbf{k}x2^2-\tfrac{1}{2}\mathbf{k}x1^2$$

που αντιπροσωπεύει την τραπεζοειδή επιφάνεια στο διάγραμμα F-x .Σημειώνουμε οτι θετικό έργο παράγεται σε ενα ελατήριο απο μια δύναμη που το παραμορφώνει ,είτε το θλίβει είτε το εφελκύει . [1]



[1]

Σχημα 26

Επομένως το έργο μιας δύναμης ίσης και αντίθετης που εξασκείται πάνω στο σώμα στο οποίο είναι εφαρμοσμένο το ελατήριο ,είναι αρνητικό .Αντίστροφα ,οταν αφήνουμε το ελατήριο απο τη συμπίεση η έκτασή του , το έργο είναι αρνητικό ,δηλαδή το ελατήριο δίνει θετικό έργο στο σώμα με το οποιο είναι συνδεμένο.το έργο που χρειάζεται για να παραμορφώσει ενα ελατήριο κατά χ απο την αρχική του κατάσταση ,αποθηκεύεται στο ελατήριο και είναι γνωστό σαν ελαστική δυναμική ενέργεια ,που δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{Ve}=\frac{1}{2}\mathbf{k}x^2 \qquad \mathbf{(56)}$$

Η δύναμη F’ που εξασκείται πάνω στο σώμα απο το ελατήριο ,είναι απο την εξ.53

$$\mathbf{F'}=-\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=-\mathbf{kx}$$

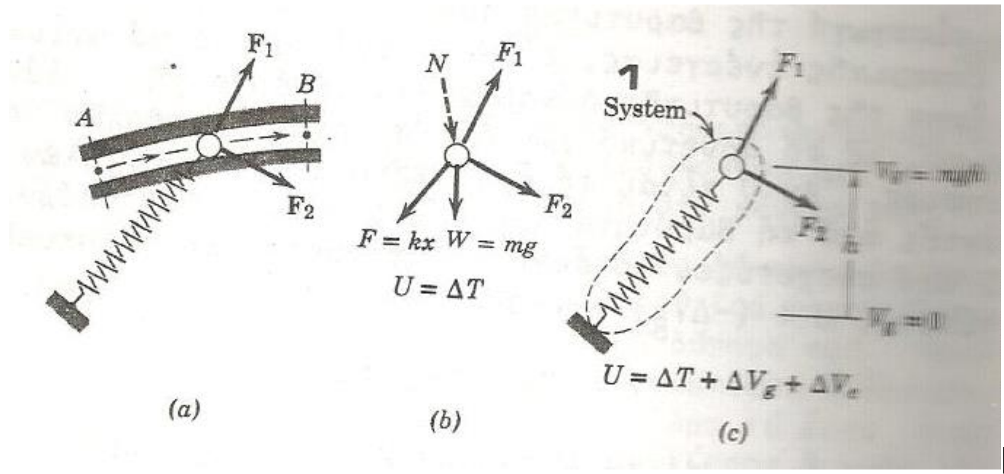
Δηλαδή είναι η αντίθετη της δύναμης F που εξασκείται στο ελατήριο .

Με την εισαγωγή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας ,είναι συχνά βολικό να αντικαθιστούμε το έργο της βαρυτικής δύναμης και το έργο της δύναμης του ελατηρίου ,με το αρνητικό των αντίστοιχων μεταβολών δυναμικής ενέργειας ,είναι συχνά βολικό να αντικαθιστούμε το έργο της βαρυτικής δύναμης και το εργο της δύναμης του ελατηρίου , με το αρνητικό των αντίστοιχων μεταβολών δυναμικής ενέργειας .Αν U είναι το έργο πάνω σε ένα υ.σ.σ ολων των δυνάμεων εκτός απο την βαρύτητα και τις δυνάμεις ελατηρίων ,τότε η εξ.51 που σχετίζει το έργο και τη μεταβολή κινητικής ενέργειας γίνεται U+(-ΔVg)+(-ΔVe)=ΔT ή

$$\mathbf{U=\Delta T+\Delta Vg+\Delta Ve} \qquad \mathbf{(57)}$$

Αυτή η εναλλακτική μορφή της εξίσωσης έργου ενέργειας είναι συχνά πιο βολική στη χρήση απο την εξ,51 ,αφού το έργο των βαρυτικών δυνάμεων και των δυνάμεων ελατηρίων ,υπολογίζεται μονο για τις τελικές θέσεις του κέντρου της βαρύτητας και του μήκους του ελαστικού ελατηρίου .Ο δρόμος που ακολουθείται ανάμεσα απο αυτα τα τελικά σημεία ,δεν εχει καμμία επίπτωση στα ΔVg και ΔVe.

Για να ξεκαθαριστεί η διαφορά στη χρήση των εξ.51 και εξ,57 το σχ30a δείχνει σχηματικά ενα υ.σ. μάζας m,που είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος ορισμένης τροχιάς ,υπο την επίδραση των δυνάμεων F1 και F2 ,της βαρυτικής δύναμης W=mg,της δύναμης του ελατηρίου F , και της κάθετης αντίδρασης Ν .Στο δεύτερο τμήμα του σχήματος φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του υ.σ. και το έργο κάθε μια απο τις δυνάμεις F1,F2,W.Το έργο της δύναμης του ελατηρίου F=kx αναπτύχτηκε για το θεωρούμενο διάστημα της κίνησης π.χ. απο το Α ως το Β και εξισώθηκε με μεταβολή ΔΤ της κινητικής ενέργειας ,χρησιμοποιώντας την εξ.51 .Η αντίδραση Ν ,αν είναι κάθετη στην τροχιά ,δεν παράγει έργο .Στο τρίτο μέρος του σχήματος για μια άλλη αντιμετώπιση του προβλήματος ,το ελατήριο περιέχεται στο απομονωμένο σύστημα .ΤΠ εργο των δυνάμεων F1 και F2 κατά το θεωρούμενο διάστημα αποτελεί τον όρο U της εξ.57, και οι μεταβολές της ελαστικής και βαρυτικής δυναμικής ενέργειας περιέχονται στην μεριά των ενεργειών της εξίσωσης .Σημειώνουμε οτι με τη πρώτη αντιμετώπιση το έργο της F=kx ,μπορεί να χρειαστεί μια κάπως περίεργη αλοκλήρωση λόγω των μεταβολών σε μέτρο και σε διεύθυνση της F ,καθώς το υ.σ. κινείται απο το Α στο Β .Με τη δεύτερη αντιμετώπιση ομως χρειάζονται μόνο το αρχικό και το τελικό μήκος του ελατηρίου για το υπολογισμό του ΔVe. [1]



[1]

Σχημα 27

3.5 Διατήρηση της ενέργειας και της ισχύς

Η εναλλακτική εξίσωση 57 έργου-ενέργειας ,μπορεί να ξανα γραφτεί και ως εξής για ένα σύστημα υ.σ. και ελατηρίου

U=Δ(T+Vg+Ve)=ΔE **(57 α)**

Οπου E =T+Vg+Ve είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του υ.σ. και του συνδεμένου με αυτό γραμμικού ελατηρίου .Η εξίσωση 57^{α} λέει οτι ,το έργο όλων των δυνάμεων στο σύστημα ,εκτός απο το έργο των βαρυτικών και ελαστικών δυνάμεων ,ισούται με τη μεταβολή της συνολικής μηχανικής ενέργειας του συστήματος .Οταν οι μόνες δυνάμεις που έχουμε είναι βαρυτικές ,ελαστικές ή συντηρητικές δυνάμεις τότε ο όρος U θα είναι μηδέν και η εξίσωση της ενέργειας γίνεται

ΔΕ=0 **ή** **Ε=σταθ.** **(58)**

Οταν E είναι σταθερό ,φαίνεται οτι μεταφορές ενέργειας μεταξύ κινητικής και δυναμικής μπορούν να γίνουν εφόσον η συνολική μηχανική ενέργεια T +Vg+Ve δεν αλλάζει .Η εξίσωση 58 εκφράζει το ‘’νόμο της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ‘’

Ισχύς .Η ικανότητα μιας μηχανής υπολογίζεται με την ισχύ της ,που είναι ο χρονικός ρυθμός παραγωγής έργου .Δηλαδή αν U το έργο μια δύναμης $\vec{F}$,τοτε η ισχύς της δύναμης αυτής είναι

$$\mathbf{P=\dot{U}=F\dot{r}=Fv} \qquad \textbf{(59)}$$

Οπου $\dot{\vec{r}}=\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του σημείου εφαρμογής της δύναμης .Η ισχύς ενός ζεύγους $\vec{M}$ που εξασκείται σε ενα σώμα που έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι

$$\mathbf{P=\dot{U}=M\omega} \qquad \textbf{(60)}$$

Η ισχύς ειναι προφανώς μονόμετρη ποσότητα και έχει μονάδες N m/s=J/s .Η μονάδα (j/s) λέγεται watt(w). [1]

3.6 Ορμή καί ώθηση

3.6.1 Εξισώσεις ορμής και ώθησης

Θεωρούμε τη γενική καμπυλόγραμμη κίνησης στο χώρο ενός υ.σ. μάζας m ,σχ,32, οπου το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}$ μετριέται απο μια σταθερή αρχή 0 .Η ταχύτητα του υ.σ.είναι $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$ και είναι εφαπτομένη στην τροχιά του (που φαίνεται στο σχήμα σα διακεκομμένη γραμμή).Η συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ ολων των δυνάμεων πάνω στη m είναι κατά τη διεύθυνση της επιτάχυνσης της $\dot{\vec{v}}$.Η βασική εξίσωση της κίνησης για το υ.σ. ,εξ,44 μπορεί να γραφτεί

$$\mathbf{\Sigma F=m\dot{v}=\frac{d}{dt}(mv)} \qquad \textbf{ή} \qquad \mathbf{\Sigma F=\dot{G}} \qquad \textbf{(61)}$$

Οπου το γινόμενο της μάζας και της ταχύτητας είναι γνωστό σαν γραμμική ορμή $\vec{G}$=m$\vec{v}$ του υ.σ. Οι μονάδες της γραμμικής ορμής $\vec{G}$ είναι kg m/s . που είναι ισο με N s .Η εξίσωση 61 λεει οτι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που δρούν πάνω σε ενα υ.σ. είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής ως πρός το χρόνο της γραμμικής του ορμής Αφού η εξ.61 είναι διανυσματική εξίσωση ,εκτός απο την ισότητα των μέτρων της $\Sigma\vec{F}$ και της $\vec{G}$, η διεύθυνση της συνισταμένης συμπίπτει με τη διεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας .Η εξίσωση 61 είναι μια απο τις πιο χρήσιμες και σπουδαίες σχέσεις της δυναμικής ,και ισχύει εφόσον η μάζα m δεν αλλάζει με το χρόνο .Η περίπτωση που το m μεταβάλλεται με το χρόνο θα συζητηθεί αργότερα.Οι τρείς μονόμετρες συνιστώσες της εξ.61 μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\mathbf{\Sigma Fx=\dot{G}x} \qquad \mathbf{\Sigma Fy=\dot{G}y} \qquad \mathbf{\Sigma Fz=\dot{G}z} \qquad \textbf{(62)}$$

Και μπορούν να εφαρμοστούν ανεξάρτητα η μια απο την αλλη .Η επιρροή της συνισταμένης δύναμης $\Sigma\vec{F}$ στη γραμμική ορμή του υ.σ. κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου μπορεί να βρεθεί ,αν ολοκληρώσουμε της εξ.61 απο το χρόνο t1 μέχρι το χρόνο t2 .Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με dt έχουμε $\Sigma\vec{F}$dt=d$\vec{G}$ και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma F dt = G2 - G1 \qquad \textbf{(63)}$$

Οπου η ταχύτητα στην $\vec{G}$ αλλάζει απο $\vec{v}1$ για χρόνο t1 σε $\vec{v}2$ για χρόνο t2 .Το γινόμενο της δύναμης και του χρόνου λέγεται γραμμική ώθηση και η εξ.63 λεει οτι : συνολική γραμμική ώθηση πάνω στη μάζα m είναι ίση με την αντίστοιχη μεταβολή της γραμμικής ορμής . [1]

Το ολοκλήρωμα της ώθησης ,στη γενική περίτωση ,είναι ενα ολοκλήρωμα που μπορεί να μεταβάλλεται και κατα μέτρο και κατά διεύθυνση ,κατα τη διάρκεια ενός χρονικού διαστύματος .Κάτω απο αυτές τις προυποθέσεις είναι απαραίτητο να εκφράσουμε τα $\Sigma\vec{F}$ και $\vec{G}$ υπο μορφή συνιστωσών και μετά να συνδιάσουμε τις ολοκληρωμένες συνιστώσες .Ετσι η ως προς χ συνιστώσα της εξ.63 γίνεται η μονόμετρη εξίσωση

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma Fx dt = (mux)2 - (mux)1 \qquad \textbf{(64)}$$

Το ίδιο γίνεται για τις ως πρός y και z συνιστώσες . [1]

Εκτός απο τις εξισώσεις της γραμμικής ώθησης και της γραμμικής ορμής ,υπάρχει αλλη μια ομάδα εξισώσεων γωνιακής ώθησης και γωνιακής ορμής (στροφορμής).Η ροπή $\Sigma\vec{M}$ο ως πρός ενα σταθερό σημείο Ο όλων των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στην m στο σχ.31 ειναι

$$\Sigma Mo = r \times \Sigma F = r \times m\dot{v}$$

Ομως $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$ αφου $\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}=0$.Αρα η εξισωση των ροπων γινεται

$$\Sigma\mu o = \frac{d}{dt}(r \times mv) \quad \eta \qquad \Sigma\mu o = \dot{H}o \qquad \textbf{(65)}$$

Οπου η ροπή της γραμμικής ορμής της m λέγεται γωνιακή ορμή $\vec{H}o = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{G}$.Η εξίσωση 65 λέει οτι η ροπή ως πρός ενα σταθερό σημείο ο ολων των δυνάμεων που δρούν πάνω στην m,είναι ίση με το χρονικό ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ορμής γύρο απο το Ο.Η σχέση αυτή ,είδικα αν επεκταθεί σε ενα σύστημα υ.σ. απόλυτα στερεό ή οχι ,είναι ένα απο τα πιο δυνατά εργαλεία της ανάλυσης σε όλη τη δυναμική . [1]

Οι μονάδες της γωνιακής ορμής είναι kg m^2/s που είναι ισο με N m s .Η εξίσωση 65 ειναι μια διανυσματική εξίσωση με μονόμετρες συντετάγμενες

$$\mathbf{\Sigma Mox}=\dot{H}\mathbf{oz} \qquad \mathbf{\Sigma Moy}=\dot{H}\mathbf{oy} \qquad \mathbf{\Sigma Moz}=\dot{H}\mathbf{oz} \qquad \mathbf{(66)}$$

Οι μονόμετρες συνιστώσες της γωνιακής ορμής μπορούν να ληφθούν απο τη σχέση

Ho=r×mv=im(uzy-uyz)+jm(uxz-uzx)+km(uyx-uxy)

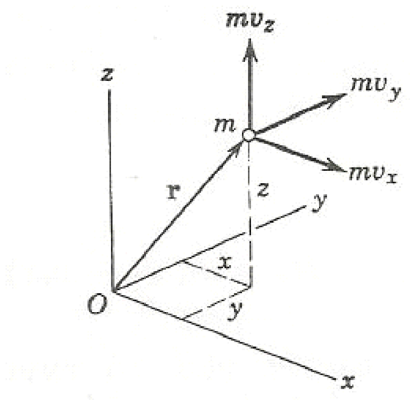
η

$$\mathbf{Ho= m} \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{ux} & \boldsymbol{uy} & \boldsymbol{uz} \end{matrix} \qquad \mathbf{(67)}$$

Ετσι ώστε

Hx=m(uzy-uyz), Hy=m(uxz-uzx) Hz=m(uyx-uxy)

Κάθε μια απο τις εκφράσεις αυτές για τη γωνιακή ορμή μπορεί να ελεχθεί εύκολα πο το σχ.32,που δείχνει τις τρεις συνιστώσες της γραμμικής ορμής ,παίρνοντας τις ροπές των συνιστωσών αυτών ως πρός τους άξονες αναφοράς . [1]



[1]

Σχημα 28

Για να βρούμε την επιρροή της ροπής $\Sigma\vec{M}$o πάνω στη στροφορμή ενος υ.σ. για μια ορισμένη περίοδο ,μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξ365 και χρόνο t1 μέχρι χρόνο t2 .Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση επι dt έχουμε Σ$\vec{M}$dt=d$\vec{H}$o, την οποία ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int_{t1}^{t2} \boldsymbol{\Sigma Mo\ dHo2 - Ho1} \qquad \textbf{(68)}$$

Οπου $\vec{H}$o2=$\vec{r}$2×m$\vec{v}$2 και $\vec{H}$o1=$\overrightarrow{r1}$ ×m$\vec{v}$1.Το γινόμενο της ροπής και του χρόνου λέγεται γωνιακή ώθηση και η εξίσωση 68 λέει οτι η συνολική γωνιακή ώθηση της m είναι ίση με την αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής . [1]

Οπως στην περίπτωση της γραμμικής ορμής και της γραμμικής ώθησης ,η εξίσωση της γωνιακής ώθησης και της γωνιακής ορμής είναι διανυσματική δηλαδή μπορούν να μεταβληθούν και η διεύθυνση και το μέγεθος κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος της ολοκλήρωσης .Κάτω απο αυτές τις προυποθέσεις είναι απαραίτητο να εκφράσουμε τα Σ$\vec{M}$o και $\vec{H}$o υπο μορφή συνιστωσών και μετά να συνδιάσουμε τις ολοκληρωμένες συνιστώσες .Ετσι η ως πρός x συνιστώσα της εξ.68 γίνεται

$\int_{t1}^{t2} \Sigma Moxdt$=(Hox)2-(Hox)1 =m[(uzy-uyz)2-(uzy-uyz)1]

Οπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στις τιμές των αντίστοιχν ποσοτήτων στούς χρόνους t1 και t2.Παρόμοιες εκφράσεις υπάρχουν και για τις συνιστώσες ως πρός y και z του ολοκληρώματος της στροφορμής .Οι εξισώσεις 61 και 65 δεν προσθέτουν ως βασικές πληροφορίες αφού είναι απλώς εναλλακτικές μορφές του δεύτερου νόμου του Newton . [1]

3.7 Διατήρηση της ορμής

Αν η συνισταμένη δύναμη πάνω σε ενα υ.σ. είναι μηδέν κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος ,η εξ.61 απαιτεί οτι η γραμμική του ορμή $\vec{G}$ παραμένει σταθερή .Ομοια αν η συνισταμένη ορμή γύρω απο ενα σταθερό σημείο O όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στο υ.σ. είναι μηδέν κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος ,η εξ,65 απαιτεί οτι η γωνιακή του ορμή (στροφορμή) $\vec{H}$o γύρω απο αυτό το σημείο παραμένει σταθερή .Στην περίπτωση αυτή λέμε οτι η γραμμική ορμή του υ.σ. διατηρείται στη δεύτερη περίπτωση λέμε οτι η στροφορμή του .Η γραμμική ορμή μπορεί να διατηρείται κατά μια διεύθυνση ,ας πούμε κατά τον άξονα χ,αλλά όχι απαραίτητα κατά τις διευθύνσεις y και z .Επίσης η στροφορμή μπορεί να διατηρείται γύρω απο ενα άξονα και όχι γύρω απο έναν άλλο . [1]

Θεωρούμε τώρα την κίνηση δύο υ.σ. μάζας ma και mb που κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}$ a καί $\vec{v}$b .Αν τα υ.σ αλληλοεπηρεάζονται κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος t καί αν οι δυνάμεις $\overrightarrow{F}$ καί -$\vec{F}$ που εξασκούνται πάνω στα υ.σ. κατά τη διάρκεια του συστήματος αυτού ,τοτέ η εξ.63 μπορεί να γραφτεί για κάθε υ.σ. ως εξής

$$\int_0^t \boldsymbol{F}dt = \mathbf{ma\Delta va} \qquad \textbf{καί} \qquad \int_0^t -\boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{mb\Delta vb}$$

όπου $\Delta\vec{v}$a καί $\Delta\vec{v}$b είναι διανυσματικές μεταβολές των σχετικών ταχυτήτων των μαζών ma καί mb κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης .Τα ολοκληρώματα της ώθησης διαφέρουν μόνο κατά το πρόσημο ,έτσι ώστε ma$\Delta\vec{v}$a=-mb$\Delta\vec{v}$b.Ετσι Δ(ma$\vec{v}$a)+Δ(mb$\vec{v}$b)= $\vec{0}$

$$\mathbf{\Delta G=0} \qquad \mathbf{(69)}$$

όπου η συνολική γραμμική ορμή του συστήματος των δυο υ.σ. είναι $\vec{G}$=$\vec{G}$a+$\vec{G}$b=ma$\vec{v}$a+mb$\vec{v}$b .Η εξίσωση λέει οτι η γραμμική ορμή του συστήματος παραμένει αμετάβλητη κατά τη διάρκεια ενος χρονικού διαστήματος ,αν δεν εξασκούνται στο σύστημα εξωτερικές δυνάμεις .Η πρόταση αυτή αποτελεί την αρχή της διατήρησης της γραμμικής ορμής .Η αρχή μπορεί να εφαρμοστεί και μόνο σε μια διεύθυνση ,π.χ. τη διεύθυνση χ ,αν δεν εξασκούνται στο σύστημα εξωτερικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση αυτή .Η αρχή αυτή μπορεί να επεκταθεί για να καλύψει την κίνηση ενός συστήματος που περιέχει οποιονδήποτε αριθμό αλληλεπιδρώντων υ.σ.,οπου όλες οι δυνάμεις που εξασκούνται στο υ.σ. είναι δράσεις και αντιδράσεις εσωτερικές του συστήματος . [1]

Ανάλογο συμπέρασμα με την εξ.69 βγαίνει και για τη στροφορμή αλληλεπιδρώντων υ.σ. Οι ροπές γύρω απο το σταθερό σημείο 0 των δυνάμεων $\vec{F}$ και -$\vec{F}$ προστιθέμενες δίνουν άθροισμα μηδέν ,και αφού δέν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα , η εξ.68 δίνει για κάθε ένα απο τα υ.σ. $\Delta\vec{H}$oa=-$\Delta\vec{H}$ob ή

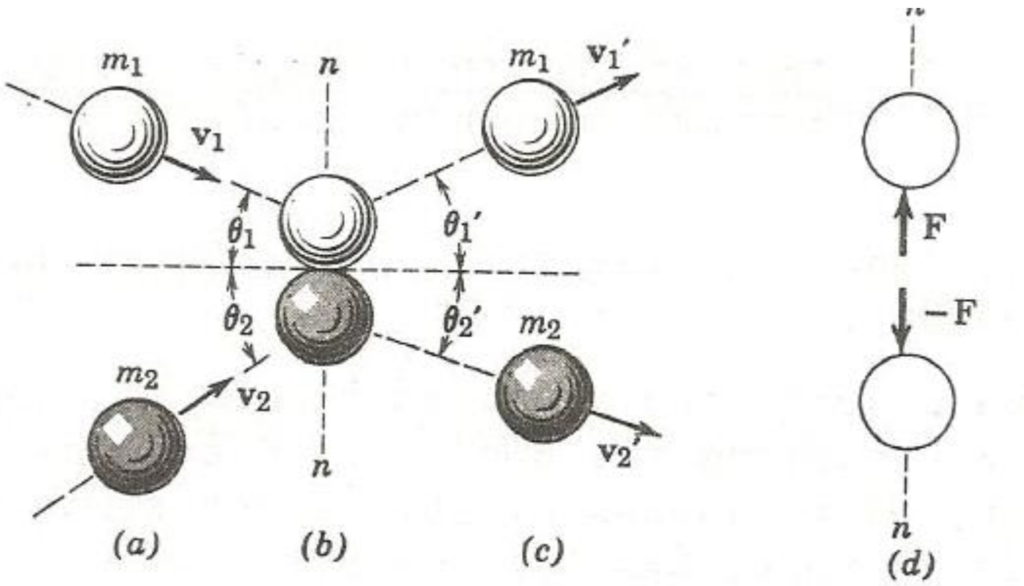
$$\mathbf{\Delta Ho=0} \qquad \mathbf{(70)}$$

όπου η συνολική στροφόρμη του συστήματος των δυο υ.σ. είναι $\vec{H}$o=$\vec{H}oa$+$\vec{H}$ob. Η εξ.70 λέει οτι η στροφορμή του συστήματος γύρω απο ενα χρονικό σημείο 0 παραμένει αμετάβλητη κατά τη διάρκεια ενος χρονικού διαστήματος αν δεν υπάρχουν ροπές γύρω απο το 0 ,οφείλομενες σε εξωτερικές δυνάμεις .Η πρόταση αυτή αποτελεί την αρχή της διατήρησης της στροφορμής .Η αρχή μπορεί να επεκταθεί για να καλύψει την κίνηση ενός συστήματος υ.σ. οπου όλες οι δυνάμεις που έχουν ροπές γύρω απο το 0,είναι δράσεις και αντιδράσεις εσωτερικές του συστήματος .

3.8 Κρουση

Οι αρχές της ώθησης και της ορμής βρίσκουν μια σπουδαία εφαρμογή στην περιγραφή της συμπεριφοράς των σωμάτων σε κρούση .Κρούση λέγεται η σύγκρουση μεταξύ δυο σωμάτων και χαρακτηρίζεται απο την δημιουργία σχετικά μεγάλων δυνάμεων επαφής που εξασκούνται για ενα πολύ μικρό χρονικό διάστημα .Η θεωρία της κρούσης ηταν πολύ δύσκολο να αποδειχτεί πειραματικά ,γιατί τα πολύ μικρά χρονικά διαστήματα ηταν ακατάλληλα για μετρήσεις .Παρόλα αυτά, με την πρόοδο της τεχνικής ,έχουν ληφθεί πολλές πληροφορίες για τα προβλήματα της κρούσης . [1]

Θεωρείστε τα δυο υ.σ.1 και 2 μάζας m1 και m2 ,σχ29α που κινούνται στο ίδιο επίπεδο και πλησιάζουν το άλλο με ταχύτητες $\vec{v}1$ και $\vec{v}2$ όπως φαίνεται στο σχήμα .



Σχημα 29

Οι διευθύνσεις των ταχυτήτων μετριούνται εδώ απο την διεύθυνση της εφαπτομένης στις επιφάνειες επαφής κατά την κρούση .Οι θέσεις των υ.σ. κατά τη διάρκεια της επαφής φαίνονται στο σχ.29b .Κατά τη διάρκεια αυτού του πολύ μικρού χρονικού διαστήματος ,η επιφάνεια επαφής μεγαλώνει γρήγορα ,καθώς μεγαλώνει η παραμόρφωση ,και μετά μειώνεται ως το μηδέν .Οι τελικές συνθήκες φαίνονται στο σχ.29.c Αν $\vec{F}$ είναι η δύναμη επαφής κάτα τη διεύθυνση n-n στο υ.σ.1 οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της επαφής σχ.29d, τότε η δύναμη στο υ.σ.2 είναι -$\vec{F}$.Απο την αρχή της διατήρησης της γραμμικής ορμής εξ.69 ,έπεται οτι η συνολική γραμμική ορμή του συστήματος των δυο υ.σ. παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης ,είναι σχετικά μικρές και παράγουν αμελητέες ωθήσεις αν συγκριθούν με τις ωθήσεις των δυνάμεων κρούσης που γενικά είναι πολύ μεγάλες . [1]

Για να βρούμε τις τελικές ταχύτητες μετά την κρούση και τις διευθύνσεις τους χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της ορμής κατά τη διεύθυνση N ,για τα δυο υ.σ. μαζί ,οπότε έχουμε

$$-m1u1\sin\Theta1+m2u2\sin\theta2=m1u1'\sin\theta1'+m2u2'+\sin\theta2'$$

Για δοσμένες μάζες και αρχικές τιμές των u1,u2,θ1 kai θ2 ,η εξίσωση έχει σαν αγνώστους u1',u2'θ1' και θ2' .Μπορούμε να γράψουμε δυο εξισώσεις για τη διεύθυνση t ,αφου χωρις ορμή κατα τη διεύθυνση t,καθε υ.σ. δεν έχει μεταβολή ταχύτητας κατά τη διεύθυνση αυτή. Αρα

$$u1\cos\theta1=u1'\cos u1' \quad \text{και} \quad u2\cos\theta2=u2'\cos u2'$$

Η τέταρτη σχέση εξαρτάται απο το σχήμα και τις ιδιότητες της υλης των συγκρουόμενων σωμάτων .Ο συνδιασμός των επιρροών αυτων ορίστηκε σαν '' συντελεστής αποκατάστασης e'' ,που ειναι ο λόγος της ώθησης κατά τη περίοδο της αποκατάστασης προς την ώθηση κατά την περίοδο της παραμόρφωσης .ΑνFr και Fd είναι οι δυνάμεις επαφής κατά τις δυο αυτές περιόδους αντίστοιχα ,και αν uo είναι η κοινή συνιστώσα της ταχύτητας των δυο υ.σ. κατά τη διεύθυνση n,κατά τη στιγμή της μετάβασης απο την παραμόρφωση στην αποκατάσταση,τότε οι εξισώσεις ώθησης – ορμής για το σώμα 1 δίνουν

$$e=\frac{\int_{t1}^{t} \mathrm{Frdt}}{\int_{0}^{t1} \mathrm{Fddt}}=\frac{m1(u1'\sin\Theta1'-uo)}{m1(u0+u1\sin\theta1)}$$

οπου t1 είναι ο χρόνος που χρειάζεται για την παραμόρφωση ,t είναι ο συνολικός χρόνος επαφής και οι μεταβολές της ταχύτητας θεωρούνται θετικές κατά τη διεύθυνση της δύναμης επαφής στο υ.σ.

Μια παρόμοια εξίσωση για το υ.σ. 2 δίνει

$$e=\frac{m2(u2'\sin\theta2'-vo)}{m2(-uo+u2\sin\theta2)}$$

Απαλείφοντας το uo μεταξύ των δυο εξισώσεων και λύνοντας ως πρός e έχουμε

$$e=\frac{u1' sin\theta 1' + u2' sin\theta 2'}{u1 sin\theta 1 + u2 sin\theta 2}$$

ή πιο απλά ,ο συντελεστής αποκατάστασης μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$e=\frac{\text{σχετικη ταχυτητα απομακρυνσης}}{\text{σχετικη ταχυτητα προσεγγισης}}$$

όπου οι συνιστώσες της ταχύτητας μετριούνται κατά τη διεύθυνση των δυνάμεων κρούσης . [1]

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία της κρούσης η τιμή e=1 σημαίνει οτι η ικανότητα των δυο υ.σ. να επανέρχονται είναι ίση με την τάση τους να παραμορφώνονται .Η περίπτωση αυτή ειναι της ΄΄ελαστικής κρούσης΄΄ χωρίς απώλειες ενέργειας .Η τιμή e=0 ,απο την άλλη μεριά περιγράφει ΄΄ανελαστική ΄΄ ή ΄΄πλαστική κρούση ΄΄ οπου τα υ.σ. ενώνονται μετά τη σύγκρουση και η απώλεια της ενέργειας είναι μέγιστη .Ολες οι περιπτώσεις κρούσης βρίσκονται κάπου μεταξύ των δυο αυτών άκρων .Πρέπει ακόμα να σημειωθεί οτι ο συντελεστής αποκατάστασης πρέπει να συνδέεται με ενα ζεύγος συγκρουόμενων σωμάτων . [1]

Ο συντελεστής αποκατάστασης θεωρείται συχνά σα μια σταθερά για μια δοσμένη γεωμετρία ή ενα δοσμένο συνδυασμό υλικών σε επαφή .Πρός τη μονάδα καθώς η ταχύτητα κρούσης τείνει πρός το μηδέν .Είναι αδύνατο να βρούμε μια τιμή του e για κάθε περίπτωση κρούσης .Η κρούση είναι ενα σύνθετο φαινόμενο που περιλαμβάνει απώλεια της αρχικής ενέργειας μέσα απο την παραγωγή θερμότητας στο σημείο επαφής ,την παραγωγή εσωτερικών ελαστικών κυμάτων μεταξύ των σωμάτων και την παραγωγή ηχητικής ενέργειας . [1]

Οι καταστάσεις που περιγράφτηκαν στο σχ.33 παρουσιάζουν την πλάγια κρούση .Οταν οι ταχύτητες ειναι συγγραμικές ,η κρούση λέγεται κεντρική ,και ολες οι γωνίες στο σχήμα ειναι 90^o . [1]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

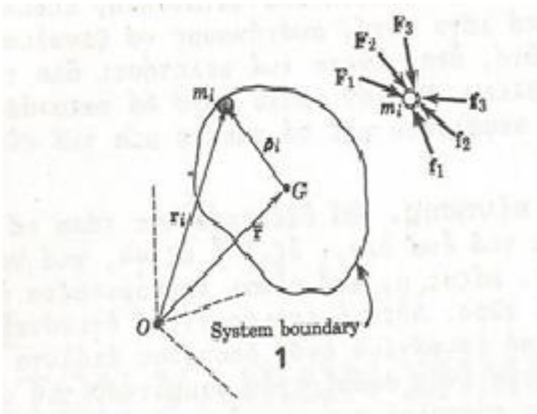
4.1 Εισαγωγή

Το επόμενο σκαλοπάτι στην ανάπτυξη της δυναμικής είναι να επεκτείνουμε τις αρχές αυτές για την κίνηση ενός υ.σ.,και να περιγράψουμε την κίνηση ενος συστήματος υ.σ. Η επέκταση αυτή προυποθέτει μια ενότητα στα υπόλοιπα τμήματα της δυναμικής .Απόλυτα στερεό σώμα είναι ενα στερεό σύστημα υ.σ. οπου οι αποστάσεις μεταξύ των υ.σ. παραμένουν σταθερές .Οι κινήσεις των μηχανών ,των οχημάτων εδάφους και αέρα ,των πυραύλων και των διαστημόπλοιων και αλλων κινούμενων κατασκευών είναι παραδείγματα προβλημάτων απόλυτα στερεών σωμάτων .Απο την άλλη μεριά ,ένα όχι απόλυτα στερεό σώμα,μπορεί να είναι ενα στερεό σώμα στο οποίο το αντικείμενο της έρευνας είναι η χρονική εξάρτηση των μεταβολών σε σχήμα,που οφείλεται σε ελαστικές ή μη ελαστικές παραμορφώσεις .Ακόμα σαν μη απόλυτα στερεό σώμα μπορούμε να ορίσουμε μια υγρή ή αέρια μάζα υ.σ. που έχουν ρυθμό ροής εξαρτόμενο απο τον χρόνο .Παραδείγματα είναι η ροή του αέρα και των καυσίμων μέσα απο την τουρμπίνα της μηχανής ενός αεροπλάνου ,τα καυσαέρια που βγαίνουν απο την εξάτμιση ενος πυραυλοκινητήρα ή το νερό που περνάει απο μια περιστροφική αντλία . [1]

Αν και η επέκταση των εξισώσεων για την κίνηση ενός υ.σ. σε ενα γενικό σύστημα υ.σ. ,γίνεται χωρίς πολυ κόπο ,δεν μπορούμε να περιμένουμε οτι η πλήρης γενικότητα και σημασία αυτών των εκτεταμένων αρχών μπορεί να γίνει ικανοποιητικά κατανοητή . [1]

Εξισώσεις της κίνησης.Θα επεκταθούμε στον δεύτερο νόμο της κίνησης του Newton για ενα υ.σ. ., εξ.1 η εξ44 ,για να καλύψουμε ενα γενικό σύστημα υ.σ. μάζας N που είναι περιορισμένα απο μια κλειστή επιφάνεια μέσα στο χώρο Αυτή η περιοριστική επιφάνεια μπορεί π.χ. να είναι η εξωτερική επιφάνεια ενος δοσμένου απόλυτα στερεού σωματος ή η συνοριακή επιφάνεια ενός αυθαίρετου κομματιού του σώματος ή η εξωτερική επιφάνεια ενός πυραύλου που περιέχει απόλυτα στερεά σώματα και κινούμενα υ.σ. ή ένας ορισμένος όγκος υγρών υ.σ. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα που εξετάζουμε είναι η μάζα μέσα στην κλειστή επιφάνεια και η μάζα αυτή πρέπει να ορίζεται και να απομονώνεται καθαρά. [1]

Το σχ30 δείχνει ενα αντιπροσωπευτικό υ.σ. μάζας mi του απομονωμένου συστήματος ,τις δυνάμεις $\vec{F}1, \vec{F}2, \vec{F}3$,…. Που δρούν πάνω στο mi απο πηγές εξωτερικές ως πρός την κλειστή επιφάνεια και τις δυνάμεις $\vec{f}1, \vec{f}2, \vec{f}3$…. , που δρούν πάνω στο mi απο πηγές εσωτερικές ως πρός την κλειστή επιφάνεια .



Σχημα 30

Οι εξωτερικές δυνάμεις οφείλονται στην επαφή με βαρυτικές ,ηλεκτρικές ή μαγνητικές δυνάμεις .Οι εσωτερικές δυνάμεις είναι δυνάμεις αντίδρασης με αλλα υ.σ. που έχουν μάζα ,μέσα στην κλειστή επιφάνεια .Το υ.σ. mi εντοπίζεται απο το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}$ που μετριέται απο ενα σταθερό Νευτόνειο σύστημα αξόνων ανφάς .Το κέντρο μάζας G του απομονωμένου συστήματος των υ.σ. εντοπίζεται απο το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$,το οποόο απο το θεώρημα του Varignon στην στατική ,δίνεται απο τη σχέση

$$\mathbf{m\bar{r}=\Sigma miri}$$

οπου η συνολική μάζα του συστήματος είναι m=Σmi. Το αθροιστικό γράμμα Σ υποννοεί οτι η άθροιση γίνεται πάνω σε όλα τα υ.σ. .n.

Αν εφαρμόσουμε με την εξ ,44 για την mi έχουμε

$$\mathbf{F1+F2+F3+….+f1+f2+f3+….mi\ddot{r}i}$$

Οπου$\ddot{\vec{r}}$ είναι η επιτάχυνση του mi.Μπορούμε να γράψουμε παρόμειες εξισώσεις για κάθε ενα απο τα υ.σ. του συστήματος .Αν προσθέσουμε ολες αυτές τις εξισώσεις για ολα τα υ.σ. του συστήματος ,θα έχουμε

$$\mathbf{\Sigma F+\Sigma f=\Sigma mi\ddot{r}i}$$

Ο ορός $\Sigma\vec{F}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που εξασκούνται σε ολα τα υ.σ. του απομονωμένου συστήματος απο πηγές εξωτερικές ως πρός το σύστημα και ο όρος $\Sigma\vec{f}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα ολων των δυνάμεων που εξασκούνται σε ολα τα υ.σ. και οι οποίες παράγονται απο τις εσωτερικές δράσεις και αντιδράσεις μεταξύ των υ.σ. Το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με το μηδέν ,αφού όλες οι εσωτερικές δυνάμεις υπάρχουν κατά ζεύγη ίσων και αντίθετων δράσεων και αντιδράσεων .Διαχωρίζοντας δυο φορές ως προς το χρόνο την εξίσωση που ορίζει το $\bar{\vec{r}}$ έχουμε m$\ddot{\bar{\vec{r}}}$=Σmi$\ddot{\vec{r}}$I,όπου η μάζα δεν έχει παράγωγο ως προς το χρόνο ,εφόσον δεν μπαίνει ούτε βγαίνει μάζα απο το σύστημα . [1]

Αντικαθιστώντας στο άθροισμα των εξησώσεων κίνησης έχουμε

Σf=m$\ddot{\bar{\vec{r}}}$ η ΣF =m$\bar{a}$ (92)

Οπου $\vec{\bar{a}}$ είναι η επιτάχυνση $\ddot{\bar{\vec{r}}}$ του κέντρου μάζας του συστήματος .

Η εξ.92 είναι ο γενικευμένος δεύτερος νόμος του Newton ,για την κίνηση ενος συστήματος μάζας και συχνά τον ονομάζουμε ΄΄εξίσωση της κίνησης της m΄΄ .Η εξίσωση αυτή λέει οτι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων σε οποιαδήποτε συστήματα μάζας ειναι ίση με τη συνολική μάζα του συστήματος επι την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του .Ο νόμος αυτός εκφράζει την ΄΄αρχή της κίνησης του κέντρου μάζας ΄΄ οπως λέμε .Πρέπει να παρατηρήσουμε οτι $\bar{\vec{a}}$ είναι η επιτάχυνση του μαθηματικού σημείου ,που αντιπροσωπεύει στιγμιαία τη θέση του κέντρου μάζας για τα δοσμένα υ.σ.Για νεα απόλυτα στερεό σώμα η επιτάχυνση αυτή ,είναι και η επιτάχυνση ενος ορισμένου υ.σ. που βρίσκεται τοποθετημένο στο κέντρο μάζας .Για ενα όχι απόλυτα στερεό σώμα ,η επιτάχυνση αυτή δεν είναι απαραίτητο να αντιπροσωπεύει την επιτάχυνση κάποιου ορισμένου υ.σ.Η εξ.92 ισχύει για κέθε χρονική στιγμή και είναι άρα μια στιγμιαία σχέση .Η εξ.92 για το σύστημα μάζας δεν πρέπει να συνάγεται αμέσως απο την εξ.44 για το ένα υ.σ. ,αλλα πρέπει να αποδεικνύεται .Η εξ.92 μπορεί να εκφραστεί και με η μορφή των συνιστωσών ,όπως στην εξ.92 α ,χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε συστήματα συντεταγμένων είναι βολικό για την κάθε περίπτωση

ΣFx=m$\bar{a}$x ΣFy=m$\bar{a}$y ΣFz=m$\bar{a}$z (92a)

Αν και η εξ.92 ,σαν διανυσματική εξίσωση ,απαιτεί να εχει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ της επιτάχυνσης την ίδια διεύθυνση με τη συνισταμένη εξωτερική δύναμη Σ$\vec{F}$,δεν έπεται οτι η Σ$\vec{F}$ πρέπει να περνά απαραίτητα απο το G .Γενικά ,στην πραγαμτικότητα η Σ$\vec{F}$ δεν περνάει απο το G

4.2 Εργο καί ενέργεια

Παρατηρούμε οτι η εξίσωση έργου –ενέργειας για το αντιπροσωπεύτικο υ.σ. μάζας mi είναι Ui=Δti.Εδω Ui είναι το έργο που γίνεται στο mi απο όλες τις δυνάμεις $\vec{F}$i= $\vec{F}$1+$\vec{F}$2+$\vec{F}$3+… που εφαρμόζονται απο πηγές εξωτερικές ως προς το σύστημα και απο όλες τις δυνάμεις $\vec{f}$i=$\vec{f}$1+$\vec{f}$+$\vec{f}$3+… εσωτερικές ως πρός το σύστημα .Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της mi είναι ΔTi=Δ(1/2miui^2),όπου ui είναι το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}$i=$\vec{r}$ι του υ.σ. [1]

U=ΔT

Οπου U=ΣUi, είναι το έργο όλων των δυνάμεων πάνω σε όλα τα υ.σ. και ΔT είναι η μεταβολή της συνολικής κινητικής ενέργειας T=ΣTi του συστήματος

Για ενα απόλυτα στερεό σώμα ή ενα σύστημα απόλυτα στερεών σωμάτων ,που είναι ενωμένα με ιδανικούς συνδέσμους στους οποίους δεν παράγεται

έργο απο τις εσωτερικές δυνάμεις ή ροπές στους συνδέσμους ,το έργο όλων των ζευγών των εσωτερικών δυνάμεων $\vec{f}$i και -$\vec{f}$i του συστήματος είναι μηδέν ,αφου τα σημεία εφαρμογής τους ,έχουν τις ίδιες συνιστώσες μετατοπίσεων κατά τη διεύθυνση των δυνάμεων .Για την περίπτωση αυτη ,U είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων. [1]

Για ενα όχι απόλυτα στερεό μηχανικό σύστημα ,που έχει ελαστικά μέλη ικανά να αποθηκεύουν ενέργεια ,ενα μέρος του έργου των εξωτερικών δυνάμεων πηγαίνει στη μεταβολή της εσωτερικής ελαστικής δυναμικής ενέργειας Ve.Ακόμα αν τα έργα των βαρυτικών δυνάμεων εξαιρεθούν απο τον όρο του Vg ,η εξίσωση έργου –ενέργειας για ενα όχι απόλυτα στερεό μηχανικό σύστημα ,μπορεί να γραφτεί

U=ΔT+ΔVg+ΔVe

Αν δεν παράγεται (καταναλώνεται) έργο στο σύστημα ,η μηχανική του ενέργεια E=T+Ve+Vg παραμένει σταθερή . [1]

Μια λεπτομερέστατη ανάλυση στις σχέσεις έργου –ενέργειας ,ξεκαθαρίζει περισσότερο την κίνηση ενος γενικού συστήματος μάζας .Το συνολικό έργο mi μπορεί να γραφτεί Ui=$\int(\vec{F}i + \vec{f}i)d\vec{r}$i οπου d$\vec{r}$I είναι η απειροστή μετακίνηση του mi.Το συνολικό έργο στο σύστημα απο τις εξωτερικές και τις εσωτερικές δυνάμεις είναι κατά συνέπεια

U=ΣUi=Σ$\int(Fi + fi)dri$=Σ$\int(Fi + fi)(dr$+dρi)=Σ$\int(Fi + fi)dr$+$\int(Fi + fi)d\rho i$

Οπου το διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}$I του mi ως πρός το G ,απο το σχήμα 41 έχει μπει απο την αντικατάσταση $\vec{r}$i=$\vec{\bar{r}}$+$\vec{\rho}$i .Στο πρώτο άθροισμα το d$\vec{r}$ είναι κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους και η έκφραση αυτή μπορεί να γραφτεί Σ$\int(\vec{F}i + \vec{f}i)d\vec{r}$=$\int\{(\Sigma\vec{F}i) + (\Sigma\vec{f}i)\}$ d$\vec{r}$.Το διανυσματικό άθροισμα Σ$\vec{F}$i όλων των εξωτερικών δυνάμεων που εξασκούνται στο σύστημα γράφεται απλά Σ$\vec{F}$, και το διανυσματικό άθροισμα Σ$\vec{f}$I ολων των εσωτερικών δυνάμεων που εξασκούνται πάνω σε όλα τα υ.σ. είναι απαραίτητα μηδέν ,αφου οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων .Αρα η έκφραση για το συνολικό έργο στο σύστημα γίνεται

$$U=\int \boldsymbol{\Sigma F}\, \boldsymbol{d\bar{r}}+\int \boldsymbol{\Sigma\{(Fi+fi)d\rho i\}}$$

Θα γράψουμε τώρα την κινητική ενέργεια για το σύστημα με τη βοήθεια της ταχύτητας $ui^2=\dot{\vec{r}}i+\dot{\vec{r}}i$ για το τετράγωνο της ταχύτητας του αντιπροσωπεύτικου υ.σ. Εχουμε

$$\mathbf{T=\Sigma Ti=\Sigma\frac{1}{2}mi\dot{r}i\ \dot{r}i==\Sigma\frac{1}{2}mi(\dot{r}+\dot{\rho})\ (\dot{r}+\dot{\rho}\iota)=\ \Sigma\frac{1}{2}mi\dot{r}\ \dot{r}+\dot{r}\ \Sigma mi\dot{\rho}\iota\dot{\rho}\iota}$$

Ομως $\dot{r}\ \dot{r}=u^{-2}$,το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας .Ακόμα $\Sigma mi\dot{\rho}i=d(\Sigma mi\vec{\rho}i)/dt=\vec{0}$ αφού $\Sigma mi\vec{\rho}i$ είναι απαραίτητα μήδεν ,με το $\vec{\rho}i$ μετρημένο απο το κέντρο μάζας G .Επίσης $\dot{\vec{\rho}}\iota\ \dot{\vec{\rho}}\iota=|\dot{\vec{\rho}}\iota\,|^2$ οπου $\dot{\vec{\rho}}\iota$ είναι η ταχύτητα του mi ως πρός το κέντρο μάζας G.Αρα η συνολική κινητική ενέργειας γίνεται

$$\mathbf{T=\frac{1}{2}m\bar{u}^2+\Sigma\frac{1}{2}mi|\dot{\rho}i|^2} \qquad \mathbf{(93)}$$

Η εξίσωση αυτή λέει οτι η συνολική κινητική ενέργεια ενος συστήματος μάζας ,είναι ιση με την ενέργεια μεταφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος σα συνόλου ,συν την ενέργεια που οφείλεται στην κίνηση όλων των υ.σ. σχετικά με το κέντρο μάζας .

Μπορούμε να γράψουμε τώρα την εξίσωση έργου ενέργειας για ενα γενικό σύστημα ,εξισώνοντας τις εκφράσεις για τα U και τα ΔT,οπότε έχουμε

$$\int \boldsymbol{\Sigma F\, d\bar{r}}+\int \boldsymbol{\Sigma\{Fi+fi\}d\rho i}=\mathbf{\Delta(\frac{1}{2}m\bar{u}^2)+\Delta(\Sigma\frac{1}{2}mi|\dot{\rho}i|^2)}$$

Οι αντίστοιχοι πρώτοι όροι στα δυο μέλη αυτής της εξίσωσης είναι ίσοι μεταξύ τους ,όπως φαίνεται αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της εξ.92 με το $d\bar{\vec{r}}$ και ολοκληρώσουμε .Το γιατί κάναμε αυτή την ενέργεια ,γίνεται φανερό οταν θυμηθούμε οτι $m\ddot{\vec{r}}\ d\vec{r}=d(1/2m\bar{u}^2)$.Αρα η πλήρης σχέση έργου-ενέργειας ,μπορεί να γραφτεί με τις δύο ανεξάρτητες εξισώσεις

$$\int \Sigma F\ d\bar{r}=\Delta(\frac{1}{2}m\bar{u}^2)$$

$$\int \boldsymbol{\Sigma\{(Fi+fi)d\rho i\}}=\mathbf{\Delta(\Sigma\frac{1}{2}mi|\dot{\rho}i|^2)} \qquad \mathbf{(94)}$$

Η πρώτη απο τις εξ.94 περιγράφει την κίνηση του κέντρου μάζας ,οπότε φαίνεται σα να περνάει απο το G η εξωτερική συνισταμένη δύναμη ,και η δεύτερη εξίσωση περιγράφει την κίνηση σχετικά με το κέντρο μάζας ,σα συνάρτηση του έργου των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων .Για ενα απόλυτα στερεό σώμα ή για ενα σύστημα τέτοιων σωμάτων ,που είναι ενωμένα με ιδανικούς συνδέσμους ,στους οποίους δεν παράγεται έργο απο τις εσωτερικές δυνάμεις ή ροπές των συνδέσμων ,το έργο όλων των ζευγαριών των εσωτερικών δυνάμεων που δρούν στο σύστημα είναι μηδέν αφου τα σημεία εφαρμογής τους εχουν ίδιες συνιστώσες μετατόπισης κατά τη διεύθυνση των δυνάμεων .Για την περίπτωση αυτή, η δεύτερη απο τις εξ.94 γίνεται . [1]

$$\int \Sigma Fi\, d\rho i = \Delta(\Sigma \tfrac{1}{2}\mathrm{mi}|\dot{\rho} i|^2)$$

4.3 Γραμμική και γωνιακή ορμή

Οι εξ.61 και 65 που παριστάνουν τις σχέσεις της γραμμικής και της γωνιακής ώθησης-ορμής για ενα υ.σ.,θα επεκταθούν τώρα για ενα γενικό σύστημα .Η γραμμική ορμή $\vec{G}$ του συστήματος ορίζεται σαν το διανυσματικό άθροισμα των γραμμικών ορμών όλων των υ.σ. Αρα.

$$\mathbf{G=\Sigma mivi} \qquad \mathbf{(95)}$$

Οπου $\vec{v}$i είναι η ταχύτητα και $\vec{r}$I του αντιπροσωπευτικού υ.σ. Η χρονική παράγωγος του $\vec{G}$ είναι $\dot{\vec{G}}$=Σmi$\vec{a}$I ,οπου η επιτάχυνση του αντιπροσωπευτικού υ.σ. είναι $\vec{a}$i=$\dot{\vec{v}}$i=$\ddot{\vec{r}}$I .Ομως ξέρουμε οτι η συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι ίση επίσης με Σmi$\vec{a}$I .αρα

$$\mathbf{\Sigma F=\dot{G}} \qquad \mathbf{(96)}$$

που έχει την ιδια μορφή με την εξ.61 για ένα υ.σ. Η εξ.96 λέει οτι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων οποιουδήποτε συστήματος μάζας ,είναι ιση με το ρυθμό μεταβολής της γραμμικής ορμής του συστήματος και είναι μια εναλλακτική μορφή του γενικευμένου νόμου της κίνησης εξ,92.Στην εξ.96 η συνολική μάζα διατηρήθηκε σταθερή κατά τη διάρκεια της παραγώγισης ως προς το χρόνο ,άρα η εξίσωση δεν εφαρμόζεται σε συστήματα ,των οποίων η μάζα μεταβάλλεται με το χρόνο . [1]

Η στροφορμή του συστήματος μάζας του σχ.41 γιαυτό απο ενα σταθερό σημείο Ο ορίζεται σαν το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των γραμμικών ορμών γύρο απο το Ο όλων των υ.σ. και είναι **Ho=Σ(ri×mivi).** [1]

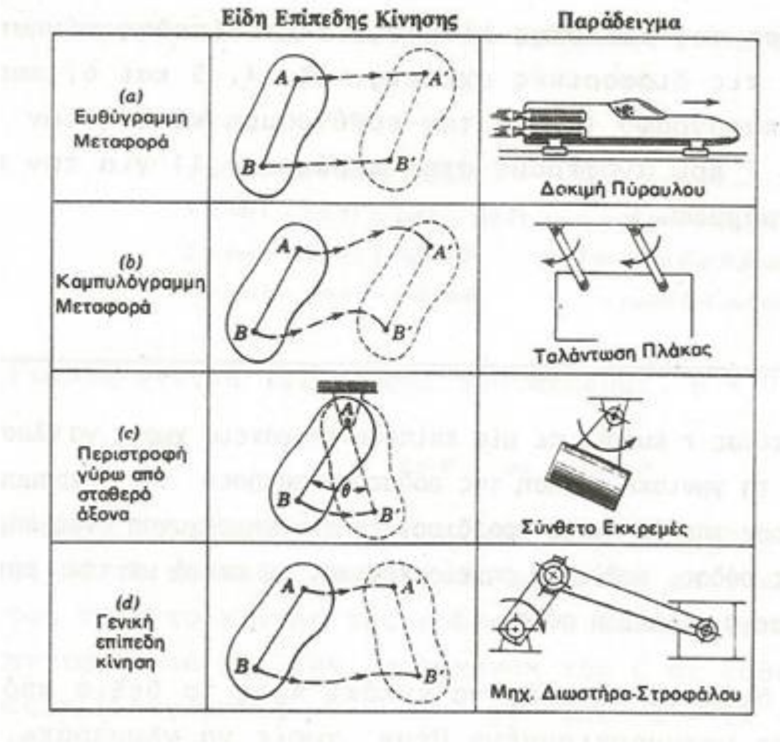
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΙΝΙΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

5.1 Εισαγωγή

Η περιγραφή της κίνησης των α.σ. σωμάτων είναι χρήσιμη για δύο λόγους .Πρώτα ,είναι συχνά απαραίτητο να δημιουργούμε ,να διαβιβάζουμε ή να ελένχουμε ορισμένες επιθυμητές κινήσεις με τη χρήση έκκεντρων ,οδοντωτών τροχών και συνδέσμων διαφόρων τύπων .Εδώ η περιγραφή της κίνησης είναι απαραίτητη για να προσδιορίσουμε τη σχεδιαστική γεωμετρία του μαθηματικού συνδέσμου .Σαν αποτέλεσμα της δημιουργούμενης κίνησης,αναπτύσονται συχνά δυνάμεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό του συνδέσμου .Δεύτερο είναι συχνά απαραίτητο να προσδιορίσουμε την κίνσηση ενος α.σ σώματος που είναι αποτέλεσμα των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω του .Ο υπολογισμός της τροχιάς ενός πυραύλου κάτω απο την επίδραση της αεριοώθησής του και της βαρυτικής έλξης ,είναι ενα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος .Και στις δυο περιπτώσεις είναι απαραίτητο να κατέχουμε τις αρχές της κινηματικής του α.σ.σ. πριν κάνουμε τον προσδιορισμό των δυνάμεων που ακολουθούν. [1]

Απόλυτα στερεό σώμα είναι ενα σύστημα υ.σ. για το οποίο οι αποστάσεις μεταξύ των υ.σ. παραμένουν αμετάβλητες .Αρα αν κάθε υ.σ. ενος τέτοιου σώματος ,εντοπίζεται απο άξονες αναφοράς συνδεμένου και περιστεφόμενους με το σώμα ,δεν υπάρχει μεταβολή σε κανένα διάνυσμα θέσης που μετριέται σε αυτούς τους άξονες .Βέβαια αυτο που λέμε είναι η ιδανική περίπτωση ,αφού όλα τα στερεά υλικά αλλάζουν σχήμα μέχρι ένα ορισμένο σημείο ,όταν πάνω τους εξασκηθούν δυνάμεις .Ομως αν οι κινήσεις που συνδέονται με τις μεταβολές του σχήματος είναι πολυ μικρές σε σύγκριση με τις συνολικές κινήσεις του σώματος σαν σύνολου ,τότε η ιδανική έννοια της απόλυτης στερεότητας είναι αποδεκτή .Οπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες παραγράφους ,οι μετατοπίσεις που οφείλονται στη δόνηση του φτερού ενός αεροπλάνου για παράδειγμα ,δεν έχουν σημασία στην περιγραφή της συνολικής τροχιάς πτήσης του αεροσκάφους ,για το οποίο η παραδοχή του α.σ. σώματος γίνεται δεκτή .Απο την άλλη μεριά ,αν το πρόβλημα ζητάει να περιγράψουμε την εσωτερική τάση στο φτερό που οφείλεται στη δόνηση του συναρτήσει του χρόνου ,τότε οι σχετικές κινήσεις των μερών του φτερού αποκτούν μεγάλη σημασία και δεν μπορούν να αμεληθούν. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το φτερό σαν α.σ. σώμα .



[1]

Σχημα 31

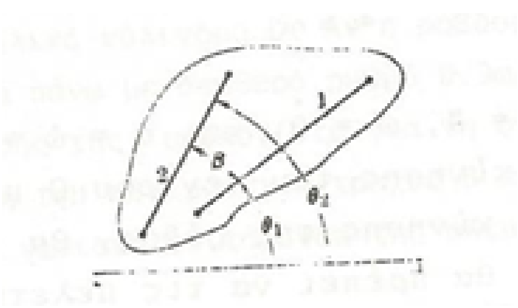
Η επίπεδη κίνηση ενός α.σ. σώματος μπορεί να διαιρεθεί σε διάφορες κατηγορίες όπως βλέπουμε στο σχ.31 .Η μεταφορά ορίζεται σαν οποιαδήποτε κίνηση ,στην οποία κάθε σταθερή γραμμή στο σώμα ,παραμένει με την αρχική της θέση σε όλες τις χρονκές στιγμές .Ευθύγραμμη μεταφορά (μερος α)είναι η μεταφορά στη οποία ολα τα σημεία του σώματος κινούνται σε ευθείες γραμμές .Καμπυλόγραμμη μεταφορά(,μερος β) είναι η μεταφορά στην οποία ολα τα σημεία κινούνται σε όμοιες καμπύλες .Στην καμπυλόγραμμη μεταφορά δεν γίνεται περιστροφή καμμιάς γραμμής του σώματος .Σημειώστε οτι σε κάθε περίπτωση μεταφοράς ,η κίνηση του σώματος καθορίζεται απόλυτα απο την κίνηση οποιουδήποτε σημείου του σώματος ,αφού ολα τα σημεία εκτελούν την ιδια κίνηση. [1]

Περιστροφή γύρω απο ένα σταθερό άξονα (μέρος γ),είναι η γωνιακή κίνηση γύρω απο τον άξονα .Συνεπάγεται οτι όλα τα υ.σ. κινούνατι σε κυκλικές τροχιές γύρω απο τον άξονα περιστροφής και όλες οι γραμμές του σώματος (συμπεριλαβάνοντας κι αυτες που δεν περνάνε από τον άξονα),περιστρέφονται υπο αυτή την γωνία στον ίδιο χρόνο . [1]

Γενική επίπεδη κίνηση ενός α.σ. σώματος μέρος δ, είναι ενας συνδιασμός μεταφοράς και περιστροφής . [1]

Σε κάθε ενα απο τα προηγούμενα παραδείγματα ,ολα τα υ.σ. του σώματος κινούνται σε παράλληλα επίπεδα .Η κίνηση όμως παριστάνεται απο την προβολή της πάνω σε ενα μόνο επίπεδο ,παράλληλο προς αυτήν ,που καλείται επίπεδο της κίνησης .Το επίπεδο αυτό συνήθως θεωρείται οτι περνάει απο το κέντρο μάζας του σώματος .

Θεωρούμε τώρα οτι η γωνιακή μετατόπιση ενος α.σ.σ σε επίπεδη κίνηση .Το σχ.31δείχνει ενα α.σ. σώμα που εκτελεί επίπεδη κίνηση στο επίπεδο του σχήματος .Οι γωνιακές θέσεις δυο οποιονδήποτε γραμμών 1 και 2 συνδεδεμένων με το σώμα ,καθορίζονται απο τις θ1 και θ2 που μετριούνται απο κάποια σταθερή διεύθυνση αναφοράς που να μας βολεύει .Αφού η γωνία β είναι αμετάβλητη η σχέση θ2=θ1+β δινει $\dot{\theta}2=\dot{\theta}1$ και $\ddot{\theta}2=\ddot{\theta}1$,η κατα τη διάρκεια ενός ορισμένου διαστήματος Δθ2=Δθ1 .Αρα όλες οι γραμμές σε ενα α.σ.σ. ,στο επίπεδο της κίνησής του ,έχουν την ίδια γωνιακή μετατόπιση ,την ιδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση .Σημειώστε οτι η γωνιακή κίνηση μιας γραμμής εξαρτάται μόνο απο τη γωνιακή της μετατόπιση αναφορικά με οποιαδήποτε σταθερό σύστημα και απο τις χρονικές παραγώγους της μετατόπισης .Η γωνιακή κίνηση δεν απαιτεί την παρουσία ενός σταθερού άξονα κάθετου στο επίπεδο της κίνησης ,γύρω απο τον οποίο να περιστρέφονται η γραμμή και το σώμα . [1]



[1]

Σχημα 32

Θεωρούμε οτι η γωνιακή μετόπιση ενός α.σ.σ. σε επίπεδη κίνηση .Το σχ.32 δείχνει ενα α.σ. σώμα που εκτελεί επίπεδη κίνηση στο επίπεδο του σχήματος Οι γωνιακές θέσεις δυο οποιονδήποτε γραμμών 1 και 2 συνδεδεμένων με το σώμα ,καθορίζονται απο τις θ1 και θ2 που μετριούνται απο κάποια σταθερή διεύθυνση αναφοράς που να μας βολεύει .Αφου η γωνία β είναι αμετάβλητη η σχέση θ2=θ1+β δινει $\dot{\theta}2=\dot{\theta}1$ και $\ddot{\theta}2=\ddot{\theta}1$,η κατά τη διάρκεια ενός ορισμένου διαστήματος Δθ2=Δθ1 .Αρα όλες οι γραμμές σε ένα α.σ. σώμα ,στο επίπεδο της κίνησης του έχουν την ιδια γωνιακή μετατόπιση ,την ιδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση .Σημειώνουμε οτι η γωνιακή κίνηση μιας γραμμής ,εξαρτάται μόνο απο τη γωνιακή της μετατόπιση αναφορικά με οποιοδήποτε σταθερό σύστημα και απο τις χρονικές παραγώγους της μετατόπισης .Η γωνιακή κίνηση δεν απαιτεί την παρουσία ενός σταθερού άξονα κάθετου στο επίπεδο της κίνησης ,γύρω απο τον οποιο να περιστρέφονται η γραμμή και το σώμα .Ο προσδιορισμός της επίπεδης κίνησης των α.σ. σωμάτων επιτυγχάνεται ή με άμεσο υπολογισμό των απόλυτων μετατοπίσεων και των χρονικών παραγώγων απο την απόλυτη γεωμετρία που έχουμε ,ή χρησιμοποιώντας τις αρχές της σχετικής κίνησης με μεταφερόμενους ή περιστρεφόμενους άξονες αναφοράς .Κάθε μέθοδος είναι σπουδαία και χρήσιμη και θα την αναπτύξουμε με τη σειρά της . [1]

5.2 Απόλυτη Κίνηση

Ο προσδιορισμός των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων ,γραμμικών και γωνιακών ,στην επίπεδη α.σ.σ. με άμεση παραγώγιση των εξισώσεων μετατοπίσεων ,είναι ένας ευθύς και άμεσος τρόπος .Η εκλογή αυτής της μεθόδου ,αντι της λύσης με τη μέθοδο της σχετικής κίνησης ,εξαρτάται κύρια απο τη σχετική απλότητα και γεωμετρία που έχουμε .Η εκλογή πάντως γίνεται καλύτερα οταν έχουμε αποκτήσει κάποια πείρα και με τις δυο μεθόδους . [1]

5.3 Σχετική κίνηση

5.3.1 Μεταφερόμενοι άξονες

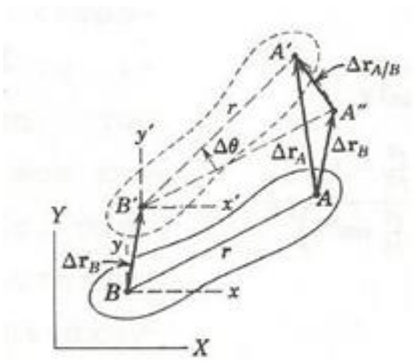
Αν δυο σημεία Α και Β είναι σταθερά σε ενα δοσμένο α.σ. σώμα στο επίπεδο της κίνησης τότε η απόσταση μεταξύ τους παραμένει σταθερή .Συνεπώς η κίνηση του ενός σημείου ,αν παρατηρείται απο ενα μεταφερόμενο σύστημα συντεταγμένων συνδεδεμένο με το άλλο φαίνεται να είναι κυκλική .Το γεγονός αυτό φαίνεται απο το σχ.44 όπου το α.σ σώμα ΑΒ κινείται στο Α'Β' .Η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί οτι γίνεται σε δυο μέρη .Πρώτα ,το σώμα μεταφέρεται στην παράλληλη θέση Α''Β' με τη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$Β.Έπειτα το σώμα περιστρέφεται γύρω απο το Β' κατά γωνία Δθ .Απο τους μη περιστρεφόμενους άξονες χ'-y' που είναι συνδεδεμένοι με το σημείο αναφοράς Β' ,φαίνεται οτι αυτή η δεύτερη κίνηση του σώματος ,είναι μια απλή περιστροφή γύρω απο το Β΄,που αυξάνει τη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$Α/Β του Α αναφορικά με το Β . [1]

Βλέπουμε οτι η συνολική μετατόπιση του Α είναι

$$\mathbf{\Delta rA=\Delta rB+\Delta rA/B}$$

Οπου το $|\Delta\vec{r}A/B|$μπορεί να αντικατασταθεί απο το r Δθ στο όριο καθώς το Δθ τείνει στο μηδέν .Σημειώνουμε οτι η σχετική γραμμή κίνησης $\Delta\vec{r}$Α/Β ακολουθείται απο την απόλυτη γωνιακή κίνηση Δθ ,όπως φαίνεται απο τους μεταφερόμενους άξονες χ'-y'.Διαιρώντας την έκφραση για το $\Delta\vec{r}$Α με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt,παίρνοντας το όριο και μετά παραγωγίζοντας πάλι ,έχουμε τις εξισώσεις της σχετικής ταχύτητας και της σχετικής επιτάχυνσης . [1]

$$\mathbf{vA=vB+VA/B} \qquad \mathbf{aA=aB+aA/B} \qquad \mathbf{(104)}$$



[1]

Σχημα 33

Οι εκφράσεις αυτές είναι ίδιες με τις εξ.19 και 20 με τον περιορισμό η απόσταση r μεταξύ των A και B να παραμένη σταθερή .

Η εφαρμογή των εξ.104 γίνεται ξεκάθαρη να προσέξουμε τις χωριστές συνιστώσες της μεταφοράς και της περιστροφής των εξισώσεων .Οι συνιστώσες αυτές φαίνονται στο σχ.33 ,όπου η ταχύτητα του A ,είναι το διανυσματικό άθροισμα της μεταφορικής ποσότητας $\vec{v}$B συν την περιστροφική ποσότητα $\vec{v}$A/B=$\vec{\omega} \times \vec{r}$, που έχει μέτρο uA/B =rω ,όπου $|\vec{\omega}|=\dot{\theta}$,που είναι η απόλυτη γωνιακή ταχύτητα του AB .Το γεγονός οτι η σχετική γραμμική ταχύτητα είναι πάντα κάθετη στη γραμμή που ενώνει τα δυο σημεία που εξετάζουμε ειναι πολύ χρήσιμο για την λύση πολλών προβλημάτων .

Στην περίπτωση της επιτάχυνσης ,σχ34b, ο όρος της σχετικής επιτάχυνσης είναι αυτός που βγαίνει απο την φαινόμενη κυκλική κίνησης του σημείου A ,απο μη περιστρεφόμενους άξονες συνδεδεμένους με το B .Αρα ο όρος της σχετικής επιτάχυνσης είναι

aA/B=(aA/B)n+(aA/B)t

οπου τα συνιστώντα διανύσματα είναι

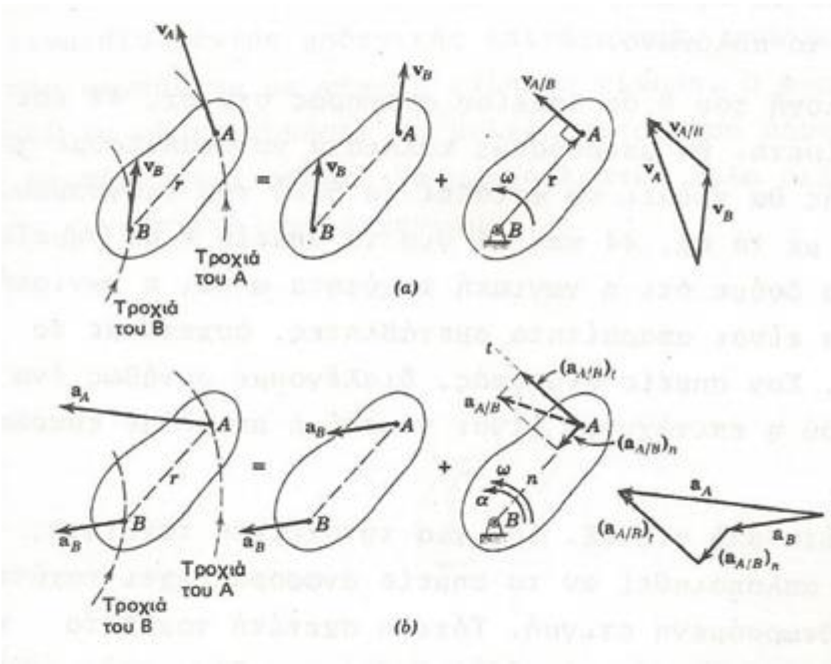
(aA/B)n=ω(ω× r)

Και

(aA/B)t=a×r

Με μέτρα (αA/B)n=rω^2=uA/B^2/r ως πρός το B (αA/B)t=ra που ευθύνεται κατά μήκος της εφαπτομένης στο τόξο του σχετικού κύκλου που δημιουργείται απο το A γύρω απο το B .Σημειώνουμε οτι η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}=\dot{\vec{\omega}}$ του AB είναι η απόλυτη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος . [1]

Ακόμα αφού η σχετική κάθετη επιτάχυνση αA/B)n στην εξίσωση της επιτάχυνσης ,περιέχει τη γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος ,συμπεραίνουμε οτι γενικά είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα πρώτα ,λύνοντας την εξίσωση της σχετικής ταχύτητας . [1]



[1]

Σχημα 34

Οι εξισώσεις 104 μπορούν να γραφούν εναλλακτικά συναρτήσει των ισοδυναμιών του εξωτερικού γινόμενου των όρων της σχετικής κίνησης ,ως εξής

$$\mathbf{vA}=\mathbf{vB}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad \textbf{και} \qquad \mathbf{aA}=\mathbf{aB}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{r})+\mathbf{a}\times \boldsymbol{r}$$

Σε πολλά προβλήματα ανάλυσης μηχανισμών ,βρίσκουμε χρήσιμη τη γραφική λύση .Και για τη γραφική αλλά και για την αλγεβρική λύση ,είναι σκόπιμο να προσέξουμε οτι μια διανυσματική εξίσωση δυο διαστάσεων ισοδυναμεί με δυο μονόμετρες εξισώσεις ετσι ώστε να μπορούμε να λύσουμε για δυο μονόμετρους άγνωστους σε ενα δισδιάστατο πρόβλημα .Για παράδειγμα ,οι γνωστοί μπορούν να είνα το μέτρο ενός διανύσματος και η διεύθυνση ενός άλλου .Αν οι εξισώσεις λυθούν γραφικά ,τα γνωστά διανύσματα πρέπει πρώτα να κατασκευαστούν και τα άγνωστα διανύσματα θα είναι οι πλευρές που κλείνουν πολύγωνο .

Η πρώτη απο τις εξ.104 για τη σχετική ταχύτητα ,μπορεί συχνά να απλοποιηθεί αν το σημείο αναφοράς εχει ταχύτητα μηδέν τη θεωρόμενη στιγμή .Τότε η σχετική ταχύτητα γίνεται απόλυτη ταχύτητα .Το σχ.34 δείχνει την θέση ενός σημείου C που έχει ταχύτητα μηδέν ,αφου εκπληρώνει τη συνθήκη οτι ενα στιγμιαίο σημείο γύρω απο το οποίο μπορεί να περιστραφεί στιγμιαία ενα σώμα ,είναι η τομή δυο ακτινικών γραμμών που είναι κάθετες στις ταχύτητες δυο σημείων .Το σημείο C είναι γνωστό σαν στιγμιαίο κέντρο ή πόλος μηδενικής ταχύτητας .Το τρίγωνο CAB μπορεί να θεωρηθεί σαν α.σ. επέκταση του σώματος AB,και άρα οι γραμμές CA,CB,AB και οποιαδήποτε άλλη γραμμή του σώματος στο επίπεδο της κίνησης ,έχουν την ιδια γωνιακή ταχύτητα ω=uA/rA=uB/rB. Θα πρέπει να κατασκευάσουμε τις σχέσεις που ισχύουν οταν το C είναι μεταξύ των A και B ,και οταν το C βρίσκεται στιν προέκταση της AB . [1]

Γενικά θα υπάρχει ενα νέο στιγμιαίο κέντρο C για κάθε νέα θέση του σώματος κατά τη διάρκεια της κίνησης . Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων αυτών στο χώρο ονομάζεται σταθερή πολική τροχιά και ο γεωμετρικός τόπος πάνω στο σώμα (ή στην προέκταση του) ονομάζεται κινητή πολικη τροχιά .Κατά τη διάρκεια της κίνησης η καμπύλη της κινητής πολικής τροχιάς φαίνεται να κυλάει πάνω στη σταθερή πολική τροχιά .Η απόλυτη ταχύτητα του σημείου ,του συνδεδεμένου με το σώμα ,που γίνεται ο στιγμιαίος πόλος μια ορισμένη στιγμή ειναι μήδεν τη στιγμή αυτή ,αλλά η επιτάχυνση του δεν είναι μηδέν .Αρα το στιγμιαίο κέντρο (πόλος)μηδενικής ταχύτητας ,αν θεωρηθεί συνδεδεμένο με το σώμα ,δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν στιγμιαίο κέντρο μηδένικης επιτάχυνσης ,με ανάλογο τρόπο όπως για την εύρεση ταχύτητας . [1]

Στιγμιαίο κέντρο μηδενικής επιτάχυνσης ,υπάρχει για σώματα που κινούνται με γενική επίπεδη κίνηση. [1]

Είναι φανερό οτι στο διάγραμμα του σχ.34 ,οτι αν προσδιορίσουμε το στιγμιαίο πολο C και τη γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος ,μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τη διεύθυνση της ταχύτητας οποιουδήποτε σημείου του σώματος ,αφού πρέπει να είναι κάθετη με την ευθεία που ενώνει το σημείο με το C .Το μέτρο της ταχύτατας του σημείου είναι η ακτινική απόσταση απο το σημείο C επι την γωνιακή ταχύτητα .[5]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

6.1 Εισαγωγή

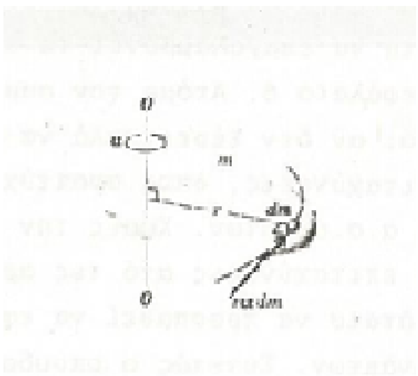
Η κινητική των απόλυτα στερεών σωμάτων με τις σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων που δρουν πάνω σε αυτά από εξωτερικές πηγές, και των αντίστοιχων μεταφορικών και περιστροφικών κινήσεων των σωμάτων. Για να ορίσουμε την κίνηση ενός απόλυτα στρερεού σώματος του οποίου η κίνηση έχει δύο γραμμικές συνιστώσες, χρειάζονται τρείς εξισώσεις κίνησης, δύο εξισώσεις δυνάμεων και μία εξίσωση ροπών ή οι ισοδύναμες τους για να προσδιορίσουμε την κατάσταση της επίπεδης κίνησης του απόλυτα στερεού σώματος.. [1]

Όταν εφαρμόσουμε τις αρχές του έργου και της ενέργειας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα διάγραμμα δρώσας-δύναμης, που δείχνει μόνο εκείνες τις εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο στο σύστημα, αντί για το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Δεν θα πρέπει να επιχειρήσουμε να λύσουμε μια άσκηση, πριν ορίσουμε το πλήρες εξωτερικό σύνορο του σώματος ή του συστήματος και αναγνωρίσουμε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που εξασκούνται πάνω του. [1]

6.2 Ροπές αδράνειας μάζας ως προς ένα άξονα

Η εξίσωση των ροπών γύρω από ένα άξονα κάθετο στο επίπεδο της κίνησης , για ένα απόλυτα στερεό σώμα σε επίπεδη κίνηση, περιέχει ένα ολοκλήρωμα που εξαρτάται από την κατανομή της μάζας ως προς τον άξονα των ροπών. Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχρει , όταν το απόλυτα στερεό σώμα έχει γωνιακή επιτάχυνση. [1]

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m που πριστρέφεται γύρω από ένα άξονα 0-0 με γωνιάκη επιτάχυνση α, όπως φαίνεται στο Σχήμα 35. Όλα τα υ . σ .του σώματος κινούνται σε παράλληλα επίπεδα , που είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής 0-0.



[1]

Σχημα 35

Η ροπή της δύναμης γύρω από τον άξονα 0-0 είναι r^2 adm. Για απόλυτα στερεο σώμα η α είναι ίδια για όλες τις ακτινικές γράμμες του και μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Το υπόλοιπο ολοκλήρωμα είναι γνωστό ως ροπή αδράνειας I της μάζας m γύρω από τον άξονα 0-0 και είναι:

$$I = \int r^2 dm$$

Το ολοκλήρωμα αυτό παριστάνει μία σπουδαία ιδιότητα του σώματος και περιέχεται στην ανάλυση των δυνάμεων οποιουδήποτε σώματος που έχει περιστροφική επιτάχυνση γύρω από ένα δοσμένο άξονα. Ακριβώς όπως η μάζα m ενός σώματος, είναι ένα μέτρο της αντίστασης στην μεταφορική επιτάχυνση, η ροπή αδράνειας είναι ένα μέτρο της αντίστασης στην περιστροφική επιτάχυνση του σώματος.

Αν η πυκνότητα ρ είναι σταθερή σε όλο το σώμα, η ροπή αδράνειας γίνεται: $I = \rho \int r^2 dV$, όπου dV ο στοιχειώδης όγκος.

Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα μόνο του ορίζει μία καθαρά γεωμετρική ιδιότητα του σώματος. [1]

6.3 Μεταφορά αξόνων

Αν γνωρίζουμε την ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς ένα κεντρικό άξονα, μπορούμε να την προσδιορίσουμε εύκολα και ως προς οποιοδήποτε παράλληλο άξονα. [1]

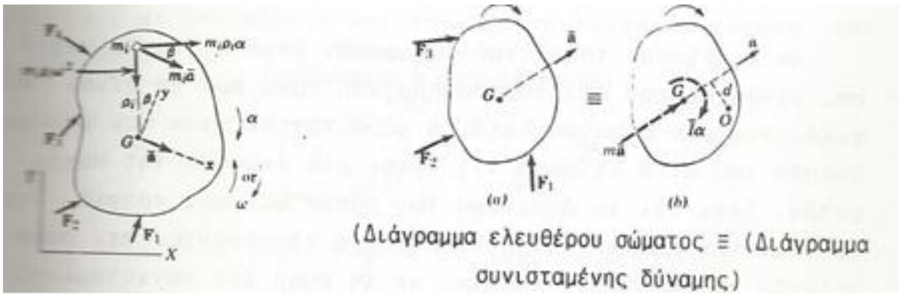
Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι η ροπή αδράνειας $\bar{I}$ ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας, ο δεύτερος όρος είναι m**d**^{2} και το τρίτο ολοκλήρωμα ισούται με το μηδέν, η ως προς u συνιστώσα του κέντρου μάζας αναφορικά με τον άξονα που περνάει από το G είναι μηδέν όποτε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων είναι: $I = \bar{I} + md^2$

Όπου πρέπει η μεταφορά γίνεται μόνο όταν ο ένας άξονας περνάει από το κέντρο μάζας και ο άλλος είναι παράλληλος με αυτόν. [1]

6.4 Δύναμη , Μάζα και Επιτάχυνση

Η θέση ένος α.σ. σώματος στο επίπεδο της κίνησης του, απαιτεί τον καθορισμό τριών μονόμετρων συντεταγμένων. Έτσι οι δύο συντεταγμένες του κέντρου μάζας, ή κάποιου άλλου βολικού σημείου, και η γωνιακή θέση του σώματος ως προς ένα σημείο αναφοράς που εκλέγουμε , θα προσδιορίσουν με μοναδικό τρόπο την σχέση κάθε σημείου του σώματος. Άρα η επίπεδη κίνηση κάθε σημείου του σώματος απαιτεί τρεις ανεξάρτητες μονόμετρες εξισώσεις, για την περιγραφή της.Το άθροισμα των ροπών $\Sigma\bar{M}$ περιέχει τις ροπές των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων ως προς το σώμα δυνάμεων. Η συνεισφορά των εσωτερικών δυνάμεων στο άθροισμα των ροπών είναι μηδενική, αφού για κάθε εσωτερική δύναμη, υπάρχει μία ίση και αντίθετη αντίδραση. Άρα το άθροισμα των ροπών παριστάνει το άθροισμα των ροπών ως προς το G όλων των εξωτερικών δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στο σώμα. Η εξίσωση των ροπών και οι δύο μονόμετρες συνιστώσες του γενικευμένου νόμου της κίνησης του Newton δίνουν:

$\Sigma\bar{M} = \bar{I}a$ **,** $\Sigma F_x = m\bar{a}_x$ **,** $\Sigma F_y = m\bar{a}_y$ **(1)**



[1]

Σχημα 36

Αν το σημείο Ο από το πιο πάνω σχήμα 3 είναι βολικό σημείο, η άθροιση των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το Ο δίνει. [1]

$$\Sigma M_o = \bar{I}a + m\bar{a}d$$

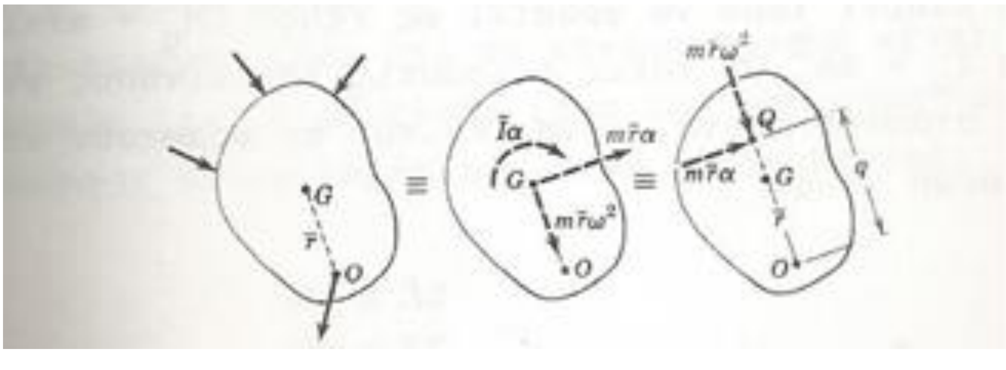
6.4.1 Μεταφορά

Στην ευθύγραμμη μεταφορά όλα τα σημεία κινούνται με ευθείες γραμμές, ενώ στην καμπυλόγραμμη μεταφορά όλα τα σημεία κινούνται σε όμοιες καμπύλες τροχιές. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν μπορεί να υπάρχει γωνιακή κίνηση του μεταφερόμενου σώματος. Με μηδενική γωνιακή επιτάχυνση η παραπάνω εξίσωση (1) γίνεται. [1]

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \ , \ \Sigma F_y = m\bar{a}_y \ , \ \Sigma\bar{\mathrm{M}} = 0$$

6.4. 2 Περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα

Το σύστημα της συνισταμένης δύναμης για την γενική περίπτωση της επίπεδης κίνησης, εφαρμόζεται εύκολα στην επίπεδα περιστροφή ενός απόλυτα στερεού σώματος γύρω από ένα σταθερό άξονα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα . [1]


[1]

Σχημα 37

Οι τρεις εξισώσεις της κίνησης για περιστροφή περί σταθερό άξονα αν γραφτούν στην πιο χρήσιμη μορφή τους:

$\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2$, $\Sigma F_t = m\bar{r}a$, $\Sigma M_o = I_o a$

6.4.3 Γενική επίπεδη κίνηση

Το μόνο απαραίτητο για να λύσουμε την άσκηση της επίπεδης κίνησης, είναι να βρούμε την ισοδυναμία μεταξύ του συστήματος των εξωτερικών δυνάμεων, όπως φαίνεται στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος, και των συνισταμένων δυνάμεων. [1]

Υπάρχουν και δύο ειδικές περιπτώσεις της επίπεδης κίνησης. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν το κέντρο των ροπών Ο, σαν σημείο του σώματος ή της επέκτασης του, δεν έχει επιτάχυνση. Τότε η εξίσωση των ροπών ως προς το Ο γίνεται: $\Sigma M_o = I_o\, \alpha$

Όπου είναι ίδια με την περίπτωση του σώματος που περιστρέφεται περί σταθερό άξονα, διερχόμενο από το 0. Το σημείο 0 δεν είναι ανάγκη να είναι σταθερό, αλλά μπορεί να έχει σταθερή ταχύτητα. [1]

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν διαλέγουμε ένα κέντρο ροπών Ο, που έχει επιτάχυνση διευθυνόμενη προς το κέντρο μάζας G , τότε: $\Sigma M_C = I_C\, \alpha$

6.5 Έργο και Ενέργεια

Εδώ θα εξετάσουμε την σχέση για την έκφραση κινητικής ενέργειας οποιαδήποτε συστήματος μάζας, για να καλύψουμε τις εκφράσεις για την κινητική ενέργεια και για τις τρεις κατηγορίες της επίπεδης κίνησης του απόλυτα στερεού σώματος, που αποδεικνύονται ως εξής: [1]

α) Μεταφορά: Το απόλυτα στερεό σώμα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα m και και όλα τα υλικά σημεία του έχουν κοινή ταχύτητα u. Η κινητική ενέργεια οποιαδήποτε υλικού σημείου του σώματος μάζας m_i είναι : $T_i = \frac{1}{2} m_i u^2$,άρα για ολόκληρο το σώμα : $T = \Sigma \frac{1}{2} m_i u^2 = \frac{1}{2} u^2 \Sigma m_i$

β)Περιστροφή περί σταθερό άξονα: Το απόλυτα στερεό σώμα του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τον σταθερό άξονα στο Ο. Η κινητική ενέργεια ενός αντιπροσωπευτικού υλικού σημείου μάζας m_i είναι:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 .$$

Όμως η ροπή αδράνειας του σώματος γύρω από Ο είναι: $I_o = \Sigma m_i\, r_i^2$,

οπότε : $T = \frac{1}{2} I_o \omega^2$

Υπάρχει ομοιότητα στην μορφή των εκφράσεων της κινητικής ενέργειας, για την μεταφορά και την περιστροφή. [1]

γ)Γενική επίπεδη κίνηση

Το απόλυτα στερεού του πιο κάτω σχήματος 5 εκτελεί επίπεδη κίνηση όπου, την θεωρούμενη στιγμή, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του G είναι u και η γωνιακή ταχύτητα είναι ω. Η ταχύτητα u_i ενός αντιπροσωπευτικού υλικού σημείου μάζας mi, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας u του κέντρου μάζας και της ταχύτητας ρ_i ω σχετικά με το κέντρο μάζας, όπως φαίνεται στο σχήμα.

[1]

Σχημα 38

Με την βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων, η κινητική ενέργεια του σώματος γράφεται σαν το άθροισμα ΣT_i των κινητικών ενεργειών όλων των υλικών σημείων του. Οπότε **:**

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{u}^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2\bar{u}\rho_i\,\omega\cos\theta)$$

Ο τρίτος όρος της έκφρασης γίνεται:

$$\omega\bar{u}\sum(m_i\rho_i\ \cos\theta) = \omega\bar{u}\sum(m_i y_i) = 0$$

αφού $\Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$. Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$T = \frac{1}{2} m\bar{u}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\,\omega^2 \textbf{.}$$

Όπου $\bar{I}$ είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς το κέντρο μάζας του. Η έκφραση αυτή για την κινητική ενέργεια, δείχνει καθαρά τις χωριστές συνεισφορές στην συνολική κινητική ενέργεια, που είναι αποτέλεσμα μίας μεταφορικής ταχύτητας ω, γύρω από το κέντρο μάζας. [1]

Η κινητική ενέργεια της επίπεδης κίνησης, μπορεί ακόμα να εκφραστεί συναρτήσει της περιστροφικής ταχύτητας γύρω από έναν στιγμιαίο πόλο C μηδενικής ταχύτητας . Αφού το C έχει προς στιγμή μηδενική ταχύτητα, η απόδειξη που οδηγεί στη προηγούμενη εξίσωση ισχύει και για το σημείο C, όπως ισχύει και για το σημείο O, οπότε εναλλακτικά η κινητική ενέργεια ενός απόλυτα στερεού σώματος σε επίπεδη κίνηση γράφεται:

$$T = \frac{1}{2} m\bar{u}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\,\omega^2$$

6.6 Ώθηση και ορμή

Οι αρχές ώθησης και ορμής εμφανίζουν ιδιαίτερη σπουδαιότητα, όταν οι εξασκούμενες δυνάμεις είναι εκφρασμένες σαν συναρτήσεις του χρόνου, και όταν υπήρχαν εσωτερικές δράσεις μεταξύ των υλικών σημείων, ειδικά κατά τη διάρκεια μικρών χρονικών διαστημάτων. Για την κίνηση των απόλυτα στερεών σωμάτων έχουμε παρόμοια πλεονεκτήματα και στην ανάπτυξη και εφαρμογή των αρχών της ώθησης και ορμής.

Η γραμμική ορμή του γενικού συστήματος μάζας, ορίστηκε σαν το διανυσματικό άθροισμα των γραμμικών ορμών όλων των υλικών σημείων του συστήματος και εκφράζεται από την σχέση $\vec{\mathbf{G}} = \sum \mathbf{m_i}\vec{v}_i$, όπου η ταχύτητα του αντιπροσωπευτικού υλικού σημείου είναι $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$.Για ένα σύστημα σταθερής συνολικής μάζας, η γραμμική ορμή μπορεί να γραφτεί:

$\vec{\mathbf{G}} = \frac{d}{dt}\sum \mathbf{m_i}\vec{r}_i$.Αντικαθιστώντας τη σχέση $\mathbf{m}\vec{r} = \sum \mathbf{m}_i\vec{r}_i$ έχουμε :

$$\vec{\mathbf{G}} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}) \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{G}} = m\bar{v}$$

Η ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης για την σχέση δύναμης ορμής για το απόλυτα στερεό σώμα είναι:

$$\Sigma F = \dot{G} \ \text{και} \ \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F dt = G_2 - G_1$$

Η συνισταμένη στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\bar{H} = \bar{I}\omega$$

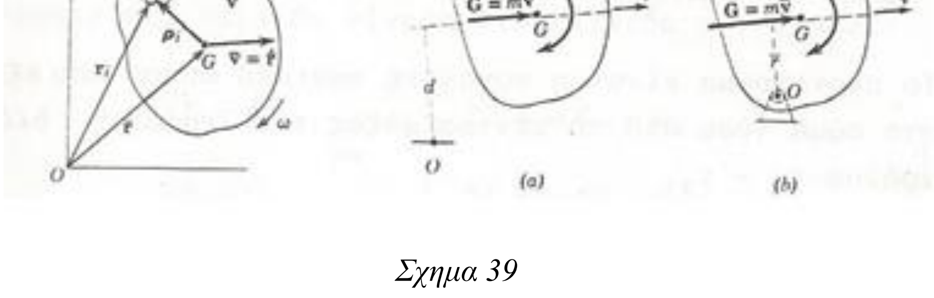
Αν γνωρίζουμε τις συνισταμένες της γραμμικής και τις γωνιακής ορμής, η στροφορμή H_o ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο είναι:

$$H_o = \bar{I}\omega + m\bar{u}d$$

Η εξίσωση των ροπών και η ολοκληρωμένη μορφή της, μαζί με τις τρεις συνθήκες, από τις οποίες μία πρέπει να ισχύει 1 ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις είναι:

$$\Sigma M_o = \dot{H}_o \ \text{και} \ \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_o dt = H_{O_2} - H_{O_1}$$

1. $u_0=0$
2. $\bar{u} = 0$
3. u_0 και $\bar{u}$ είναι παράλληλες



[1]

Σχημα 39

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο του σώματος ή της προέκτασης του, όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα οι σχέσεις $\bar{u} = \bar{r}\omega$ και $d = \bar{r}$, μπορούν να αντικατασταθούν στην έκφραση για το H_o που δίνει $H_o = (\bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega)$. Όμως $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_o$, οπότε :

$H_o = I_o\omega$

Άρα η περιστροφή γύρω από ένα σταθερό σημείο, η πρώτη από τις συνθήκες της πιο πάνω εξίσωσης ισχύει, και η εξίσωση των ροπών και η ολοκληρωμένη μορφή της είναι: $\sum M_0 = I_o\dot{\omega}$ και $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0 dt = I_0(\omega_2 - \omega_1)$ [1]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

7.1 Εισαγωγή

Για την επίλυση προβλημάτων δυναμικής χρειάζεται ανάλυση της κίνησης σε τρείς διαστάσεις. Η εισαγωγή της τρίτης διάστασης κάνει αρκετά πιο σύνθετες τις κινηματικές και κινητικές σχέσεις. Δεν προσθέτει μόνο η τρίτη αυτή διάσταση και μία τρίτη συνιστώσα στα διανύσματα που παριστάνουν δύναμη, γραμμική ταχύτητα, γραμμική επιτάχυνση και γραμμική ορμή, αλλά η εισαγωγή αυτής της τρίτης διάστασης προσθέτει την πιθανότητα ύπαρξης δύο παραπάνω συνιστωσών για τα διανύσματα που παριστάνουν γωνιακές ποσότητες, δηλαδή ροπές δυνάμεων, γωνιακή ταχύτητα, γωνιακή επιτάχυνση και στροφορμή. Σε ένα μεγάλο μέρος αυτή η πρόσθετη μαθηματική δυσκολία, αντιμετωπίζεται με συνεχή χρήση της διανυσματικής ανάλυσης και με την εισαγωγή όπου χρειάζεται με μητρώα και τανυστές. Η μελέτη της δυναμικής στο χώρο των απόλυτα στερεών σωμάτων, ακολουθεί την ίδια σειρά με την μελέτη της επίπεδης κίνησης, δηλαδή κινηματική και μετά κινητική. [1]

7.2 Απόλυτη κίνηση

7.2.1 Μεταφορά ενός απόλυτα στερεού σώματος

Δύο οποιαδήποτε σημεία του σώματος, όπως τα Α και Β, θα κινούνται κατά μήκος παράλληλων ευθειών αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη μεταφορά, ή θα κινούνται κατά μήκος όμοιων καμπύλων αν η κίνηση είναι καμπυλόγραμμη μεταφορά. Και στις δύο περιπτώσεις, κάθε γραμμή του σώματος, όπως η ΑΒ, παραμένει παράλληλη με την αρχική της θέση. Τα διανύσματα θέσης, και οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι τους είναι:

$r_A = r_B + r_{B/A}$ $\quad v_A = v_B$ $\quad a_A = a_B$

όπου το $\vec{r}_{A/B}$ παραμένει σταθερό, και άρα δεν έχει χρονική παράγωγο. Άρα όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. [1]

7.2.2 Περιστροφή ενός απόλυτα στερεού σώματος:

Η αρχή Ο του σταθερού συστήματος συντεταγμένων, εκλέγεται αυθαίρετα πάνω σε ένα κυκλικό τόξο που βρίσκεται σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα, και έχει ταχύτητα:

$v = \omega r$

αν αντικαταστήσουμε το $\vec{r}$ με $\vec{a} + \vec{b}$ και προσέξουμε ότι $\vec{\omega} * \vec{a} = \vec{0}$.Η επιτάχυνση του Α δίνεται από την χρονική παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης:
$\vec{a} = \dot{\omega} * r + \vec{\omega} * (\vec{\omega} * \vec{r})$

όπου το $\vec{r}$ έχει αντικατασταθεί με το ίσο του $\vec{v} = \vec{\omega} * \vec{r}$. Η εφαπτομενική και η κάθετη συνιστώσα του $\vec{a}$ για την κυκλική κίνηση, έχουν τα γνωστά μέτρα
$\vec{a}_t = |\vec{\omega} * \vec{r}| = ba$, όπου $\vec{a} = \dot{\omega}$ και

$$\vec{a}_n = |\vec{\omega} * (\vec{\omega} * \vec{r})| = b\omega^2$$

7.2.3 Γωνίες Euler

Είναι οι τρεις γώνιες θ,ψ,φ που καθορίζουν πλήρως την θέση του ρότορ. Οι χρονική ρυθμοί μεταβολής αυτών των γωνιών $\dot{\theta},\dot{\psi},\dot{\varphi}$ καθορίζουν αντίστοιχα τις ταχύτητες κλόνησης, μετάπτωσης και περιστροφής του ρότορα.

Η απόλυτη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$ των άξόνων x-y-z είναι:

$$\Omega = i\Omega_x + j\Omega_y + k\Omega_z = i\theta + j\psi\sin\theta + k\psi\cos\theta,$$

όπου το $\dot{\Psi}$ παράγει μία ταχύτητα της οποίας το διάνυσμα είναι κατά την διεύθυνση z με συνιστώσες ως προς x και z, $\dot{\omega}sin\theta$ και $\dot{\omega}cos\theta$ αντίστοιχα. Αν ο ρότορας δεν περιστρεφόταν γύρο από τον άξονα του, δηλαδή αν $\dot{\varphi}$ ήταν μηδέν, τότε θα είχε συνιστώσες ταχύτητας ίδιες με εκείνες του x-y-z. Η ταχύτητα περιστοφής γύρω από τον άξονα του, παράγει μία πρόσθετη συνιστώσα ως προς z της γωνιακής ταχύτητας. Άρα ο ρότορας έχει μία απόλυτη γωνιακή ταχύτητα ω που γίνεται:

$$\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z = i\theta + j\psi\sin\theta + k(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$$

7.3 Σχετική κίνηση

Οι κινηματικές εξισώσεις για την στον χόρο ένος υλικού σημείου σχετικά με μεταφορούμενους άξονες μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στην περίπτωση ενός απόλυτα στερεού σώματος, όπου η άρχη του μεταφερόμενου συστήματος x-y-z είναι οποιαδήποτε βολικό σημείο B του σώματος και όπου το σημείο A είναι κάποιο άλλο σημείο σταθερό στο σώμα. Οι εκφράσεις για την σχετική ταχύτητα και επιτάχυνση για την σχετική κίνηση δύο σημείων A και B είναι:

$v_A = v_B + v_{A/B}$ και $a_A = a_B + a_{A/B}$

Κατά την εφαρμογή αυτών των σχέσεων στη κίνηση απόλυτα στερεών σωμάτων, σημειώνουμε ότι η απόσταση AB παραμένει σταθερή. Άρα από την θέση ενός παρατηρητή στο x-y-z, το A φαίνεται ότι περιστρέφεται γύρω από το σημείο B και ότι βρίσκεται πάνω σε μία σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το B. Συνεπώς η γενική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μεταφορά του σώματος με την κίνηση του B, συν μία περιστοφή του σώματος γύρω από το B. [1]

Οι όροι της σχετικής κίνησης παριστάνουν στην επίδραση της περιστοφής γύρω από το B, και είναι όμοιοι με τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για την περιστροφή ενό απόλυτα στερεού σώματος και μίας γραμμής γύρω από ένα σταθερό σημείο. Άρα οι εξισώσεις της σχετικής ταχύτητας και επιτάχυνσης, μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$v_A = v_B + \omega * r_{A/B}$ και $\alpha_A = \alpha_B + \omega * r_{A/B} + \omega * (\omega * r_{A/B})$.

Όπου $\vec{\omega}$ είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

Η εκλογή του σημείου αναφοράς Β είναι τελείως αυθαίρετη στην θεωρία. Στην παράξη σαν σημείο Β εκλέγεται κάποιο σημείο του σώματος, του οποίου η κίνηση είναι γνωστή σαν σύνολο ή σε μέρος της. Αν εκλέξουμε το σημείο Α σαν σημείο αναφοράς, οι εξισώσεις της σχετικής κίνησης γίνονται:

$$v_B = v_A + \omega * r_{B/A}$$

$\alpha_B = \alpha_A + \dot{\omega} * r_{A/B} + \omega * (\omega * r_{A/B})$, όπου το $\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$.

Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι το $\vec{\omega}$ και άρα το $\dot{\vec{\omega}}$ είναι τα ίδια διανύσματα και για τις δύο μορφές, αφού η απόλυτη γωνιακή κίνηση του σώματος είναι ανεξάρτητη της εκλογής του σημείου αναφοράς.

Όταν εφαρμόζουμε τις προηγούμενες σχέσεις, στην κίνηση στον χώρο ενός ευθύγραμμου τμήματος, ισχύουν τα συμπεράσματα για την γωνιακή κίνηση μιάς γραμμής, γύρω από ένα στάθερο σημείο της, για τους όρους της σχετικής κίνησης, στις σχέσεις της σχετικής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_n$ και η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_l$ του ευθύγραμμου τμήματος, όπως ορίστηκαν στην παράγραφο, πρέπει να υπακούουν στις σχέσεις:

$$\omega_n \cdot v_{AB} = 0 \text{ και } a_l \cdot r_{AB} = 0$$

Όταν το ευθύγραμμο τμήμα είναι μέρος ενός απόλυτα στερεού σώματος, τότε ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα.

Μιά πιο γενική μορφοποίηση της κίνησης ενός απόλυτα στερεού σώματος στον χώρο, απαιτεί την χρήση αξόνων αναφοράς που και περιστρέφονται και μεταφέρονται.[1]

7.4 Αρχη των δυνατων εργων

Εφραμογή δυνατών μετακινήσεων και παραμορφώσεων

Η εφαρμογή γίνεται σε ενα φορέα ,οποιος ισορροπεί κάτω απο εξωτερικά επιβαλλόμενες (πραγματικές)φορτίσεις ,δυνατών(φανταστικών)μετακινήσεων οι οποίες είναι συμβατές με τις συνθήκες στήριξης και τις εσωτερικές συνδέσεις του φορέα . [7]

Ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού δυνατού έργου

Το εξωτερικό δυνατό έργο ,απο την δυνατή μετακίνηση των πραγματικών φορτίσεων πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή ενέργεια ,την οποια πραγματοποιούν οι τάσεις ,οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα απο τα πραγματικά φορτία, εσωτερικά εντατικά μεγέθη ,κατα τις δυνατές παραμορφώσεις . [7]

δWE=δWI

Εναλλακτικες Διατυπώσεις της ΑΔΕ

Αρχή των δυνατών μετακινήσεων

Προκύπτει απο εφαρμογή δυνατών μετακινήσεων και το ισοζύγιο του εξωτερικύ και εσωτερικού δυνατού έργου .Επισης η αρχη των δυνατών δυνάμεων προκύπτει απο την εφαρμογή των δυνατών δυνάμεων και το ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού συμπληρωματικού δυνατού έργου. [7]

Αρχη των δυνατων συμπληρωματικων εργων

Εφαρμόζουμε σε εναν φορέα ,οποιος ισορροπεί κατω απο εξωτερικά επιβαλλόμενες φορτίσεις μια δυνατή εξωτερική φόρτιση και τα αντίστοιχα δυνατά εσωτερικά εντατικά μεγέθη.Το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο ,απο την μετακίνηση των δυνατων φορτίσεων κατα τις πραγματικες μετακινήσεις πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή συμπληρωματική ενέργεια ,την οποια πραγματοποιούν οι τάσεις οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα απο τα δυνατά φορτιά εσωτερικά εντατικά μεγέθη ,κατα τις πραγματικές παραμορφώσεις .Μπορούμε να υπολογίσουμε μια άγνωστη μετακίνηση εφαρμόζοντας μια δνατή φανταστική δύναμη ή ροπή που ζητείται ο υπολογισμος της .Επιβάλλοντας σε ενα φορέα ο οποιος ισορροπεί κατά y απο την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων ,η οποια δεν παραβιάζει τις συνθήκες στήριξης των εσωτερικών συνδέσεων . [7]

7.5 Μηχανισμοί και Επίλυση Μηχανισμών

Μηχανισμός ορισμός

Σύνολο απολύτως στερεών σωμάτων ,τα οποια ειναι συνδεδεμένα μεταξυ του με συγκεκριμένο τρόπο και κινούνται μεταξή τους με συγκεκριμένο τρόπο . [8]

Κινηματική προσέγγιση

Θεωρόντας σταθερή στροφή για τις μετατοπίσεις των άκρων ενος μοχλού ισχύει .

$$\varphi=\frac{\chi 1}{l1}=\frac{\chi 2}{l2}=\text{const}$$

Με χρονικη παραγώγιση της κινηματικής σχέσης των μετατοπίσεων προκύπτει η γωνική ταχύτητα και για τα άκρα του μοχλού ισχύει

$$\omega=\frac{d}{dt}(\varphi)=\varphi^{\cdot}=\frac{u1}{l1}=\frac{u2}{l2}$$

Η κινηματική σχέση μεταξύ των ταχυτήτων ειναι

$$u_2=\left(\frac{l2}{l1}\right)U1$$

ο λογος (l2/l1)αυξάνει και μειώνει την κινηματική σχέση των ταχυτήτων και καλείται κέρδος (Gain).

Με χρονική παραγώγιση της κινηματικής σχέσης των ταχυτήτων προκύπτει η επιτάχυνση .Απο την επιτάχυνση υπολογίζονται οι αδρανειακές δυνάμεις . [8]

[8]

Σχημα 40

Ο παραπάνω μηχανισμός κανει μια συνεχής περιστροφική κίνηση (κάτω αριστερά σώμα) σε μια διακοπτόμενη περιστροφική κίνηση (πανω δεξια σωμα). [8]

Μεθοδος Denavit-Hartenbrg

Η μέθοδος των Denavit-Hartenbrg αναπτύχθυκε καταρχύν για την περιγραφή της κινηματικής σύνθετων μηχανισμών απο ενα ελάχιστο σύνολο παραμέτρων .Αργότερα ,προσαρμόσθηκε στην περιγραφή της κινηματικής ρομποτικών μηχανισμών.Η μέθοδος αυτη παράγει μια συστηματική παραγωγή των πινακων T που συνδέουν τη θέση και τον προσανατολισμό ενος συνδέσμου ως προς τον προηγούμενο ,υπενθυμίζεται οτι οι πίνακες T περιγράφουν θέση και προσανατολισμό .

Παράμετροι Denavit-Hartenbrg

Αναγνωρίζουμε τους άξονες αρθρώσεων.Για μια άρθρωση .

Στροφική ο άξονας της άρθρωσης ειvια ο άξονας περιστροφής ενο για μια πρισματική ο άξονας της αρθρωσης ειναι η κατεύθηνση της ολίσθησης .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

8.1Στροφορμή

Η εξίσωση δυνάμεων για οποιοδήποτε σύστημα μαζας ,α.σ. ή οχι ,εξ.92 η εξ.96, ειναι η γενικευση του δευτερου νομου του Newton για την κινηση ενος υ.σ. ,οποτε δεν χρειάζεται περισσότερη εξήγηση .Ομως η εξισωση των ροπων δεν ειναι τοσο απλη ,οσο η πρωτη των εξ.112 για την επιπεδη κινηση ,αφου η μεταβολη της στροφορμης εχει κι αλλες προσθετες συνιστωσες στην τρισδιαστατη κινηση ,που δεν υπαρχουν στην επιπεδη κινηση . [1]

Θεωρουμε τωρα ενα α.σ. σωμα που κινειται σε οποιαδηποτε γενικη κινηση στο χωρο ,σχ.71 α .Οι αξονες χ-y-z ειναι συνδεμενοι με το σωμα ,με αρχη στο κεντρο μαζας G .Η γωνιακη ταχυτητα $\vec{\omega}$ του σωματος γινεται η γωνιακη ταχυτητα του πλαισιου χ-y-z ,οπως παρατηρειται απο τους σταθερους αξονες αναφορας Χ-Ψ-Ζ.Η απολυτη στροφορμη $\vec{\vec{H}}$ του σωματος ως προς το κεντρο μαζας του G ,ειναι το αθροισμα ως προς το G των ροπων των γραμμικων ορμων και εκφραζεται σαν $\vec{\vec{H}}$ =Σ($\vec{\rho}$ixmi$\vec{v}$i),οπου $\vec{v}$I ειναι απολυτη ταχυτητα του mi.Ομως για το α.σ. σωμα ισχυει $\vec{v}$i=$\vec{\vec{v}}$+$\vec{\omega} \times \vec{\rho}$i οπου $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$i ειναι η σχετική ταχύτητα της mi σχετικά με το G .Ετσι η $\vec{H}$ μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\bar{\boldsymbol{H}} = -\bar{\boldsymbol{v}} \times \Sigma m_i \rho_\iota + \Sigma(\rho_i \times m_i[\omega \times \rho_i])$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδέν αφού Σmi$\vec{\rho}$i=m$\vec{\vec{\rho}}$=$\vec{0}$,και ο δεύτερος όρος με την αντικατάσταση του dm αντι για το mi και του $\vec{\rho}$ αντι για το $\vec{\rho}$i δίνει :

$$\bar{\boldsymbol{H}} = \int(\boldsymbol{\rho} \times [\omega \times \rho])dm \qquad (114)$$

Πρίν αναπτύξουμε το ολοκλήρωμα τησ εξ.1447,θεωρούμε επίσης την περίπτωση ενός α.σ. σώματος που περιστρέφεται γύρω απο ενα σταθερό σημείο Ο,σχ.71b.Οι άξονες χ-y-z είναι συνδεμένοι με το σώμα και μαζί το σώμα και οι άξονες έχουν γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.Η στροφορμή γύρω απο το Ο είναι $\vec{H}$=Σ($\vec{r}$i×mi$\vec{v}$i),όπου για το α.σ. σώμα $\vec{v}$i=$\vec{\omega} \times \vec{r}$I .Αρα με την αντικατάσταση του dm αντί για το m και του $\vec{r}$I, η στροφορμή είναι :

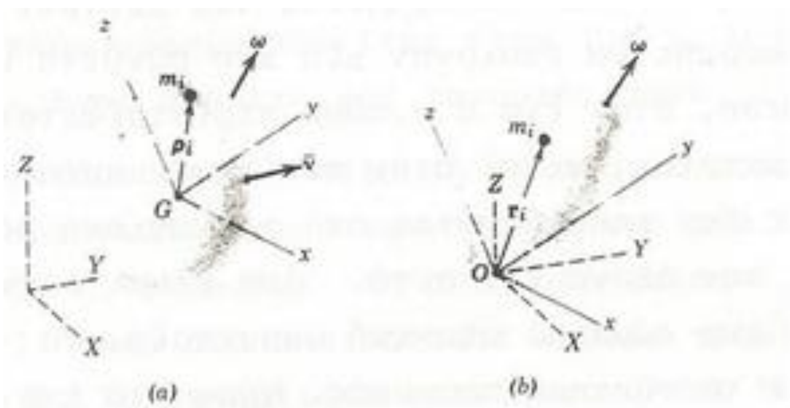
$$H_o = \int(\boldsymbol{r} \times [\omega \times \rho])dm \qquad (145)$$

Παρατηρούμε τώρα οτι για τις δυο περιπτώσεις των σχ.71α και 71b ,το διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}$i η $\vec{r}$i δίνεται απο την ίδια έκφραση $\vec{\imath}$χ+$\vec{\jmath}$y+$\vec{k}$z. Αρα οι εξισώσεις 144 και 145 είναι όμοιες σε μορφή ,και το σύμβολο $\vec{H}$ θα χρησιμοποιηθεί εδω και για τις δυο περιπτώσεις .Θα αναπτύξουμε τώρα το ολοκλήρωμα στις δυο εκφράσεις για τη στροφορμή ,γνωρίζοντας οτι οι συνιστώσες της $\vec{\omega}$ ειναι αμετάβλητες ,αναφορικά με ολοκληρώματα σε όλο το σώμα αρα, γίνονται σταθεροί πολλαπλασιαστές των ολοκληρωμάτων .Η ανάπτυξη του εξωτερικού γινόμενου αν εφαρμοστεί στο τριπλό διανυσματικό γινόμενο δίνει :

$$\begin{aligned} \mathbf{dH} = \mathbf{i}[(y^2 + z^2)\mathbf{r} \quad & -\mathbf{xy\omega} \quad -\mathbf{xz\omega z}]\mathbf{dm} \\ +\mathbf{j}[\quad -\mathbf{yx\omega r} \; & +(z^2+x^2)\mathbf{\omega y} \quad -\mathbf{yz\omega z}]\mathbf{dm} \\ +\mathbf{k}[\quad -\mathbf{zx\omega r} \quad & -\mathbf{zy\omega y}+(x^2 + y^2)\mathbf{\omega z}]\mathbf{dm} \end{aligned}$$

Εστω τώρα οτι

$$\begin{aligned} &\mathbf{I\chi y} = \int (y^2+z^2)\mathbf{dm} \qquad && \mathbf{Iry} = \int xy\,\mathbf{dm} \\ &\mathbf{Iyy} = \int (z^2 + x^2)\mathbf{dm} && \mathbf{Irz} = \int xz\,\mathbf{dm} \qquad \mathbf{(146)} \\ &\mathbf{Izz} = \int (x^2 + r^2)\mathbf{dm} && \mathbf{Iyz} = \int yz\,\mathbf{dm} \end{aligned}$$



[1]

Σχημα 41

Οι ποσότητες Ixx,Iyy,Izz είναι γνωστές σαν ροπές αδρανείας του σώματος ως προς αντιστοίχους άξονες ,και οι Ιχy,Ixz,Iyz είναι γνωστές σαν γινόμενα αδρανείας ως πρός τους άξονες των συντεταγμένων .Αυτές οι ποσότητες περιγράφουν τον τρόπο με τον οποιο η μάζα ενος α.σ. σώματος κατανέμεται αναφορικά με τους άξονες που εκλέγουμε .Οι διπλοί δείκτες για τις ροπές αδρανείας διατηρούν μια συμμετρία στη γραφή .Παρατηρούμε οτι Ixy=Iyx,Ixz=Izx' ,Iyz=Izy .Με την αντικατάσταση των εξ .146 ,η έκφραση για τη $\vec{H}$ γίνεται :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{i}(\mathbf{Irr\omega r - Iry\omega y - Ixz\omega z}) \\ &\quad + \mathbf{j}(\mathbf{-Iyx\omega r + Iyy\omega y - Iyz\omega z}) \qquad (147) \\ &\quad + \mathbf{k}(\mathbf{-Izx\omega r - Izy\omega y + Izz\omega z}) \end{aligned}$$

Και οι συνιστώσες της $\vec{H}$ είναι :

$$\mathbf{Hr = Irr\omega r - Iry\omega y - Ixz\omega z}$$

$$\mathbf{Hy = -Iyr\omega r + Iyy\omega y - Iyz\omega z}$$

$$\mathbf{Hz = -Izr\omega r - Izy\omega y + Izz\omega z}$$

Η εξ.147 είναι η γενική έκφραση για τη στροφορμή ως πρός το κέντρο μάζας G ή ως πρός ένα σταθερό σημείο Ο,για ενα α.σ.σώμα που περιστρέφεται με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. [1]

Οι άξονες x-y-z είναι συνδεμένοι με το α.σ. σώμα .Αυτη η σύνδεση ,κάνει τα ολοκληρώματα των ροπών αδρανείας και τα ολοκληρώματα των γινωμένων αδρανείας των εξ.146 ,αμετάβλητα με το χρόνο.Αν οι άξονες x-y-z- περιστρέφοντουσαν σχετικά με ενα μη κανονικό σώμα ,τοτε αυτα τα ολοκληρώματα αδρανείας θα ηταν συναρτήσεις του χρόνου ,οποτε οι σχέσεις της στροφορμής θα έπαιρναν μια πιο σύνθετη μορφή .Υπάρχει μια εξαίρεση ,οταν ενα α.σ.σώμα περιστρέφεται γύρω απο ενα άξονα συμμετρίας ,γιατί στην περίπτωση αυτη τα ολοκληρώματα αδρανείας δεν επηρεάζονται απο τη γωνιακή θέση του σώματος ως πρός τον άξονα απο αυτο . Είναι συχνά βολικό να επιτρέπουμε σε ενα σώμα με αξονική συμμετρία ,να περιστρέφεται σχετικά με το σύστημα αναφοράς ,γύρω απο ενα άξονα συντεταγμένων .Τοτε με τις συνιστώσες της ορμής που οφείλονται στη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$ των αξόνων αναφοράς ,θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μια πρόσθετη συνιστώσα στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής ,που οφείλεται στη σχετική περιστροφή γύρω απο τον άξονα . [1]

8.2 Αδρανειακές ιδιότητες .

Μετασχηματίζουμε το διάνυσμα $\vec{\omega}$ στο διάνυσμα $\vec{\Pi}$ της εξίσωσης 147,και γράφεται με την μορφή μητρώου ως εξής :

$$\begin{matrix} \mathbf{Hx} \\ \mathbf{Hy=} \\ \mathbf{Hz} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{Ixx} & -\mathbf{Ixy} & -\mathbf{Ixz} \\ -\mathbf{Iyx} & \mathbf{Iyy} & -\mathbf{Iyz} \\ -\mathbf{Izx} & -\mathbf{Izy} & \mathbf{Izz} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\omega}\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\omega}\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\omega}\mathbf{z} \end{matrix}$$

Ή απλούστερα :

$$\{\mathbf{Hxyz}\}=[\mathbf{I}]\{\boldsymbol{\omega}\mathbf{xyz}\} \qquad \mathbf{(149)}$$

Η διάταξη [1] ονομάζεται αδρανειακό μητρώο .Οι τιμές των στοιχείων στο μητρώο εξαρτώνται απο την αρχή και τον προσανατολισμό των αξόνων που έχουμε εκλέξει .Αν αντικαταστήσουμε τους δείκτες χ,y,z με τους 1,2,3, τοτε ο μητρωικός η τανυστικός μετασχηματισμός μπορεί να γραφτεό ως εξής :

$$\mathbf{Hi}=\sum_{j=1}^{3} \pm \boldsymbol{Iij\omega j} \qquad \mathbf{i=1,2,3} \qquad \mathbf{(150)}$$

Οπου το πρόσημο συν για το Iij χρησιμοποιείται οταν i=j και το πρόσημο πλην χρησιμοποιείται οταν i≠j .Ο αδρανειακός τανυστής είναι ενας συμμετρικός τανυστής αφού Iij=Iji .Για να εξετάσουμε την επιρροή πάνω στις αδρανειακές ιδιότητες ,του προσανατολισμού των αξόνων για μια δοσμένη αρχή συντεταγμένων O,θεωρούμε τη ροπή αδρανείας IM ενος α.σ. σώματος σχ.72 απο οποιαδήποτε ευθεία γραμμή M που περνάει απο το O .Τα συνημίτονα κατεύθυνσης της M είναι l,m,n και ενα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\lambda}$ κατά μήκος της M μπορεί να γραφτεί ως $\vec{\lambda}$=$\vec{\imath}$l+$\vec{\jmath}$m+$\vec{k}$n .Η ροπή αδρανείας ως πρός την M είναι

IM=$\int h^2 dm$=$\int (r \times \lambda)\ (r \times \lambda)$dm

Οπου |$\vec{r} \times\ \vec{\lambda}$|=h .Το εξωτερικό γινόμενο είναι :

$(r \times \lambda)$=I (yn-zm)+j(zl-xn)+k(xm-yl)

Και το άθροισμα των τετραγώνων των ορών δίνει

$(r \times \lambda)\ (r \times \lambda)$=$h^2$=$(y^2 z^2)/l^2$+$(x^2$+$z^2)m^2$ +$(x^2 + y^2)n^2$

-2xylm-2xzln-2yzmn

Αρα με αντικατάσταση των εκφράσεων των εξισώσεων 146 έχουμε :

$$\mathbf{IM=Ixx}\boldsymbol{l^2}\mathbf{+Iyy}\boldsymbol{m^2}\mathbf{+Izz}\boldsymbol{n^2}\mathbf{-2Ixylm-2Ixzln-2Iyzmn} \qquad \mathbf{(151)}$$

Η έκφραση αυτή δίνει τη ροπή αδρανείας γύρω απο οποιοδήποτε άξονα ΟΜ, συναρτήσει των ροπών και των γινομένων αδρανείας ως προς τις συντεταγμένες διευθύνσεις .Αν τοποθετήσουμε πάνω στην ΟΜ ενα σημείο Q σε απόσταση q=1/$\sqrt{IM}$ απο το Ο,τότε η έκφραση για τη ΙΜ γράφεται

$$\mathbf{NI=I}\boldsymbol{\chi\chi\chi\iota^2}\mathbf{+Iyy}\boldsymbol{\nu i^2}\mathbf{+Izz}\boldsymbol{zi^2}\mathbf{-2Ixyxivi-2Ixzxizi-2Iyzvizi}$$

Οπου χ1,y1,z1 είναι οι συνισταμένες του Q .Η έκφραση αυτή είναι η εξίσωση μιας τετραγωνικής (δευτεροβάθμιας)επιφάνειας γύρω απο το Ο .Αν προχωρήσουμε περισσότερο ,η επιφάνεια πρέπει να ορίζει ενα ελλειψοειδές ,σχ.73$^{\alpha}$,αφού για ενα πεπερασμένο α.σ.σώμα δεν μπορεί να υπάρχει προσανατολισμός της ΟΜ για το οποίο η ΙΜ να εινία μηδέν και η q άπειρη .Η επιφάνεια αυτη είναι γνωστή σαν ελλειψοειδές αδράνειας για το καθορισμένο σημείο Ο του δοσμένου α.σ. σώματος .Η γεωμετρία του ελλειψοειδούς καθορίζει πλήρως τις αδρανειακές ιδιότητες του σώματος γύρω απο το Ο .Γενικά για κάθε διαφορετικό σημείο του σώματος ,θα υπάρχει και ενα διαφορετικό ελλειψοειδές αδρανείας . [1]

Επίσης ,επειδή το ελλειψοειδές εχει τρείς άξονες συμμετρίας ,είναι πάντα δυνατό να προσανατολίσουμε τις συντεταγμένες διευθύνσεις ετσι ωστε να συμπίπτουν με τους άξονες αυτούς ,οπως φαίνεται στο σχ.73b.Οι ροπές ως προς αυτούς τους άξονες ειναι γνωστές σαν κύριες ροπές αδρανείας Ι1,Ι2,Ι3,και οι άξονες αυτοι ονομάζονται κύριοι άξονες αδρανείας .Γιαυτον τον προσανατολισμό αξόνων ,τα γινώμενα αδρανείας εξαφανίζονται ,και η εξίσωση της τετραγωνικής επιφάνειας γίνεται :

$$\mathbf{I=Ii}\boldsymbol{x^2}\mathbf{+I2}\boldsymbol{y^2}\mathbf{+I3}\boldsymbol{z^3} \qquad \mathbf{\eta} \qquad \frac{\chi^2}{q1^2}\frac{y^2}{q2^2}\frac{z^2}{q3^2}\mathbf{=I}$$

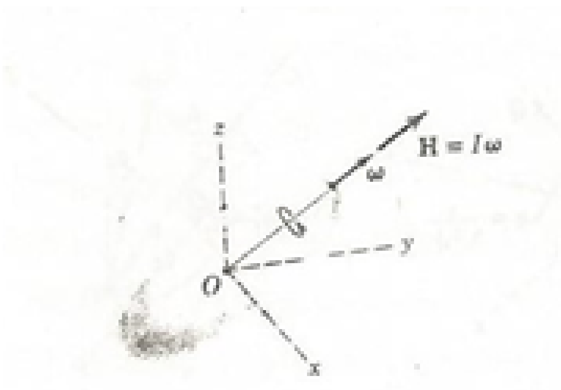
Οι ποσότητες q1=1/$\sqrt{I1}$,q2=1/$\sqrt{I}$2,q3=1/$\sqrt{I}$3 ,είναι οι τρείς σταθερές τιμές του q,που δίνουν τα μήκη του μικρού ημιάξονα ,του μεσαίου ημιάξονα και του μεγάλου ημιάξονα του ελλειψοειδούς .Με τους όρους των γινομένων αδρανείας ίσους με το μηδέν ,για τον προσανατολισμό αυτο των αξόνων ,ο τανυστής αδρανείας παίρνει τη μορφή :

$$\mathbf{[I]=}\begin{matrix} \boldsymbol{I1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I3} \end{matrix}$$

Οπότε λέμε οτι έγινε διαγώνιος.Απο τον ορισμό του q και απο το σχ.73b, παρατηρούμε οτι η ροπή αδρανείας είναι μέγιστη ,ως πρός τον άξονα για τον οποίο το q είναι ελάχιστο και αντίστροφα . [1]

Γενικά οι διευθύνσεις του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ και της στροφορμής $\vec{H}$ δεν ειναι ίδιες .Για να το αποδείξουμε θεωρούμε ενα α.σ.σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=\vec{\imath}\omega x+\vec{\jmath}\omega y+\vec{k}\omega z$ με άξονες συντεταγμένων εκλεγμένους σαν κύριους άξονες ,οποτε $\vec{H}=\vec{\imath}I1\omega x+\vec{\jmath}I2\omega y+\vec{k}I3\omega z$.Αυτά τα διανύσματα μπορούν να έχουν την ιδια διεύθυνση μόνο αν I1=I2=I3 ,οπότε στην περίπτωση αυτη οι λόγοι των συνιστωσών είναι όμοιοι και τα διανύσματα είναι παράλληλα ,η αν τπ σώμα περιστρέφεται γύρω απο ενα κύριο άξονα ,οποτε οι δυο συνιστώσες που υπολείπονται για κάθε ενα απο τα διανύσματα ,είναι μηδέν .Για να προσδιορίσουμε τις κύριες ροπές αδρανείας απο τις ροπές και τα γινόμενα αδρανείας που αντιστοιχούν σε αυθαίρετο προσανατολισμό των αξόνων ,θεωρούμε ενα σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω απο ενα κύριο άξονα αδρανείας ,ως προς τον οποιο η ροπή αδρανείας ειναι I .Το ελλειψοειδές αδρανείας για την περίπτωση αυτη φαίνεται στο σχ.74 .Χρησιμοποιώντας αυτα που είπαμε προηγουμένως ,βλέπουμε οτι η στροφορμή είναι κατα μήκος αυτου του κύριου άξονα και είναι $\vec{H}=I\vec{\omega}$.Αν οι συνιστώσες της $\vec{H}$ εξισωθούν με τις εκφράσεις στις εξ148 εφαρμοσμένες στην ειδική αυτη περίπτωση ,θα έχουμε μετά απο ανακατάταξη των όρων :

$$\begin{aligned} &(Ixx-I)\omega x-Ixy\omega y-Ixz\omega z=0 \\ &-Iyx\omega x+(Iyy-I)\omega y-Iyz\omega z=0 \qquad (152) \\ &-Izx\omega x-Izy\omega y+(Izz-I)\omega z=0 \end{aligned}$$



[1]

Σχημα 42

Αυτές οι εξισώσεις θα έχουν λύση ,με τη προυπόθεση οτι η ορίζουσα των συντελεστών θα είναι μηδέν ,δηλαδή :

$$\begin{vmatrix} Ixx-I & -Ixy & -Irz \\ -Iyz & Iyy-I & -Iyz \\ -Izr & -Izy & Izz-I \end{vmatrix} = 0 \qquad (153)$$

Η εξίσωση αυτη είναι μια κυβική (τρίτου βαθμού)ως πρός εξίσωση ,και οι τρείς ρίζες της είναι κύριες ροπές αδρανείας I1,I2,I3 .Αν μπορούμε να αποδείξουμε ,είναι φανερό οτι και οι τρείς ρίζες ειναι θετικές και πραγματικές .Τα συνημίτονα κατεύθυνσης l,m,n ενος κύριου άξονα αδρανείας μπορούν να ληφθούν αμέσως απο την εξ.152 ,αφού για τις εξισώσεις αυτές οι διευθύνσεις του $\vec{\omega}$ και των κύριων αξόνων αδρανείας συμπίπτουν ,σχ41. Αντικαθιστώντας ωχ=ωl,ωy=ωm,ωz=ωn έχουμε

$$\begin{aligned} &(Ixx-I)I-Ixym-Ixzn=0 \\ &-Iyx+(iyy-I)m-Iyzn=0 \qquad (154) \\ &-IzxI-Izym+(Izz-I)n=0 \end{aligned}$$

Αυτές οι εξισώσεις μαζί με την $l^2+m^2+n^2$=1,κάνουν δυνατή την εύρεση των συνημιτόνων κατεύθυνσης για κάθε μια απο τις τρείς Ι χωριστά . [1]

Ο μετασχηματισμός των αδρανειακών όρων απο ενα σύστημα κεντροβαρικών αξόνων χyz ,σε ενα παράλληλο σύστημα μη κεντροβαρικών αξόνων χ’y’z’ είναι πολύ εύκολος .Αν οι συνιστώσες της μετατόπισης της αρχής του x’y’z’ σχετικά με την αρχή του χyz είναι dx,dy,dz, εύκολα αποδεικνύεται οτι :

$$\begin{aligned} &Ix'x'=Ixx+m(dy^2+dz^2) && Ix'y'=Ixy+mdxdy \\ &Iy'y'=Iyy+m(dz^2+dx^2) && Ix'z'=Ixz+mdxdz \qquad (155) \\ &Iz'z'=Izz+m(dx^2+dy^2) && Iy'z'=Iyz+mdydz \end{aligned}$$

Αυτοι οι μετασχηματισμοί για τη μεταφορά των αξόνων ,είναι τα θεωρήματα των παράλληλων αξόνων ,που μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο αν η αρχή χyz είναι το κέντρο μάζας . [1]

Εξισώσεις της κίνησης για την ορμή και την ενέργεια .

Οι γενικές εξισώσεις ροπών ,για οποιοδήποτε συσήημα σταθερής μάζας ,εξ,97, εκφράζονται εδω απο την εξίσωση Σ$\vec{M}$=$\dot{\vec{H}}$,οπου οι όροι λαμβάνονται ή ως πρός ενα σταθερό σημείο Ο ή ως προς το κέντρο μάζας G .Οταν αναφέραμε για την αρχή των ροπών ,πήραμε την παράγωγο του $\vec{H}$ ως προς ενα απόλυτο σύστημα συντεταγμένων .Οταν το $\vec{H}$ εκφράζεται συναρτήσει συνιστωσών που μετρήθηκαν σχετικά με ενα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων x-y-z,που εχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$,τότε η εξίσωση ροπών γίνεται βάσει της εξ.142:

$$\mathbf{\Sigma M=(\frac{dH}{dt})xyz+\Omega\times H=(i\dot{H}x+j\dot{H}y+k\dot{H}z)+\Omega\times H}$$

Οι όροι μέσα στην παρένθεση παριστάνουν εκείνο το μέρος της $\vec{H}$ που οφείλεται στη μεταβολή του μέτρου των συνιστωσών της $\vec{H}$,και το εξωτερικό γινόμενο παριστάνει το μέρος που οφείλεται στις μεταβολές της διεύθυνσης των συνιστωσών της $\vec{H}$.Αναπτύσοντας το εξωτερικό γυνόμενο και κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma M} &= \mathbf{i(\dot{H}x-Hy\Omega z+Hz\Omega y)}\\ &\mathbf{+j(\dot{H}y-Hz\Omega x+Hx\Omega z)} \qquad \mathbf{(156)}\\ &\mathbf{+k(\dot{H}z-Hx\Omega y+Hy\Omega \chi)}\end{aligned}$$

Η εξ.156 είναι η πιο γενική μορφή της εξίσωσης ροπών ως πρός ενα σταθερό σημείο Ο ή ως πρός το κέντρο μάζας G .Τα Ω είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας της περιστροφής των αξόνων αναφοράς ,και οι συνισώωσες της ή στην περίπτωση του α.σ.σώματος ,είναι οπως ορίστηκαν στην εξ.148 ,οπου τα ω είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του σώματος .Η εξ.156 εφαρμόζεται σε ενα α.σ.σώμα ,οπου οι άξονες των συντεταγμένων είναι συνδεμένοι με το σώμα .Κάτω απο αυτές τις συνθήκες και όταν εκφραστούν σε συντεταγμένες ως πρός x-y-z- ,οι ροπές και τα γινόμενα αδρανείας είναι αμετάβλητα με το χρόνο ,και $\vec{\Omega}=\vec{\omega}$

Αρα για άξονες συνδεδεμένους με το σώμα ,οι τρείς μονόμετρες συνιστώσες της εξ.156 γίνονται :

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Sigma My=\dot{H}x-Hy\omega z+Hz\omega y}\\ &\mathbf{\Sigma My=\dot{H}y-Hz\omega x+Hx\omega z} \qquad \mathbf{(157)}\\ &\mathbf{\Sigma Mz=\dot{H}z-Hx\omega y+Hy\omega x}\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις 157 είναι γενικές εξισώσεις ροπών κίνησης α.σ.σώματος με άξονες αναφοράς με το σώμα ,και ισχύουν αναφορικά με άξονες πού περνάνε απο ενα σταθερό σημείο Ο ή απο το κέντρο μάζας G.Αν διαλέξουμε το κέντρο μάζας ,μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ή τη σχετική ή την απόλυτη στροφορμή . [1]

Παρατηρούμε οτι η εξ.156 και αρα η 157 ισχύουν επίσης για ειδικά σημεία ,εκτός απο το σταθερό σημείο ή το κέντρο μάζας .Γιαυτές τις ειδικές περιπτώσεις η σωστή ανάπτυξη του λαθεμένου $\vec{H}$,μπορεί να δημιουργήσει μεγάλες δυσκολίες ,ειδικά οταν η ειδική συνθήκη εκπληρώνεται μόνο σε μια χρονική στιγμή .Συνεπώς η σχέση $\Sigma\vec{M}=\vec{H}$ θα εφαρμόζεται μόνο ως προς το κέντρο μάζας ή ως πρός ενα σταθερό σημείο . [1]

Οποιοδήποτε σημείο σταθερό σε ενα α.σ.σώμα ,υπάρχουν τρείς κύριοι άξονες αδράνειας ως πρός τους οποιούς μηδενίζονται τα γινόμενα αδρανείας .Αν οι άξονες αναφοράς συμπίπτουν με τους κύριους άξονες αδρανείας ,με αρχή το κέντρο μάζας G ή σε ενα σημείο Ο σταθερό στο σώμα και σταθερό στο χώρο ,τοτε τα Ιχy,Iyz,Ixz θα είναι μηδέν και οι εξ.157 γίνονται

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Sigma Mx=Ixx\dot{\omega}x-(Iyy-Izz)\omega y\omega z} \\ &\mathbf{\Sigma My=Iyy\dot{\omega}y-(Izz-Ixx)\omega z\omega x} \qquad \mathbf{(158)} \\ &\mathbf{\Sigma Mz=Izz\dot{\omega}z-Ixx-Iyy)\omega x\omega y} \end{aligned}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι γνωστές σαν εξισώσεις του Euler και είναι μεταξύ των πιο χρήσιμων εξισώσεων κίνησης της δυναμικής . [1]

Οι εξισώσεις του Euler χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν την κίνηση ενος α.σ.σώματος ,που περιστρέφεται γύρω απο ενα άξονα συμμετρίας .Πραγματικά ειναι βολικό να επιτρέπουμε στο σώμα να περιστρέφεται γύρω απο τον άξονα συμμετρίας του ,σχετικά με το σύστημα αναφοράς .Το σχ.75 δείχνει ενα τέτοιο σώμα ,που εχει περιστροφική συμμετρία γύρω απο τον άξονα z .Το υποθετικό επίπεδο περιστρέφεται μαζί με το σώμα ,ετσι ώστε η γωνιακή ταχύτητα ή σπίν του σώματος σχετικά με το χ-y-z μετριέται με το $\dot{\varphi}$.Προφανώς οι τιμές των ολοκληρωμάτων των ροπών αδρανείας ως προς οποιοδήποτε άξονα συντεταγμένων ,δεν είναι συναρτήσεις του φ ή του χρόνου t. Αν ονομάσουμε $\vec{\Omega}$ τη γωνιακή ταχύτητα των αξόνων συντεταγμένων ,τοτε οι συνιστώσες της ορμής απο την εξ.148 είναι :

$$\begin{aligned} &\mathbf{Hx=Ixx\omega x=Ixx\Omega x} \\ &\mathbf{Hy=Iyy\omega y=Iyy\Omega y} \\ &\mathbf{Hz=Izz\omega z=Izz(\Omega z+\varphi)} \end{aligned}$$

Οπου ωz είναι η συνολική γωνιακή ταχύτητα του σώματος ,γύρω απο τον άξονα z .Με τις αντικαταστάσεις αυτές οι συνιστώσες της εξ.156 γίνονται:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Sigma Mx=Ixx\dot{\Omega}x-(IyyIzz)\Omega y\Omega\zeta+Izz\varphi\Omega y} \\ &\mathbf{\Sigma My=Iyy\dot{\Omega}-(Izz-Ixx)\Omega z\Omega x-Izz\varphi\Omega x} \qquad \mathbf{(159)} \\ &\mathbf{\Sigma Mz=Izz\dot{\Omega}+Izz\ddot{\varphi}} \end{aligned}$$

Οπως και οι εξ.156,157 και 158 ,αυτές οι εξισώσεις του Euler εφαρμόζονται για ενα σύστημα με αρχή σε ενα σταθερό σημείο Ο ή στο κέντρο μάζας G.Αν διαλέξουμε σαν άξονα περιστροφής ,ενα άξονα συντεταγμένων εκτός απο τον z ,πρέπει να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις . [1]

Η κινητική ενέργεια Τ ενός γενικού συστήματος μάζας δίνεται απο την εξ.94 ,που δείχνει ξεκάθαρα τις χωριστές συνεισφορές στην Τ που οφείλονται στην μεταφορική κίνηση του συστήματος ,και στην κίνηση του συστήματος σχετικά με το κέντρο μάζας .Ο όρος της μεταφορικής κίνησης είναι :

$$\frac{1}{2}\mathbf{m}\bar{\boldsymbol{m}}^2=\frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\boldsymbol{r}}\ \dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}\mathbf{G}$$

Οπου $\ddot{\vec{r}}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{G}$ η γραμμική ορμή του σώματος .Ο σχετικός όρος της εξ.93 είναι $\Sigma\frac{1}{2}\text{mi}|\dot{\vec{\rho}}i|^2$,οπου $\vec{\rho}$I είναι το διάνυσμα θέσης του αντιπρωσοπευτικού υ.σ. μάζας mi σχετικά με το κέντρο μάζας ,σχ41 .Για ενα α.σ.σώμα ,με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$,η ταχύτητα του mi σχετικά με το κέντρο μάζας ειναι $\dot{\vec{\rho}}i=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$i ,και ο όρος της κινητικής ενέργειας για την κίνηση σχετικά με το κέντρο μάζας γίνεται :

$$\boldsymbol{\Sigma}\frac{1}{2}\mathbf{mi\rho i}\ \dot{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{\Sigma}\frac{1}{2}\mathbf{mi(\omega\times\rho i)\ (\omega\times\rho i)}$$

Η έκφραση αυτη μπορεί να συντομευτεί αν θυμηθούμε οτι τα σημεία του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου μπορούν να εναλλαγούν για το τριπλό μονόμετρο γινόμενο ,δηλαδή $\vec{P}\times\vec{Q}\ \vec{R}=\vec{P}\ \vec{Q}\times\vec{R}$

Αυτός ο μετασχηματισμός δίνει

$$\boldsymbol{\Sigma}\frac{1}{2}\mathbf{mi(\omega\times\rho i)\ (\omega\times\rho i)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{mi\rho i}\times[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho i}]=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\bar{\boldsymbol{H}}$$

Οπου $\bar{\bar{H}}$ είναι το ολοκλήρωμα που εκφράζεται απο την εξ.144 που παριστάνει και τη σχετική και την απόλυτη στροφορμή ως πρός το κέντρο μάζας .Αρα η γενική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενος α.σ.σώματος ,που κινείται με ταχύτητα κέντρου μάζας $\vec{\bar{v}}$ και γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ειναι

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}\mathbf{G}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\bar{\boldsymbol{H}} \qquad \mathbf{(160)}$$

Αντικαθιστωντας στην εξισωση αυτη την εκφραση για το $\bar{H}$ απο την εξ.147 και κανονας πραξεις εχουμε

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}\mathbf{m}\bar{\boldsymbol{u}}^2+\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{I}}\mathbf{xx}\boldsymbol{\omega x}^2+\bar{\boldsymbol{I}}\mathbf{yy}\boldsymbol{\omega y}^2+\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{zz\omega z}^2)$$

$$-(\bar{\boldsymbol{I}}\mathbf{xy\omega x\omega y}+\bar{\boldsymbol{I}}\mathbf{xz\omega x\omega z}+\bar{\boldsymbol{I}}\mathbf{yz\omega y\omega z})$$

(161)

Αν οι άξονες συμπίπτουν με τους κύριους άξονες αδρανείας η κινητική ενέργεια είναι

$$T=\frac{1}{2}m\overline{r^2}+\frac{1}{2}(\bar{I}xx\omega\chi^2+\bar{I}yy\omega y^2+\bar{I}zz\omega z^2) \qquad (162)$$

Οταν ένα σώμα στρέφεται γύρω απο ενα σταθερό σημείο ο ή υπάρχει ενα σημείο ο του σώματος ,που στιγμιαία εχει μηδενική ταχύτητα .η κινητική ενέργεια είναι T=Σ1/2mi$\dot{\vec{r}}$i$\dot{\vec{r}}$I Αυτη η έκφραση γράφεται και ως εξής :

$$T=\frac{1}{2}\omega Ho \qquad (163)$$

Οπου $\vec{H}$o είναι η στροφορμή ως πρός το O ,οπως μπορούμε να δούμε αν αντικαταστήσουμε το $\vec{\rho}$I στην προηγούμενη απόδειξη με $\vec{r}$i ,που είναι το διάνυσμα θέσης απο το O. [1]

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] J.L.Meriam ,Εκδόσεις ΠΛΑΙΣΙΟ , «ΔΥΝΑΜΙΚΗ»

[2] ΑΙΜ.ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης,«ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΑΡΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ»,Θεσσαλονίκη-1974

[3] ΓΙΑΝΝΗΣ Β. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ, Εκδόσεις SPIN , «ΦΥΣΙΚΗ Ι-ΜΗΧΑΝΙΚΗ»,Αθήνα

[4] AUGUST C.HELMHOZ,Prof.of Physics,University of California, Berkeley, «ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ – BERKELEYE»- Μεταφρασμένο για το Ε.Μ.Π.- Τόμος Ι , Εκδόσεις Τ.Ε.Ε.,ΑΘΗΝΑ -1977

[5]Δ.Ε ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥΝΑΚΟΣ,Γ.Α.ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ και Κ.Π ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ, ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (Κινηματική και Δυναμική του Υλικού Σημείου καί του Απολύτος Στερεού Σώματος), Εκδοση ΕΜΠ Αθήμα 1985

[6]Δ.Ε ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥΝΑΚΟΣ,Γ.Α.ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ, ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΣΤΑΤΙΚΗ, Εκδοση Γρ Φούντας Αθηνα 1992

[7] ΠΠΜ220,<<ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ>>,Διαλέξης 24-27,Πέτρος Κωμοδρομος , http/www.ucy.ac.cy//~petrosk.

[8]Δρ.Ιωαννης .Α.Αντώνιαδης ,<<Μηχανισμοι και Εισαγωγη στο Σχεδιασμο Μηχανωνων >> ΕΜΠ,Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών,2011-2012