ΑΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές με το Matlab

Αικατερίνη – Αθηνά Π. Κολλιοπούλου

Εισηγήτρια: Αναστασία Βελώνη, Καθηγήτρια

ΑΘΗΝΑ
ΜΑΪΟΣ 2016

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές με το Matlab

Αικατερίνη-Αθηνά Π. Κολλιοπούλου

Α.Μ. 40665

Εισηγήτρια:

Αναστασία Βελώνη, Καθηγήτρια

Εξεταστική Επιτροπή:

Ημερομηνία εξέτασης:

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ολοκληρώθηκε μετά από επίμονες προσπάθειες, σε ένα ενδιαφέρον γνωστικό αντικείμενο, όπως αυτό των Χρηματοοικονομικών Εφαρμογών με χρήση του Matlab. Την προσπάθειά μου αυτή υποστήριξε η επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, την οποία θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την πολύτιμη στήριξη και κατανόηση που μου έδειξε αυτά τα έξι χρόνια σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μεγάλη υπολογιστική δύναμη και ευχρηστία του Matlab το καθιστά ιδιαίτερα αποτελεσματικό στην επίλυση απλών και σύνθετων χρηματοοικονομικών εφαρμογών. Η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία, μέσα από μια συστηματική παρουσίαση των βασικών λειτουργιών του Matlab και των χρηματοοικονομικών εργαλειοθηκών του, έχει στόχο να δείξει πως χρησιμοποιείται το Matlab σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές όπως η διαχείριση χαρτοφυλακίου, η αποτίμηση χρεογράφων σταθερού εισοδήματος και παραγώγων, καθώς και ανάλυση χρηματοροών.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Μαθηματικά, Οικονομικά, Χρηματοοικονομικά
ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Matlab, χαρτοφυλάκιο, ομόλογο, μετοχή, επιτόκιο

ABSTRACT

The great computational power and usableness of Matlab both makes it particularly effective in solving simple and complex Applied Finance. The specific thesis, through a systematic presentation of the basic functions of Matlab and it' s financial toolbox, it aims to show how Matlab can be used in financial applications such as portfolio management, valuation of fixed income securities and derivatives as well as cash flow analysis.

SCIENTIFIC AREA: Mathematics, Finances

KEYWORDS: Matlab, portfolio, homology, stock, interest rate

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

Matlab Matrix laboratory

VaR Value at Risk

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περιγραφή του αντικειμένου της πτυχιακής εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η υλοποίηση και παρουσίαση χρηματοοικονομικών εφαρμογών με το Matlab, με στόχο την κατανόηση και χρησιμοποίηση των χρηματοοικονομικών εργαλειοθηκών του λογισμικού σε διάφορα χρηματοοικονομικά ζητήματα, ώστε να μπορούν να ληφθούν αποφάσεις μέσα από σωστούς υπολογισμούς και αξιόπιστα αποτελέσματα.

Σκοπός είναι, μέσα από χρηματοοικονομικά υποδείγματα τα οποία δεν είναι τίποτα περισσότερο από μαθηματικά εργαλεία, να μπορούμε να ελέγξουμε το χρηματοοικονομικό μέρος των δραστηριοτήτων μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού και να πάρουμε τις σωστές αποφάσεις.

Τέλος, με την χρήση παραδειγμάτων και με την ανάπτυξη κατάλληλου κώδικα καθώς, και χρησιμοποίηση των χρηματοοικονομικών εργαλειοθηκών του Matlab, γίνεται κατανοητή η επίλυση των διαφόρων χρηματοοικονομικών ζητημάτων.

1.2 Διάρθρωση της πτυχιακής εργασίας

Στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας αρχικά γίνεται μια περιεκτική παρουσίαση των βασικών λειτουργιών του Matlab στο Κεφάλαιο 2. Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται θέματα που αφορούν το χαρτοφυλάκιο, στο Κεφάλαιο 4 εξετάζονται θέματα που που σχετίζονται με τα χρεόγραφα σταθερού εισοδήματος, ενώ στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται βασικές μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και στρατηγικές αντιστάθμισης κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζεται το πρόβλημα της χρονικής αξίας του χρήματος και τέλος, ακολουθούν το Παράρτημα, με μια συνοπτική αναφορά σε πίνακες και ορίζουσες, και η Βιβλιογραφία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία συνοπτική αλλά περιεκτική παρουσίαση των βασικών λειτουργιών του Matlab, με σκοπό την εξοικείωση και κατανόηση του τρόπου λειτουργίας του.

2.1 Τι είναι το Matlab

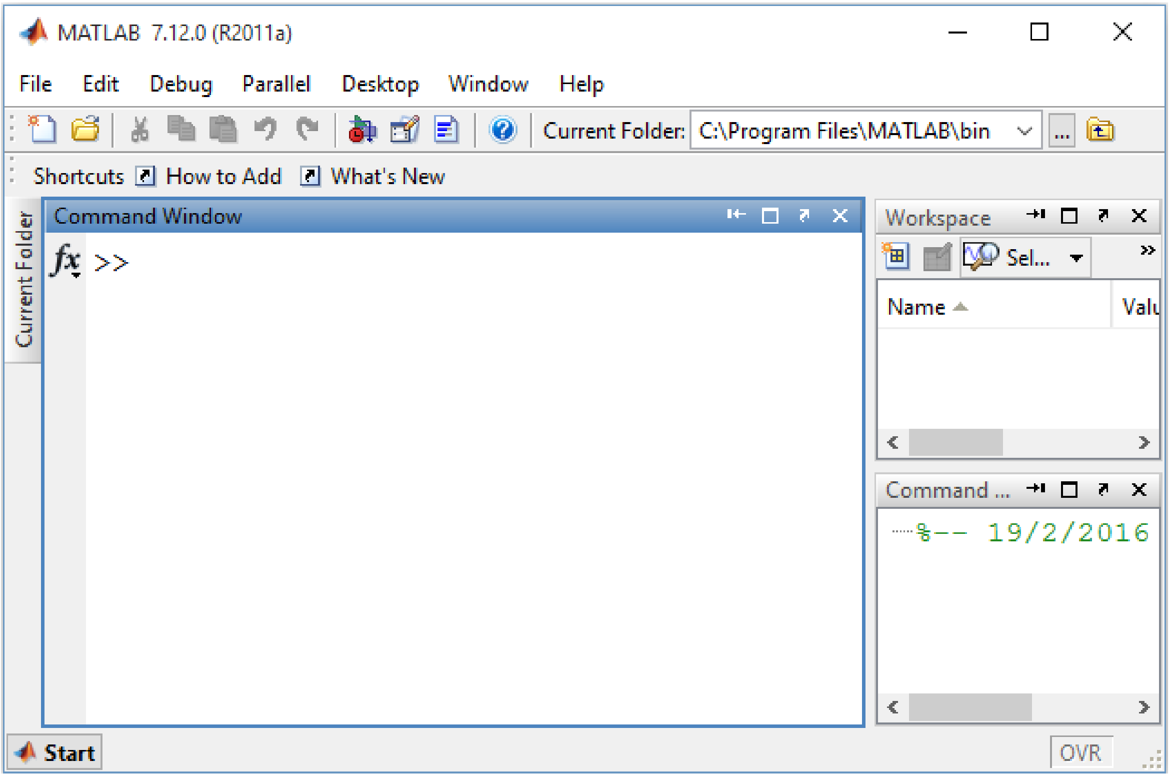
Το Matlab είναι ένα πρόγραμμα βασισμένο στην γραμμική άλγεβρα, το οποίο αναπτύχθηκε από την εταιρία Math Works Inc. Η ονομασία του προέρχεται από τις λέξεις Matrix Laboratory, καθώς είχε αρχικά δημιουργηθεί ως ένα πρόγραμμα για υπολογισμούς με πίνακες. Με την πάροδο των χρόνων το Matlab εξελίχθηκε σε ένα ισχυρότατο εργαλείο και πλέον αποτελεί ένα από τα σύγχρονα προϊόντα λογισμικού ανάπτυξης μιας πληθώρας εφαρμογών. Επιπλέον, η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι αρκετά ισχυρή και περιγραφική ώστε να επιτρέπει τη μοντελοποίηση των διαφόρων συστημάτων και μάλιστα με χρήση κώδικα που μαθαίνεται εύκολα. Τέλος, οι εργαλειοθήκες που διαθέτει, καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων.

2.2 Το περιβάλλον εργασίας του Matlab

Κάθε φορά που ο χρήστης ξεκινάει το Matlab εμφανίζεται στην οθόνη το περιβάλλον εργασίας του Matlab με τα ακόλουθα προεπιλεγμένα παράθυρα:

- **Command Window (Παράθυρο Εντολών):** Το παράθυρο αυτό αποτελεί το βασικό του Matlab για την εισαγωγή δεδομένων, την εκτέλεση συναρτήσεων και την απεικόνιση των αποτελεσμάτων.
- **Current Folder (Τρέχων Κατάλογος):** Αυτό το παράθυρο εμφανίζει τα περιεχόμενα του τρέχοντος καταλόγου. Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να αλλάξει τον τρέχοντα κατάλογο, να ανοίξει και να επεξεργαστεί τα αρχεία και τις μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν καθώς και τις μεταβλητές που υπολογίζονται στον χώρο εργασίας.

- **Workspace (Χώρος Εργασίας):** Στο παράθυρο αυτό αποθηκεύονται όλες οι μεταβλητές και οι πίνακες που δημιουργούνται μέσω των εντολών που δίνουμε από το παράθυρο εντολών.
- **Command History (Ιστορικό Εντολών):** Το παράθυρο αυτό εμφανίζει τις πιο πρόσφατες εντολές που έχουμε εισάγει στο παράθυρο εντολών καθώς και εντολές που δόθηκαν κατά την χρήση του προγράμματος τις προηγούμενες φορές.



Εικόνα 2.1 Η επιφάνεια εργασίας του Matlab

2.3 Βασικές αριθμητικές πράξεις

Το Matlab, εκτός από την δυνατότητά του να επιλύει σύνθετες πράξεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν μια απλή αριθμομηχανή. Ακολουθεί ο πίνακας 2.1.

Πίνακας 2.1 Σύμβολα βασικών αριθμητικών πράξεων

Πράξη	Σύμβολο	Παράδειγμα
Πρόσθεση	+	a + b
Αφαίρεση	-	a – b
Πολλαπλασιασμός	*	a * b

Αριστερή Διαίρεση	/	a / b
Δεξιά Διαίρεση	\	a \ b
Ύψωση σε Δύναμη	^	a ^ b

Στο Matlab ισχύει η προτεραιότητα εκτέλεσης των πράξεων. Για παράδειγμα, αν έχουμε μια αριθμητική παράσταση στην οποία υπάρχουν όλες οι βασικές αριθμητικές πράξεις καθώς και πράξεις μέσα σε παρενθέσεις, τότε εκτελούνται πρώτα οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, ακολουθεί η εκτέλεση της ύψωσης σε δύναμη, στην συνέχεια εκτελούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις με την ίδια προτεραιότητα και τέλος εκτελούνται οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις με την ίδια προτεραιότητα.

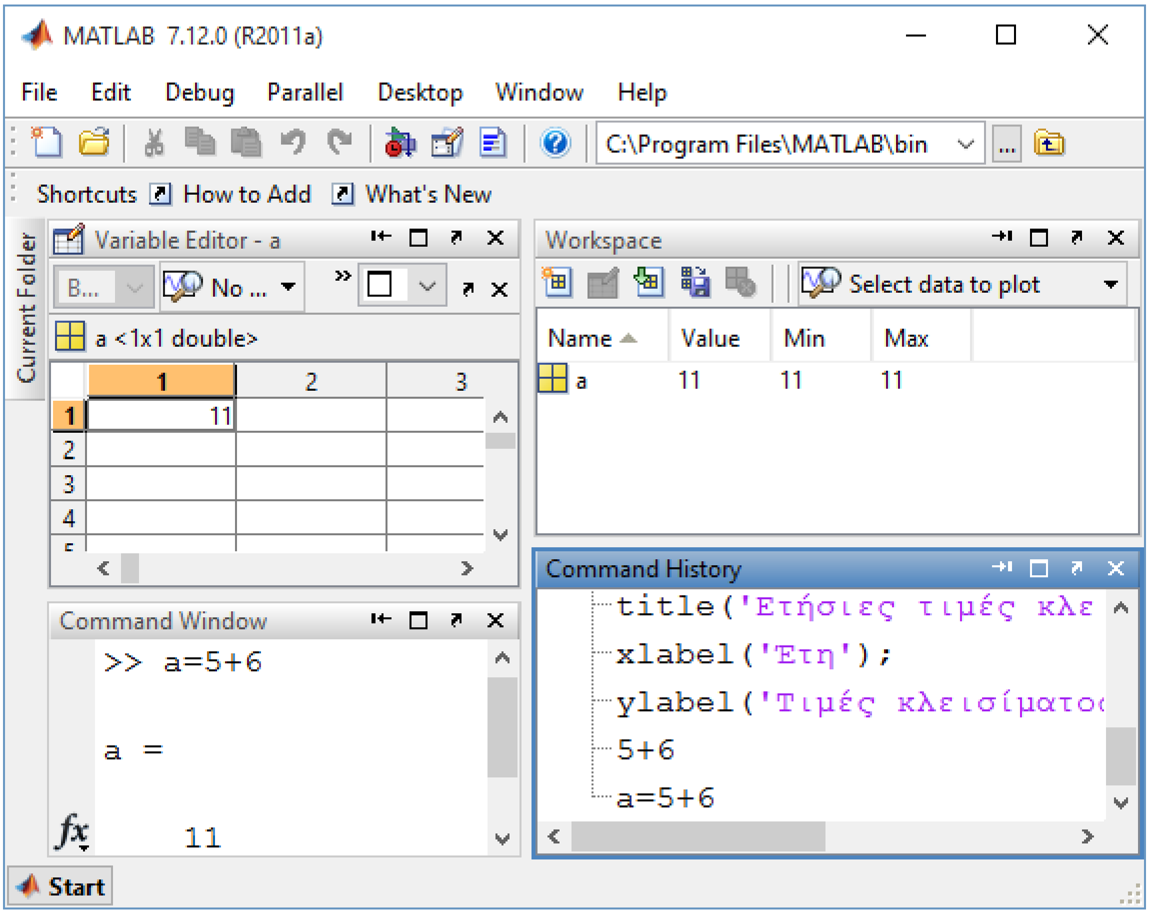
2.4 Εισαγωγή εντολών

Στο Matlab μια εντολή εισάγεται πληκτρολογώντας στο παράθυρο εντολών δεξιά από το σύμβολο προτροπής **>>** και ολοκληρώνεται με το πάτημα του πλήκτρου Enter. Σε περίπτωση που δεν ορίσουμε μεταβλητή, το αποτέλεσμα εμφανίζεται στην οθόνη μετά την έκφραση ans (answer) και χρησιμοποιείται για να αποθηκευτεί το αποτέλεσμα της εντολής. Ακολουθεί ο πίνακας 2.2.

Πίνακας 2.2 Εισαγωγή εντολών

Εντολή	**Αποτέλεσμα**	**Περιγραφή**
>> 5+6	ans = 11	Εμφάνιση αποτελέσματος χωρίς ορισμό μεταβλητής
>> a=5+6	a = 11	Εμφάνιση αποτελέσματος με ορισμό μεταβλητής

Πλέον η μεταβλητή a εμφανίζεται στο παράθυρο του χώρου εργασίας και αν την επιλέξουμε, ανοίγει ο Variable Editor (επεξεργαστής μητρών), από όπου μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της μεταβλητής.



Εικόνα 2.2 Η εμφάνιση της μεταβλητής στο παράθυρο του χώρου εργασίας και επεξεργασία της μέσω του επεξεργαστή μητρών(Variable Editor).

Σε μια γραμμή μπορούν να πληκτρολογηθούν περισσότερες από μία εντολές τις οποίες μπορούμε να τις χωρίσουμε με το ελληνικό κόμμα ή το ελληνικό ερωτηματικό. Ακολουθεί ο πίνακας 2.3.

Πίνακας 2.3 Εισαγωγή περισσότερων από μία εντολές σε μία γραμμή

Εντολή	Αποτέλεσμα	Περιγραφή
>> a=2+3	a = 5	Εκχώριση αποτελέσματος στην μεταβλητή a
>> b=a+5;	b = 10	Εκχώριση αποτελέσματος στην μεταβλητή b. Το αποτέλεσμα δεν

		εμφανίζεται στο παράθυρο εντολών
>> c=a+b	c = 15	Εκχώριση αποτελέσματος στην μεταβλητή c
>> d=a+b+c	d = 30	Εκχώριση αποτελέσματος στην μεταβλητή d
>> a=2+3, b=a+5; c=a+b, d=a+b+c	a = 5 c = 15 d = 30	Εισαγωγή περισσότερων από μία εντολές σε μία γραμμή χωρίζοντάς τις με κόμμα ή ελληνικό ερωτηματικό

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της εντολής b=a+5; δεν εμφανίστηκε στο παράθυρο εντολών, όμως η εκτέλεση της εντολής πραγματοποιήθηκε. Αυτό συμβαίνει διότι, η εντολή τελειώνει με το ελληνικό ερωτηματικό. Επομένως, όταν εκτελούμε μία εντολή και της βάζουμε στο τέλος το ελληνικό ερωτηματικό, η εντολή αυτή θα εκτελείται όμως δεν θα εμφανίζει το αποτέλεσμά της στο παράθυρο εντολών. Μπορούμε όμως να δούμε την τιμή της συγκεκριμένης εντολής, αρκεί να πληκτρολογήσουμε στο παράθυρο εντολών την μεταβλητή της.

2.5 Ορισμός μεταβλητών

Στο Matlab μπορούμε να ορίσουμε μεταβλητές χρησιμοποιώντας αλφαριθμητικούς χαρακτήρες και χαρακτήρες υπογράμμισης(_). Το Matlab δεν δέχεται ελληνικούς χαρακτήρες για τον ορισμό των μεταβλητών, ενώ θα πρέπει ο πρώτος χαρακτήρας μιας μεταβλητής να είναι γράμμα του λατινικού αλφαβήτου. Επίσης, γίνεται διάκριση μεταξύ πεζών και κεφαλαίων, συνεπώς η μεταβλητή a είναι διαφορετική από την μεταβλητή A. Ακόμη, το όνομα μιας μεταβλητής θα πρέπει να είναι μοναδικό, να μην είναι δηλαδή ίδιο με το όνομα κάποιας άλλης μεταβλητής ή συνάρτησης που έχει ήδη οριστεί στο Matlab. Τέλος, σε μια μεταβλητή μπορούμε να καταχωρήσουμε και κείμενο χρησιμοποιώντας τα μονά εισαγωγικά (΄ ΄).

2.6 Μορφή μεταβλητών

Στο Matlab τα αποτελέσματα στο παράθυρο εντολών εμφανίζονται με ενδιάμεσες κενές γραμμές, ενώ οι αριθμοί με τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Αυτό συμβαίνει λόγω προεπιλεγμένης μορφής απεικόνισης τόσο των αποτελεσμάτων όσο και των αριθμών. Για να τροποποιήσουμε την μορφή απεικόνισής τους, το Matlab μας παρεχει την εντολή format με την οποία μπορούμε να κάνουμε τις κατάλληλες μορφοποιήσεις. Πληκτρολογώντας στο παράθυρο εντολών **help format** εμφανίζονται στην οθόνη όλες οι επιλογές μορφοποίησης που διαθέτει το Matlab. Ακολουθεί ο πίνακας 2.4 με τις βασικές εντολές μορφοποίησης.

Πίνακας 2.4 Εντολές μορφοποίησης απεικόνισης μεταβλητών

Εντολή	Περιγραφή	Παράδειγμα
Format short	Εμφάνιση αριθμών με 4 δεκαδικά ψηφία. (Προεπιλεγμένη μορφοποίηση στο Matlab)	>> 127/9 ans = 14.1111
Format long	Εμφάνιση αριθμών με 15 δεκαδικά ψηφία.	>> 127/9 ans = 14.111111111111110
Format short e	Εκθετική ή επιστημονική μορφή αριθμών με 4 δεκαδικά ψηφία.	>> 127/9 ans = 1.4111e+01
Format long e	Εκθετική ή επιστημονική μορφή αριθμών με 15 δεκαδικά ψηφία.	>> 127/9 ans = 1.411111111111111e+01
Format bank	Εμφάνιση αριθμών με 2 δεκαδικά ψηφία.	>> 127/9 ans = 14.11

Μια δεύτερη επιλογή, για την τροποποίηση των παραμέτρων εμφάνισης, είναι να επιλέξουμε **File-> Preferences** και εμφανίζεται το παράθυρο για να γίνουν οι τροποποιήσεις.

2.7 Βασικές μαθηματικές συναρτήσεις

Το Matlab μας παρέχει ένα πλήθος ενσωματωμένων συναρτήσεων για την υλοποίηση ενός μεγάλου αριθμού μαθηματικών υπολογισμών. Κάθε συνάρτηση έχει ένα όνομα και μία παράμετρο μέσα σε παρενθέσεις. Στον πίνακα 2.5 παρουσιάζονται οι βασικές μαθηματικές συναρτήσεις.

Πίνακας 2.5 Παρουσίαση βασικών μαθηματικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	**Περιγραφή**	**Παράδειγμα**
exp(x)	Υπολογισμός της δύναμης e^x	>> exp(-2) ans = 0.1353
sqrt(x)	Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας	>> sqrt(15) ans = 3.8730
abs(x)	Υπολογισμός απόλυτης τιμής	>> abs(-19) ans = 19
log(x)	Υπολογισμός φυσικού λογάριθμου με βάση το e	>> log(100) ans = 4.6052
log10(x)	Υπολογισμός φυσικού λογάριθμου με βάση το 10	>> log10(100) ans = 2
sin(x)	Υπολογίζει το ημίτονο του x, όπου το x είναι σε ακτίνια	>> sin(pi/4) ans = 0.7071
sind(x)	Υπολογίζει το ημίτονο του x, όπου το x είναι σε μοίρες	>> sind(45) ans = 0.7071

asin(x)	Υπολογίζει το τόξο ημιτόνου του x	>> asin(0.5) ans = 0.5236
sinh(x)	Υπολογίζει το υπερβολικό ημίτονο του x	>> sinh(0.1) ans = 0.1002
cos(x)	Υπολογίζει το συνημίτονο του x, όπου το x είναι σε ακτίνια	>> cos(pi) ans = -1
cosd(x)	Υπολογίζει το συνημίτονο του x, όπου το x είναι σε μοίρες	>> cosd(60) ans = 0.5000
acos(x)	Υπολογίζει το τόξο συνημιτόνου του x	>> acos(-1) ans = 3.1416
cosh(x)	Υπολογίζει το υπερβολικό συνημίτονο του x	>> cosh(0.3) ans = 1.0453
tan(x)	Υπολογίζει την εφαπτομένη του x, όπου το x είναι σε ακτίνια	>> tan(pi/4) ans = 1.0000
tand(x)	Υπολογίζει την εφαπτομένη του x, όπου το x είναι σε μοίρες	>> tand(45) ans = 1.0000
atan(x)	Υπολογίζει το τόξο εφαπτομένης του x	>> atan(1) ans = 0.7854
tanh(x)	Υπολογίζει την υπερβολική εφαπτομένη του x	>> tanh(pi/4) ans = 0.6558
rem(x,y)	Εμφανίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης x/y. Αν το y=0 τότε επιστρέφει NaN(μη αριθμός)	>> rem(23,3) ans = 2

round(x)	Πραγματοποιεί στρογγύλευση στον πλησιέστερο ακέραιο	>> round(28/9) ans = 3
fix(x)	Πραγματοποιεί στρογγύλευση προς το μηδέν	>> fix(23/3) ans = 7
ceil(x)	Πραγματοποιεί στρογγύλευση προς το συν άπειρο	>> ceil(24/9) ans = 3
floor(x)	Πραγματοποιεί στρογγύλευση προς το μείον άπειρο	>> floor(-16/7) ans = -3
factorial(x)	Υπολογίζει το παραγοντικό του x	>> factorial(4) ans = 24

2.8 Διανύσματα

Ένα διάνυσμα είναι μία ειδική περίπτωση πινάκων και ορίζεται στο Matlab αντιστοιχίζοντας τα στοιχεία του διανύσματος σε μία μεταβλητή. Στοιχείο ενός διανύσματος μπορεί να αποτελεί ένας αριθμός, συναρτήσεις, μία μεταβλητή η οποία έχει ήδη καθοριστεί ή μία αριθμητική παράσταση. Στα διανύσματα γραμμής τα στοιχεία χωρίζονται μεταξύ τους με κενά ή κόμματα, ενώ τα διανύσματα στήλης χωρίζονται μεταξύ τους με το ελληνικό ερωτιματικό(;). Η γενική μορφή της εντολής για την δημιουργία ενός διανύσματος είναι:

Όνομα_μεταβλητής = [στοιχείο1 στοιχείο2 … στοιχείοn]

Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε το διάνυσμα γραμμής k με στοιχεία τους αριθμούς 1,2,3,4,5. Στο παράθυρο εντολών του Matlab μετά το σύμβολο προτροπής(>>), πληκτρολογούμε την μεταβλητή k, το σύμβολο της ισότητας(=), ανοίγουμε αριστερή αγκύλη, πληκτρολογούμε τα στοιχεία με κενά διαστήματα ή με κόμματα και τέλος πληκτρολογούμε δεξιά αγκύλη. Τα ίδια κάνουμε και στην περίπτωση διανύσματος στήλης m με στοιχεία 6,7,8,9,10, αλλά αντί για κενά ή κόμματα μεταξύ των στοιχείων, θα πρέπει τα στοιχεία στην περίπτωση αυτή να χωρίζονται μεταξύ τους με ελληνικό ερωτηματικό. Ακολουθεί ο πίνακας 2.6 με τα αντίστοιχα παραδείγματα.

Πίνακας 2.6 Παράδειγμα διανύσματος γραμμής και στήλης

Εντολή	Αποτέλεσμα	Περιγραφή
>> k=[1 2 3 4 5]	k = 1 2 3 4 5	Διάνυσμα γραμμής 5 στοιχείων με όνομα k. Τα στοιχεία χωρίζονται μεταξύ τους με κενά.
>> k=[1,2,3,4,5]	k = 1 2 3 4 5	Τα στοιχεία χωρίζονται μεταξύ τους με κόμματα και το αποτέλεσμα παραμένει ίδιο.
>> m=[6;7;8;9;10]	m = 6 7 8 9 10	Διάνυσμα στήλης 5 στοιχείων με όνομα m. Τα στοιχεία χωρίζονται μεταξύ τους με ελληνικό ερωτητματικό.
>> m=[6 7 8 9 10]	m = 6 7 8 9 10	Δεύτερος τρόπος δημιουργίας διανύσματος στήλης, χωρίς την χρήση του ελληνικού ερωτηματικού.

Σε περίπτωση που θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι μία ακολουθία αριθμών που ισαπέχουν μεταξύ τους, το Matlab μας δίνει αυτή την επιλογή χρησιμοποιώντας την παρακάτω εντολή:

όνομα_μεταβλητής = k:l:m

όπου **k** είναι ο πρώτος αριθμός, **l** είναι η απόσταση μεταξύ αυτών των αριθμών και **m** είναι ο τελευταίος αριθμός.

Επιπλέον, το Matlab μας παρέχει την συνάρτηση **linspace(a,b)** η οποία δημιουργεί ένα διάνυσμα γραμμής με 100 στοιχεία τα οποία ισαπέχουν μεταξύ τους, με πρώτο στοιχείο το a και τελευταίο στοιχείο το b. Εάν όμως θέλουμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος, χρησιμοποιούμε και μια τρίτη παράμετρο στην παραπάνω συνάρτηση και θα γίνει linspace(a,b,c), με το c να προσδιορίζει το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος.

Τέλος, τα στοιχεία του διανύσματος προσδιορίζονται με δείκτες. Ο δείκτης που προσδιορίζει το πρώτο στοιχείο του διανύσματος έχει την τιμή 1 και για να αναφερθούμε σε κάποια θέση διανύσματος πληκτρολογούμε το όνομα του διανύσματος, ανοίγουμε αριστερή παρένθεση, πληκτρολογούμε τον αριθμό θέσης όπου βρίσκεται το στοιχείο που θέλουμε να εμφανιστεί και πληκτρολογούμε δεξιά παρένθεση. Ακολουθεί ο πίνακας 2.7 με παραδείγματα σχετικά με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω.

Πίνακας 2.7 Παραδείγματα κατανόησης διανυσμάτων

Εντολή	**Αποτέλεσμα**	**Περιγραφή**
>> a=[1:8]	a = 1 2 3 4 5 6 7 8	Διάνυσμα γραμμής με όνομα a, με στοιχεία τους αριθμούς από το 1 έως το 8
>> a(6)	ans = 6	Εμφάνιση του έκτου στοιχείου του διανύσματος a
>> a(1:4)	ans = 1 2 3 4	Εμφάνιση των τεσσάρων πρώτων στοιχείων του διανύσματος a
>> b=a(2:2:8)	b = 2 4 6 8	Δημιουργία του διανύσματος b, χρησιμοποιώντας ως στοιχεία του το δεύτερο στοιχείο του διανύσματος a και ανεβαίνοντας ανά δύο μέχρι και το όγδοο στοιχείο

>> c=linspace(1,10,4)	c = 1 4 7 10	Δημιουργία διανύσματος τεσσάρων στοιχείων, που ισαπέχουν μεταξύ τους, από το 1 έως το 10

Για να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων, απαραίτητη είναι η προϋπόθεση τα διανύσματα να έχουν το ίδιο μέγεθος. Οι πράξεις μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι συνήθως πράξεις ανά στοιχείο. Στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της ύψωσης σε δύναμη για να κάνουμε πράξη στοιχείου προς στοιχείο θα πρέπει πριν το αντίστοιχο σύμβολο κάθε πράξης να βάζουμε μια τελεία «**.**». Ακολουθεί ο Πίνακας 2.8 με σχετικά παραδείγματα.

Πίνακας 2.8 Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

Εντολή	**Αποτέλεσμα**	**Περιγραφή**
>> a=[1 3 8 10 13]	a = 1 3 8 10 13	Διάνυσμα γραμμής 5 στοιχείων με όνομα a.
>> b=[2 5 6 7 8]	b = 2 5 6 7 8	Διάνυσμα γραμμής 5 στοιχείων με όνομα b.
>> p=a+b	p = 3 8 14 17 21	Πρόσθεση στοιχείου με στοιχείο μεταξύ των διανυσμάτων a και b.
>> m=a-b	m = -1 -2 2 3 5	Αφαίρεση στοιχείου με στοιχείο, μεταξύ των διανυσμάτων a και b.
>> a.*b	ans = 2 15 48 70 104	Πολλαπλασιασμός στοιχείου με στοιχείο, μεταξύ των διανυσμάτων a και b.
>> a./b	ans = 0.5000 0.6000 1.3333 1.4286 1.6250	Διαίρεση στοιχείου με στοιχείο, μεταξύ των διανυσμάτων a και b.

>> a.\b	ans = 2.0000 1.6667 0.7500 0.7000 0.6154	Αριστερή διαίρεση στοιχείου με στοιχείο, μεταξύ των διανυσμάτων a και b.
>> a.^b	ans = 1 243 262144 10000000 815730721	Ύψωση κάθε στοιχείου του διανύσματος a στο αντίστοιχο στοιχείο του b.

2.9 Πίνακες

Το Matlab είναι ένα εργαλείο προγραμματισμού στο οποίο όλες οι ποσότητες θεωρούνται πίνακες. Στο Matlab οι πίνακες περικλείονται σε αγκύλες [ ] και μπορούν να εισαχθούν με τρεις τρόπους.

Ο **πρώτος τρόπος** είναι να γράψουμε τα στοιχεία μιας γραμμής του πίνακα χρησιμοποιώντας κενό ή κόμμα. Στην συνέχεια για να αλλάξουμε γραμμή χρισιμοποιούμε το ελληνικό ερωτηματικό (;) και συνεχίζουμε γράφοντας τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής κλπ.

Ένας **δεύτερος τρόπος** για να ορίσουμε πίνακες, είναι μετά το άνοιγμα της πρώτης αγκύλης να γράψουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, να πατήσουμε Enter και να αλλάξουμε γραμμή όπου θα γράψουμε τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να ολοκληρώσουμε τον πίνακά μας. Όταν ολοκληρώσουμε τον πίνακα, κλείνουμε την αγκύλη και πατώντας Enter ο πίνακας είναι έτοιμος.

Τέλος ένας τρίτος τρόπος κατάλληλος για πίνακες των οποίων οι γραμμές περιέχουν στοιχεία τα οποία βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, είναι να ορίσουμε κάθε γραμμή του πίνακα ως διάνυσμα γραμμής χρησιμοποιώντας το πρώτο στοιχείο, την απόσταση δύο διαδοχικών στοιχείων (ή βήμα) και το τελευταίο στοιχείο με διαχωριστικό σύμβολο το ‘**:**’. Για να αλλάζουμε γραμμές χρησιμοποιούμε το ελληνικό ερωτηματικό (;).

2.9.1 Πράξεις με πίνακες

Για να πραγματοποιήσουμε πράξεις με πίνακες στο Matlab χρησιμοποιούμε τα σύμβολα των βασικών αριθμητικών πράξεων του πίνακα 2.1 και ισχύουν οι περιορισμοί που αναφέρονται στην άλγεβρα πινάκων. Επομένως, οι πράξεις πινάκων εκτελούνται εφόσον οι πίνακες έχουν τις διαστάσεις που απαιτεί η κάθε πράξη, αλλά ο περιορισμός αυτός δεν ισχύει στην περίπτωση πράξεων αριθμού με πίνακα.

2.9.1.1 Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων

Το άθροισμα δύο πινάκων είναι ένας νέος πίνακας που κάθε στοιχείο του προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων. Από την άλλη, η πράξη της αφαίρεσης δύο πινάκων, πραγματοποιείται με την αφαίρεση των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων. Για να πραγματοποιηθούν οι παραπάνω πράξεις πινάκων, πρέπει οι πίνακες να είναι ίδιων διαστάσεων. Τέλος, αν ένας αριθμός προστεθεί ή αφαιρεθεί από έναν πίνακα, ο αριθμός προστίθεται ή αφαιρείται από όλα τα στοιχεία του πίνακα.

Πίνακας 2.9 Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων

Εντολή	Αποτέλεσμα	Περιγραφή
>> A=[1 2 3;5 6 7;9 10 11]	A = 1 2 3 5 6 7 9 10 11	Ορισμός πίνακα Α διαστάσεων 3x3.
>> B=[2 4 6;1 3 5;13 14 16]	B = 2 4 6 1 3 5 13 14 16	Ορισμός πίνακα Β διαστάσεων 3x3.
>> C=A+B	C = 3 6 9 6 9 12 22 24 27	Άθροισμα των πινάκων Α και Β.
>> D=A-B	D = -1 -2 -3 4 3 2 -4 -4 -5	Αφαίρεση των πινάκων Α και Β.

>> E=5+A	E = 6 7 8 10 11 12 14 15 16	Πρόσθεση του αριθμού 5 στον πίνακα Α. Προκύπτει ο πίνακας Ε.
>> F=E-2	F = 4 5 6 8 9 10 12 13 14	Αφαίρεση του αριθμού 2 από τον πίνακα Ε. Προκύπτει ο πίνακας F.

2.9.1.2 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Για να πραγματοποιηθεί πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο πινάκων, θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Για παράδειγμα, από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα **A** διαστάσεων (2x4) με τον πίνακα **B** διαστάσεων (4x3) προκύπτει ένας νέος πίνακας **C** ο οποίος έχει αριθμό γραμμών, ίσο με τον αριθμό γραμμών του πίνακα A και αριθμό στηλών ίσο με τον αριθμό στηλών του πίνακα B. Οπότε ο πίνακας C θα είναι ένας πίνακας διαστάσεων (2x3). Τέλος, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία ενός πίνακα με έναν αριθμό.

Πίνακας 2.10 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Εντολή	Αποτέλεσμα	Περιγραφή
>> A=[2 4 6 8;1 3 5 7]	A = 2 4 6 8 1 3 5 7	Ορισμός πίνακα A διαστάσεων 2x4
>> B=[1 2 3;4 5 6;7 8 9;10 11 12]	B = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	Ορισμός πίνακα B διαστάσεων 4x3
>> C=A*B	C = 140 160 180 118 134 150	Πολλαπλασιασμός των πινάκων A και B. Προκύπτει ο πίνακας C.

>> D=3*B	D = 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36	Πολλαπλασιασμός του πίνακα B με τον αριθμό 3. Προκύπτει ο πίνακας D.

Στην περίπτωση διανυσμάτων, ο πολλαπλασιασμός εκτελείται εφόσον τα διανύσματα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος γραμμή με ένα διάνυσμα στήλη, το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο εσωτερικό γινόμενό τους. Από την άλλη, ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος στήλη με ένα διάνυσμα γραμμή δίνει έναν πίνακα διαστάσεων nxn που αντιστοιχεί στο εξωτερικό γινόμενό τους.

2.9.1.3 Δυνάμεις πινάκων

Για να υψώσουμε έναν πίνακα σε μια δύναμη, ο πίνακας αυτός θα πρέπει να είναι τετραγωνικός (δηλαδή να έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών). Αυτό συμβαίνει γιατί δύναμη σε πίνακα αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό του πίνακα με τον εαυτό του όσες φορές είναι η δύναμη. Εάν θέλουμε να υψώσουμε ξεχωριστά το κάθε στοιχείο ενός πίνακα σε κάποια δύναμη, εφαρμόζουμε πράξη στοιχείου με στοιχείο χρησιμοποιώντας την τελεία πριν το σύμβολο της δύναμης.

Πίνακας 2.11 Δυνάμεις Πινάκων

Εντολή	Αποτέλεσμα	Επεξήγηση
>> A=[1 3 5 ;2 4 6;7 8 9]	A = 1 3 5 2 4 6 7 8 9	Ορισμός του πίνακα Α διαστάσεων 3x3.
>> A^2	ans = 42 55 68 52 70 88 86 125 164	Ύψωση του πίνακα Α στο τετράγωνο.

>> A*A	ans = 42 55 68 52 70 88 86 125 164	Πολλαπλασιασμός του πίνακα A δύο φορές με τον εαυτό του. Παρατηρούμε ότι είναι ίδιο το αποτέλεσμα με A^2.
>> A.^2	ans = 1 9 25 4 16 36 49 64 81	Ύψωση κάθε στοιχείου του πίνακα A στο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό σε σχέση με τα δύο παραπάνω.

2.9.1.4 Αντίστροφος πίνακας

Ο αντίστροφος πίνακας ενός πίνακα A έχει την ιδιότητα ότι αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα A, το γινόμενό τους είναι ο μοναδιαίος πίνακας **I,** δηλαδή ένας πίνακας που αποτελείται από άσσους στην κύρια διαγώνιο και μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις του πίνακα. Η συνάρτηση που μας δίνει τον αντίστροφο ενός πίνακα A είναι η **inv(A)** ή γράφοντας $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Πίνακας 2.12 Αντίστροφος πίνακας

Εντολή	**Αποτέλεσμα**	**Επεξήγηση**
>> A=[1 1 1;2 3 4;1 3 2]	A = 1 1 1 2 3 4 1 3 2	Ορισμός του πίνακα A διαστάσεων 3x3.
>> B=inv(A)	B = 2.0000 -0.3333 -0.3333 0 -0.3333 0.6667 -1.0000 0.6667 -0.3333	Ο αντίστροφος του πίνακα A.

>> C=A^-1	C = 2.0000 -0.3333 -0.3333 0 -0.3333 0.6667 -1.0000 0.6667 -0.3333	Δεύτερος τρόπος εύρεσης του αντιστρόφου του πίνακα Α.
>> I=A*B	D = 1.0000 0.0000 -0.0000 0 1.0000 0 0 0 1.0000	Το γινόμενο του πίνακα Α με τον αντίστροφό του, δίνει σαν αποτέλεσμα τον μοναδιαίο πίνακα **I**.
>> I=B*A	E = 1.0000 0.0000 0.0000 0 1.0000 0 -0.0000 0 1.0000	Στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για το γινόμενο πινάκων.

2.9.1.5 Ορίζουσα πίνακα

Για να μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα θα πρέπει να είναι τετραγωνικός (δηλαδή να έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών) αλλά και να είναι αντιστρέψιμος. Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν η ορίζουσα αυτού είναι διάφορη του μηδενός. Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα Α χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **det(A)**.

Πίνακας 2.13 Ορίζουσα πίνακα

Εντολή	Αποτέλεσμα	Περιγραφή
>> A=[1 1 1;2 3 4;1 3 2]	A = 1 1 1 2 3 4 1 3 2	Ορισμός του πίνακα Α διαστάσεων 3x3.
>> det(A)	ans = -3	Υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακα Α. Η τιμή της είναι διάφορη του μηδενός άρα ο Α είναι αντιστρέψιμος.

2.9.1.6 Διαίρεση πινάκων

Στο Matlab η πράξη της διαίρεσης πινάκων δεν έχει μαθηματική υπόσταση, όμως μπορεί να οριστεί. Η διαίρεση δύο πινάκων ορίζεται σαν πολλαπλασιασμός του πρώτου με τον αντίστροφο του δεύτερου εάν πρόκειται για αριστερή διαίρεση και το αντίθετο αν πρόκειται για δεξιά διαίρεση. Δηλαδή ισχύει: **A/B=A*inv(B)** και **A\B=inv(A)*B**. Τέλος, αν θέλουμε να κάνουμε διαίρεση στοιχείου με στοιχείο, χρησιμοποιούμε την τελεία πριν το σύμβολο της διαίρεσης.

Πίνακας 2.14 Διαίρεση πινάκων

Εντολή	**Αποτέλεσμα**	**Περιγραφή**
>> A=[1 1 1;2 3 4;1 3 2]	A = 1 1 1 2 3 4 1 3 2	Αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας Α.
>> B=[3 2 2;1 4 1;3 2 1]	B = 3 2 2 1 4 1 3 2 1	Αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας Β.
>> C=A/B	C = 0.6000 0.1000 -0.3000 3.0000 0.5000 -2.5000 1.2000 0.7000 -1.1000	Αριστερή διαίρεση των πινάκων Α και Β.
>> D=A*inv(B)	D = 0.6000 0.1000 -0.3000 3.0000 0.5000 -2.5000 1.2000 0.7000 -1.1000	Ισοδύναμη πράξη με την αριστερή διαίρεση.
>> E=A\B	E = 4.6667 2.0000 3.3333 1.6667 0 0.3333 -3.3333 0 -1.6667	Δεξιά διαίρεση των πινάκων Α και Β.
>> F=inv(A)*B	F = 4.6667 2.0000 3.3333	Ισοδύναμη πράξη με την δεξιά διαίρεση.

	1.6667 0 0.3333 -3.3333 -0.0000 -1.6667	
>> G=A./B	G = 0.3333 0.5000 0.5000 2.0000 0.7500 4.0000 0.3333 1.5000 2.0000	Διαίρεση στοιχείου με στοιχείο.

2.9.1.7 Ανάστροφος πίνακας

Ο ανάστροφος ενός πίνακα Α ορίζεται ως ο πίνακας αυτός, ο οποίος έχει τις γραμμές του πίνακα Α ως στήλες του και τις στήλες του Α ως γραμμές του. Ο ανάστροφος πίνακας υπολογίζεται στο Matlab χρησιμοποιώντας το σύμβολο της αποστρόφου, δηλαδή **B= A'**.

Πίνακας 2.15 Ανάστροφος πίνακας

Εντολή	Αποτέλεσμα	Επεξήγηση
>> A=[1 3 5;7 8 9]	A = 1 3 5 7 8 9	Ορισμός πίνακα Α διαστάσεων 2x3.
>> B=A'	B = 1 7 3 8 5 9	Ο ανάστροφος του Α με διαστάσεις 3x2.
>> B'	ans = 1 3 5 7 8 9	Αν αναστρέψουμε πάλι, επιστρέφουμε στον πίνακα Α.

Επιπλέον, στο Matlab υπάρχουν αρκετές έτοιμες συναρτήσεις για την διαχείριση πινάκων αλλά και την δημιουργία όλων των γνωστών μαθηματικών πινάκων.

Πίνακας 2.16 Συναρτήσεις για τη διαχείριση πινάκων

Συνάρτηση	Επεξήγηση
length(A)	Επιστρέφει τον αριθμό των στοιχείων ενός διανύσματος ή τον αριθμό των στηλών ενός πίνακα

mean(A)	Επιστρέφει τη μέση τιμή των στοιχείων ενός διανύσματος ενώ στην περίπτωση πίνακα επιστρέφει ένα διάνυσμα με στοιχεία τη μέση τιμή των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα
std(A)	Επιστρέφει την τυπική απόκλιση των στοιχείων ενός διανύσματος ενώ στην περίπτωση πίνακα επιστρέφει ένα διάνυσμα με στοιχεία την τυπική απόκλιση των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα
max()	Επιστρέφει το μέγιστο στοιχείο ενός διανύσματος ενώ στην περίπτωση πίνακα επιστρέφει ένα διάνυσμα με στοιχεία το μέγιστο στοιχείο κάθε στήλης του πίνακα
min(A)	Επιστρέφει το ελάχιστο στοιχείο ενός διανύσματος ενώ στην περίπτωση πίνακα επιστρέφει ένα διάνυσμα με στοιχεία το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης του πίνακα
sum(A)	Επιστρέφει το άθροισμα των στοιχείων ενός διανύσματος ή των στοιχείων κάθε στήλης ενός πίνακα
prod(A)	Επιστρέφει το γινόμενο των στοιχείων ενός διανύσματος ή των στοιχείων κάθε στήλης ενός πίνακα
dot(a,b)	Επιστρέφει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ίσης διάστασης
sort(a)	Ταξινομεί τα στοιχεία του διανύσματος a κατ’αύξουσα σειρά
trace(A)	Επιστρέφει το ίχνος ενός πίνακα
rank(A)	Επιστρέφει το βαθμό ενός πίνακα
eig(A)	Επιστρέφει ένα διάνυσμα στήλη με τις ιδιοτιμές ενός πίνακα
size(A)	Δημιουργεί ένα διάνυσμα με στοιχεία m και n, όπου το m αντιστοιχεί στον αριθμό των γραμμών και το n αντιστοιχεί στον αριθμό των στηλών του πίνακα A
diag(A)	Επιστ΄ρφει τα διαγώνια στοιχεία ενός πίνακα ή δημιουργεί έναν πίνακα με καθορισμένα διαγώνια στοιχεία
zeros(m,n)	Δημιουργεί έναν mxn πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν

rand(m,n)	Δημιουργεί έναν mxn πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία επιλέγονται τυχαία από μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]
ones(m,n)	Δημιουργεί έναν mxn πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με το 1
eye(n)	Δημιουργεί έναν τετραγωνικό πίνακα με n γραμμές και n στήλες του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με το 1

2.10 Αρχεία M-Files

Το Matlab μας παρέχει τη δυνατότητα αποθήκευσης μιας ακολουθίας εντολών σε ένα αρχείο και στην συνέχεια την εκτέλεση αυτών με μία μόνο εντολή. Αυτή η ακολουθία εντολών μπορεί να γραφεί σε ένα αρχείο κειμένου με την επέκταση (.m), δηλαδή Όνομα_Αρχείου.m. Στο Matlab υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι M-Files, τα αρχεία script και τα αρχεία συναρτήσεων.

Τα **αρχεία script** είναι πολύ χρήσιμα σε περιπτώσεις που απαιτείται η επανάληψη μιας μεγάλης ακολουθίας εντολών, ενώ δεν έχουν μεταβλητές εισόδου και εξόδου. Επιπλέον, οι μεταβλητές που υπολογίζονται προστίθενται στο χώρο εργασίας με αποτέλεσμα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από άλλα αρχεία script ή από το παράθυρο εντολών, δηλαδή πρόκειται για καθολικές μεταβλητές (global variables).

Τα **αρχεία συναρτήσεων** επιτρέπουν τον εμπλουτισμό της γλώσσας προγραμματισμού Matlab στα πλαίσια των εφαρμογών του χρήστη, δέχονται μεταβλητές εισόδου και επιστρέφουν μεταβλητές εξόδου και τέλος,οι μεταβλητές που ορίζονται μέσα στη συνάρτηση ισχύουν μόνο για τη συνάρτηση, δηλαδή πρόκειται για τοπικές μεταβλητές (local variables).

2.10.1 Αρχεία script

Ένα αρχείο script αποτελεί ένα αρχείο το οποίο περιλαμβάνει μία ακολουθία εντολών Matlab, το οποίο μπορεί να ονομάζεται και πρόγραμμα. Κατά την εκτέλεση ενός αρχείου script, οι εντολές εκτελούνται με τη σειρά που είναι γραμμένες, όπως ακριβώς αν είχαν πληκτρολογηθεί στο παράθυρο εντολών. Τα αρχεία script είναι ιδιαίτερα εύχρηστα καθώς μπορούν να αποθηκευτούν, να διορθωθούν και να εκτελεστούν πολλές φορές. Επίσης, μπορούν να δημιουργηθούν και να υποστούν επεξεργασία σε οποιονδήποτε επεξεργαστή κειμένου και στη συνέχεια να γίνει επικόλλησή τους στον επεξεργαστή κειμένου του Matlab.

Για να δημιουργήσουμε ένα αρχείο script επιλέγουμε από το μενού **File** (Αρχείο) την επιλογή **New** (Δημιουργία) και στο αναδυόμενο παράθυρο την επιλογή **M-File**. Εναλλακτικά μπορούμε να επιλέξουμε απευθείας από την γραμμή εργαλείων το εικονίδιο με το λευκό χαρτί ή να πληκτρολογήσουμε στο παράθυρο εντολών **edit**. Στην οθόνη εμφανίζεται ο επεξεργαστής κειμένου του matlab όπου μπορούμε να γράψουμε τις εντολές γραμμή προς γραμμή. Αφού γράψουμε τις εντολές και τα τυχόν σχόλια, αποθηκεύουμε το αρχείο επιλέγοντας από το μενού **File** την επιλογή **Save As** (Αποθήκευση ως). Στο πλαίσιο διαλόγου που εμφανίζεται, επιλέγουμε την τοποθεσία (φάκελο) αποθήκευσης και πληκτρολογούμε το όνομα του αρχείου. Τέλος, για την εκτέλεση ενός αρχείου script πληκτρολογούμε το όνομά του (χωρίς την επέκταση .m) στο παράθυρο εντολών και πατάμε Enter ή, εάν έχουμε ανοιχτό το αρχείο script, μπορούμε να επιλέξουμε το εικονίδιο από τη γραμμή εργαλείων με την ονομασία **Save and Run** (Αποθήκευση και Εκτέλεση).

2.10.2 Αρχεία συναρτήσεων

Το Matlab έχει ενσωματωμένες συναρτήσεις για για μια πληθώρα εφαρμογών αλλά δίνει και τη δυνατότητα στο χρήστη να δημιουργήσει τις δικές του μέσω του κειμενογράφου του Matlab. Τα αρχεία συναρτήσεων (function m-files) του Matlab περιλαμβάνουν ορίσματα εισόδου και εξόδου τα οποία μπορεί να αποτελούνται από μία ή περισσότερες μεταβλητές. Η γραμμή ορισμού της συνάρτησης (function definition line) έχει τη μορφή:

function [μεταβλητές εξόδου] = όνομα_συνάρτησης (μεταβλητές εισόδου)

Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο μία μεταβλητή εξόδου οι αγκύλες μπορούν να παραλειφθούν ενώ, αν υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητές εισόδου, αυτές χωρίζονται μεταξύ τους με το ελληνικό κόμμα. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητές εξόδου. Τέλος, το όνομα της συνάρτησης θα πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα με το οποίο αποθηκεύεται το αρχείο συνάρτησης. Αν είναι διαφορετικά, αγνοείται το όνομα της συνάρτησης και στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση καλείται με το όνομα με το οποίο είναι αποθηκευμένο το αρχείο συνάρτησης.

2.11 Εντολές εισόδου – εξόδου στην οθόνη

Η εισαγωγή δεδομένων από το χρήστη γίνεται με τη χρήση της **input**. Η σύνταξή της είναι : **a= input('μήνυμα κειμένου');**. Η εκτέλεση της εντολής εμφανίζει στην οθόνη το κείμενο μέσα στα εισαγωγικά και αναμένει τιμή από το πληκτρολόγιο που την αποδίδει στην μεταβλητή a.

Για την εμφάνηση (έξοδο) αποτελεσμάτων ενός αρχείου αλλά και άλλων πληροφοριών σχετικά με το πρόγραμμα, το Matlab διαθέτει διάφορες εντολές με πιο συχνά χρησιμοποιούμενες την εντολή **disp** και την εντολή **fprintf**.

Η εντολή disp εμφανίζει στην οθόνη την τιμή μιας μεταβλητής ή ένα μήνυμα κειμένου ή συνδυασμό αυτών. Δεν εμφανίζεται ούτε το μήνυμα προτροπής, ούτε η τιμή της μεταβλητής και το σύμβολο της ισότητας (=). Η γενική μορφή της εντολής disp είναι:

- Για την περίπτωση εμφάνισης της τιμής μιας μεταβλητής:
  disp(όνομα μεταβλητής)
- Για την περίπτωση εμφάνισης ενός μηνύματος κειμένου:
  disp('μήνυμα κειμένου')
- Για την εμφάνιση ενός μηνύματος κειμένου μαζί με την τιμή μιας μεταβλητής:
  disp(['μήνυμα κειμένου' , num2str(όνομα μεταβλητής)])

Παρατηρούμε ότι η εντολή num2str μετατρέπει την αριθμητική τιμή της μεταβλητής σε αλφαριθμητικό χαρακτήρα.

Η εντολή fprintf μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμφάνιση των αποτελεσμάτων στην οθόνη ή την αποθήκευσή τους σε ένα αρχείο, ενώ το αποτέλεσμα που εμφανίζεται μπορεί να μορφοποιηθεί. Η γενική μορφή της εντολής fprintf είναι:

fprintf = (fid, format, όνομα_μεταβλητής1, όνομα_μεταβλητής2,…) όπου,

- το όρισμα **fid** αναφέρεται στο αρχείο όπου θα αποθηκευτεί το αποτέλεσμα και ορίζεται με την εντολή fopen. Στην περίπτωση που παραλείπεται, το αποτέλεσμα εμφανίζεται μόνο στην οθόνη.
- το όρισμα **format** αναφέρεται σε μια ακολουθία αλφαριθμητικών χαρακτήρων που προσδιορίζουν την ακριβή μορφοποίηση για κάθε στοιχείο που θα εμφανιστεί στην οθόνη ή θα αποθηκευτεί σε αρχείο. Στην ακολουθία αυτή μπορεί να περιλαμβάνεται και κάποιο μήνυμα κειμένου.

Η μορφοποίηση ξεκινάει με το σύμβολο επί τοις εκατό (%). Στη συνέχεια ακολουθούν κάποιοι προαιρετικοί και υποχρεωτικοί χαρακτήρες. Αμέσως μετά το σύμβολο (%) μπορεί προαιρετικά να πληκτρολογηθεί ένας από τους χαρακτήρες του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.17 Χαρακτήρες ευθυγράμμισης του αποτελέσματος (flags)

Περιγραφή	**Χαρακτήρας**	**Περιγραφή**
Στοίχιση αριστερά	-	%-2.2f
Εκτύπωση προσίμου	+	%+2.2f
Χαρακτήρας διαστήματος		%2.2f
Τμήματα με μηδενικά	0	%02.2f

Στην συνέχεια προσδιορίζεται το εύρος και η ακρίβεια του αποτελέσματος. Το εύρος του αποτελέσματος ορίζεται με έναν αριθμό που ακολουθεί τον χαρακτήρα ευθυγράμμισης ή εάν δεν υπάρχει το σύμβολο %. Ο αριθμός αυτός προσδιορίζει τον ελάχιστο αριθμό ψηφίων που θα εμφανιστούν στην οθόνη. Η ακρίβεια είναι ο αριθμός που πληκτρολογείται μετά την τελεία και προσδιορίζει το πλήθος των ψηφίων που θα εμφανιστούν δεξιά της υποδιαστολής. Ο προσδιορισμός του εύρους και της ακρίβειας του αποτελέσματος είναι προαιρετικός καθώς το Matlab έχει ως προεπιλογή τα 6 δεκαδικά ψηφία. Στη συνέχεια θα πρέπει υποχρεωτικά να πληκτρολογηθεί ένας από τους χαρακτήρες μετατροπής (conversion characters) που εμφανίζονται στον ακόλουθο πίνακα και οι οποίοι προσδιορίζουν τον χαρακτήρα εμφάνισης του αποτελέσματος.

Πίνακας 2.18 Χαρακτήρες μετατροπής (conversion characters)

Περιγραφή	**Χαρακτήρας**
Απλός χαρακτήρας	%c
Δεκαδικός συμβολισμός (εμφάνιση τυχόν προσήμου)	%d
Εκθετικός συμβολισμός με μικρό e	%e
Εκθετικός συμβολισμός με κεφαλαίο E	%E
Συμβολισμός σταθερής υποδιαστολής	%f
Συμπαγής εμφάνιση των %e και %f. Τα μη σημαντικά μηδενικά δεν εμφανίζονται	%g
Το ίδιο με το %g αλλά με κεφαλαίο E	%G

Δεκαδικός συμβολισμός (εμφάνιση τυχόν προσήμου)	%i
Οκταδικός συμβολισμός (μη εμφάνιση τυχόν προσήμου)	%o
Αλφαριθμητικό	%s
Δεκαδικός συμβολισμός (μη εμφάνιση τυχόν προσήμου)	%u
Δεκαεξαδικός συμβολισμός με μικρά γράμματα	%x
Δεκαεξαδικός συμβολισμός με κεφαλαία γράμματα	%X

Τέλος, μετά τον χαρακτήρα μετατροπής μπορούν να πληκτρολογηθούν προαιρετικά οι λεγόμενοι χαρακτήρες διαφυγής του ακόλουθου πίνακα που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό μη εκτυπώσιμων χαρακτήρων.

Πίνακας 2.19 Χαρακτήρες διαφυγής (escape characters)

Περιγραφή	**Χαρακτήρας**
Πίσω διάστημα	\b
Νέα γραμμή	\n
Οριζόντια στοίχιση	\t
Ανάστροφη διαγώνιος	\\
Μονό εισαγωγικό	\'' ή ''
Χαρακτήρας ποσοστού	%%

2.12 Διαχείριση αρχείων (είσοδος-έξοδος δεδομένων)

Στο Matlab έχουμε την δυνατότητα δημιουργίας αρχείων στα οποία μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις μεταβλητές μας. Η εντολή fopen χρησιμοποιείται για να ανοίξει ένα αρχείο. Η γενική μορφή της εντολής fopen είναι:

fid = fopen('όνομα_αρχείου')

Εάν θέλουμε να προσθέσουμε επιτρεπόμενες ενέργειες, βάζουμε και ένα δεύτερο όρισμα στην εντολή fopen και παίρνει την μορφή:

fid = fopen('όνομα_αρχείου' , 'επιτρεπόμενες ενέργειες')

Για παράδειγμα, η εντολή fid=fopen('arxeio') ανοίγει το αρχείο με όνομα arxeio και επιστρέφει έναν αριθμό στην μεταβλητή fid που θα χρησιμοποιηθεί όταν αναφερόμαστε στο αρχείο αυτό με την εντολή fprintf και την fscanf. Η αρίθμηση για το fid ξεκινάει από το 3. Η τιμή fid=1 δηλώνει ότι τα αποτελέσματα πάνε στην οθόνη ενώ η τιμή fid=2 χρησιμοποιείται για να κατευθύνει τα αποτελέσματα στην έξοδο που έχει οριστεί στην περίπτωση λάθους.

Η εντολή **fclose(fid)** κλείνει το αρχείο που αντιστοιχεί στο fid. Για να ολοκληρωθούν οι αλλαγές σε ένα αρχείο θα πρέπει να κλείσει, οπότε η χρήση της εντολής αυτής είναι αναγκαστική.

Τέλος, η εντολή **fscanf(fid, format, megethos_pinaka)** διαβάζει σειριακά τα περιεχόμενα του αρχείου με αριθμό fid και τα αποθηκεύει σε έναν πίνακα με μέγεθος που καθορίζεται στην κλήση της συνάρτησης. Το μέγεθος του πίνακα ορίζεται ως [m,n].

Πίνακας 2.20 Χαρακτήρες επιτρεπόμενων ενεργειών

Χαρακτήρας	Περιγραφή
‘r’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου για ανάγνωση (προεπιλογή)
‘w’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου ή δημιουργία νέου αρχείου για γράψιμο. Διαγραφή τυχόν υπαρχόντων δεδομένων
‘a’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου ή δημιουργία νέου αρχείου για γράψιμο. Προσθήκη των νέων δεδομένων στο τέλος του υπάρχοντος αρχείου
‘r+’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου για ανάγνωση και γράψιμο
‘w+’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου ή δημιουργία νέου αρχείου για ανάγνωση και γράψιμο. Διαγραφή τυχόν υπαρχόντων δεδομένων
‘a+’	Άνοιγμα υπάρχοντος αρχείου ή δημιουργία νέου αρχείου για ανάγνωση και γράψιμο. Προσθήκη των νέων δεδομένων στο τέλος του υπάρχοντος αρχείου

2.13 Γραφικές παραστάσεις

Το Matlab αποτελεί και ιδανικό εργαλείο σε περίπτωση που θέλουμε να σχεδιάσουμε γραφήματα. Το γράφημα ορίζεται ως μια απεικόνιση ενός συνόλου σημείων σε δύο, τρεις ή και παραπάνω διαστάσεις. Τα σημεία αυτά συνήθως είναι ενωμένα με γραμμή.

2.13.1 Γραφικές παραστάσεις στο χώρο δύο διαστάσεων

Η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε συχνά για την δημιουργία διδιάστατων γραφικών είναι η **plot**. Εάν x και y είναι δύο διανύσματα με τον ίδιο αριθμό στοιχείων, τότε η μορφή της συνάρτησης plot είναι **plot(x,y)**.

Όταν εκτελούμε την συνάρτηση plot εμφανίζεται στην οθόνη το παράθυρο γραφικών(**Figure Window**). Μία γραμμή ενώνει τα σημεία που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες που ορίζονται από τα στοιχεία των διανυσμάτων **x** και **y**. Το διάνυσμα που πληκτρολογείται πρώτο στη συνάρτηση plot αντιστοιχεί στον οριζόντιο άξονα ενώ το διάνυσμα που πληκτρολογείται δεύτερο αντιστοιχεί στον κάθετο άξονα. Ακολουθεί παράδειγμα σύμφωνα με τις τιμές του πίνακα 2.21.

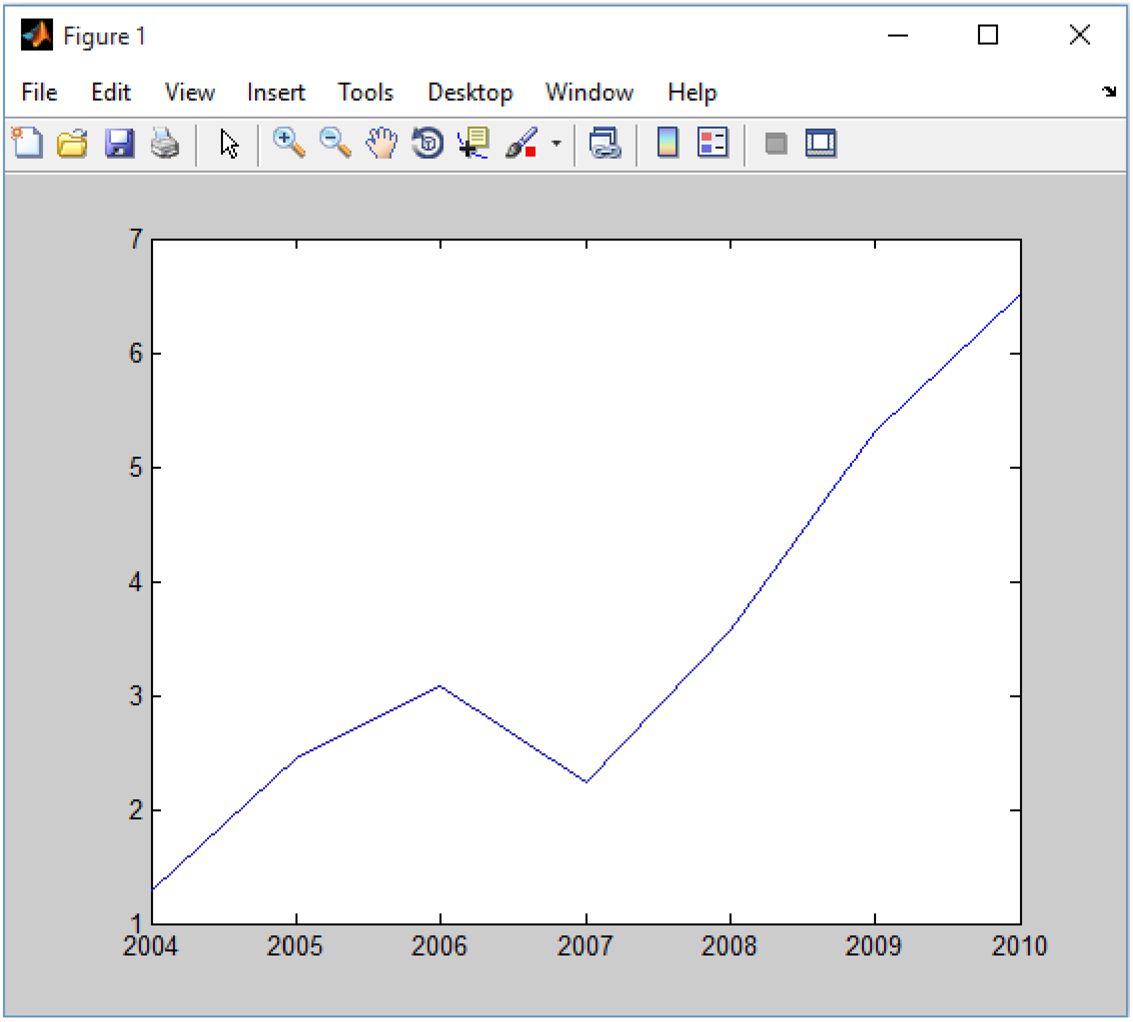
Πίνακας 2.21 Ετήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής Άλφα

Έτος	**Τιμή κλεισίματος**
2004	1.29
2005	2.45
2006	3.08
2007	2.24
2008	3.57
2009	5.30
2010	6.51

Στο παράθυρο εντολών πληκτρολογούμε:

```
>>x=[2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010]; %ορισμός διανύσματος x
>>y =[1.29   2.45  3.08   2.24   3.57   5.30   6.51]; %ορισμός διανύσματος y
>>plot(x,y) %Δημιουργία γραφικής παράστασης
```

Στην οθόνη εμφανίζεται το παράθυρο γραφικώνμε τίτλο Figure 1 στο οποίο τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές κλεισίματος κάθε έτους απεικονίζονται με μία συνεχή μπλέ γραμμή.



Εικόνα 2.3 Διάγραμμα ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα

Σε περίπτωση που θέλουμε να προσδιορίσουμε το είδος, το χρώμα της γραμμής καθώς και το στυλ των διαδοχικών σημείων που ενώνονται με αυτή τη γραμμή, μπορούμε να προσθέσουμε στην συνάρτηση plot μία τρίτη παράμετρο και θα έχει την ακόλουθη μορφή:

plot(x,y, ‘σύμβολα_προσδιορισμού_χαρακτηριστικών γραμμής’)

Ακολουθούν οι παρακάτω πίνακες με τα σύμβολα που υπάρχουν στο Matlab για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της γραμμής.

Πίνακας 2.22 Σύμβολα για το χρώμα της γραμμής και των σημείων (line color specifiers)

Σύμβολο	**Περιγραφή**
r	Κόκκινο

g	Πράσινο
b	Μπλε
c	Κυανό
m	Μοβ
y	Κίτρινο
k	Μαύρο
w	Άσπρο

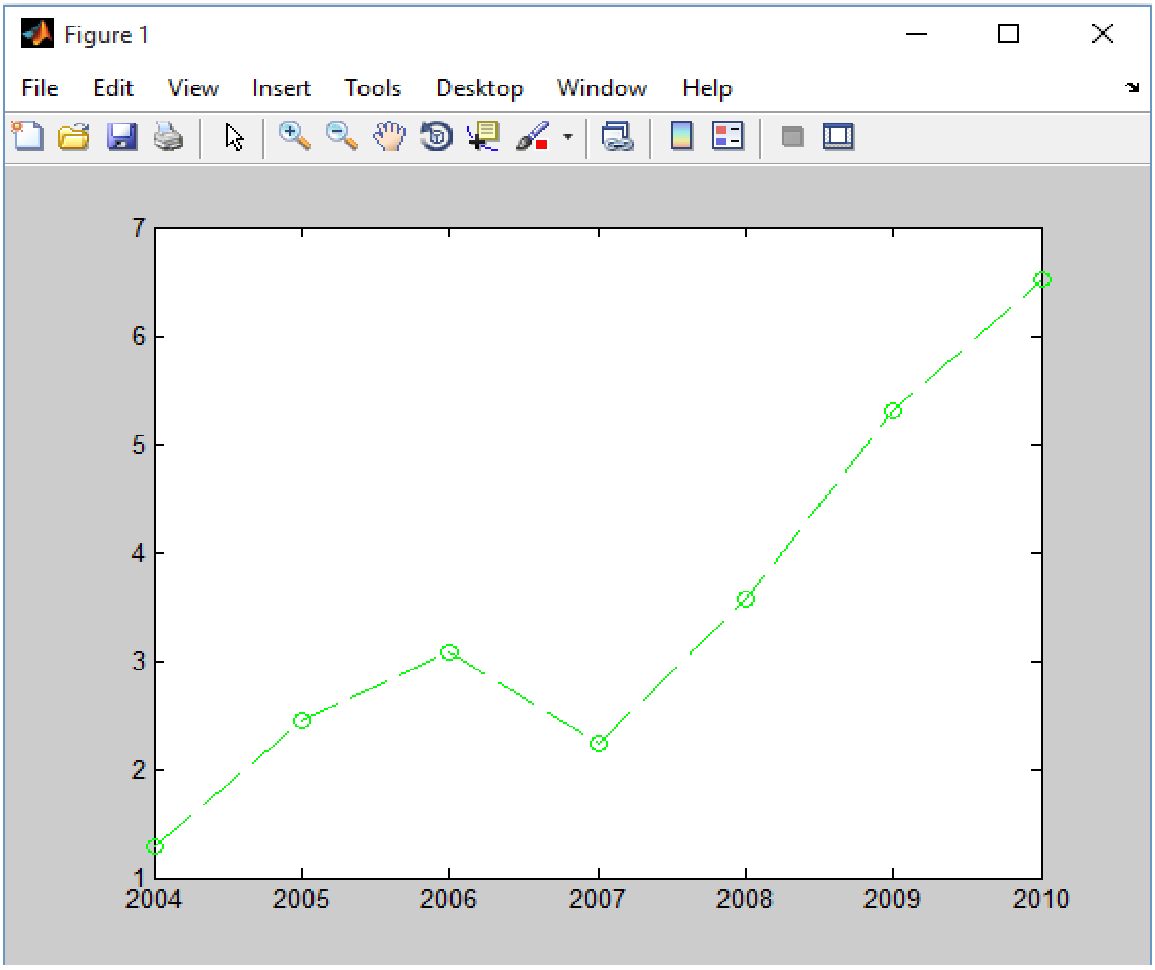
Πίνακας 2.23 Σύμβολα για το είδος της γραμμής (line style specifiers)

Σύμβολο	**Περιγραφή**
-	Συνεχής
--	Διακεκομμένη
:	Με τελείες
-.	Διακεκομμένη με τελείες

Πίνακας 2.24 Σύμβολα για το είδος των σημείων (marker type specifiers)

Σύμβολο	**Περιγραφή**
+	Σταυρός
o	Κύκλος
*	Αστερίσκος
.	Τελεία
x	Σημάδι x
s	Τετράγωνο
d	Ρόμβος
^	Άνω τρίγωνο
v	Κάτω τρίγωνο
>	Δεξιό τρίγωνο
<	Αριστερό τρίγωνο
p ή h	Πεντάγωνο ή εξάγωνο αντίστοιχα

Εάν δώσουμε την εντολή plot(x,y, ‘g--o’) θα εμφανιστεί η γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα με μια πράσινη διακεκομμένη γραμμή και το σύμβολο ο σε κάθε σημείο.



Εικόνα 2.4 Διάγραμμα ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα με διακεκομμένη γραμμή και σημάδια

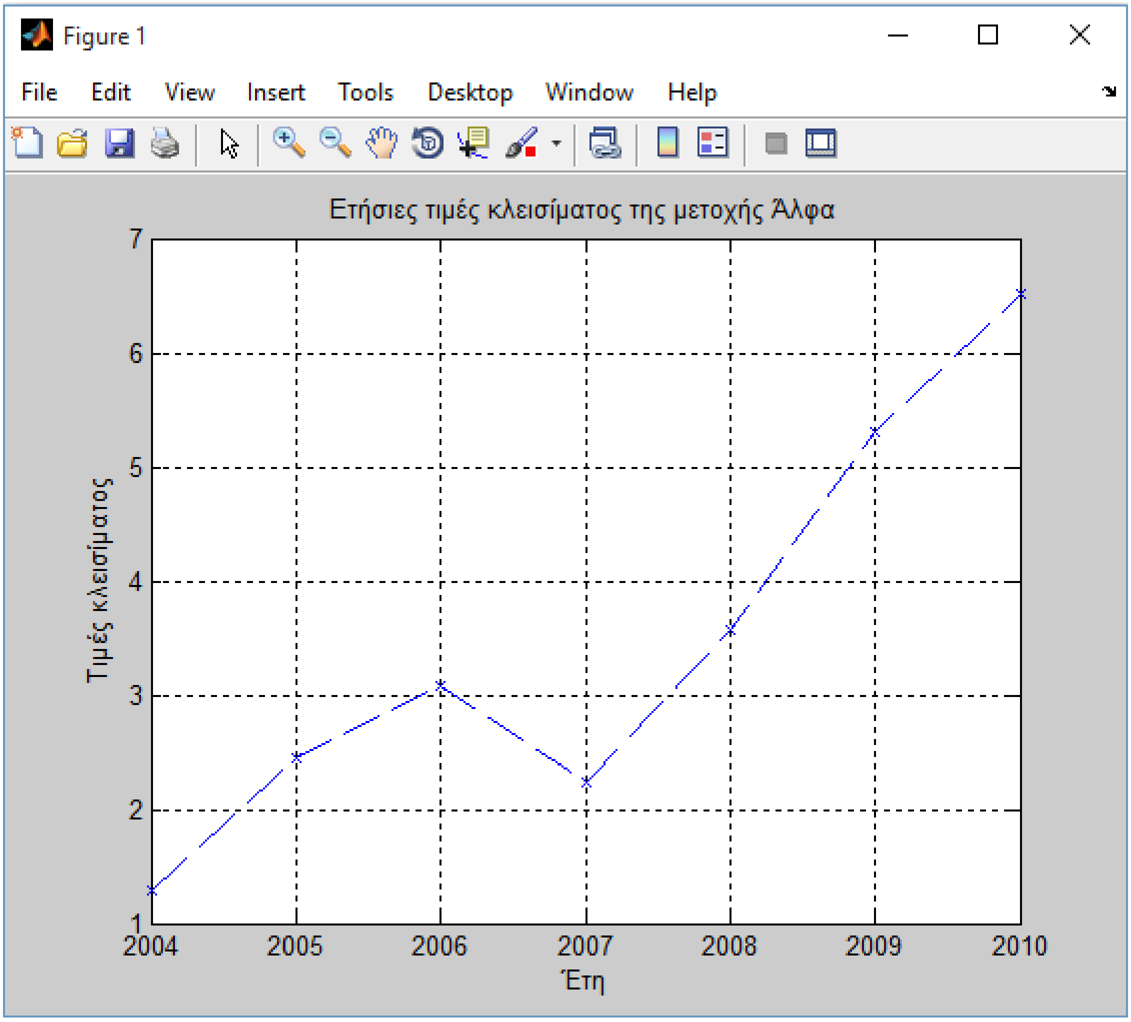
Σε ένα γράφημα μπορούμε να προσθέσουμε τίτλο, τίτλο οριζόντιου και κάθετου άξονα, υπόμνημα, γραμμές πλέγματος, κείμενο σε συγκεκριμένο σημείο του γραφήματος ενώ μπορούμε να μορφοποιήσουμε και τους άξονες χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες συναρτήσεις.

- Με την συνάρτηση title(‘Όνομα_Τίτλου’), εισάγεται ο τίτλος στην κορυφή της γραφικής παράστασης. Η συνάρτηση title μπορεί να περιλαμβάνει ως παράμετρο και την αριθμητική τιμή μιας μεταβλητής αφού προηγουμένως μετατρέψουμε την αριθμητική τιμή της μεταβλητής σε αλφαριθμητικό χαρακτήρα χρησιμοποιώντας την εντολή num2str. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση title μπορεί να είναι της μορφής title('Κείμενο', num2str(όνομα μεταβλητής)) ή title('Κείμενο', num2str(όνομα μεταβλητής), 'κείμενο') ή title(num2str(όνομα μεταβλητής)).

- Με τις συναρτήσεις xlabel και ylabel προσθέτουμε τίτλο στον άξονα των x και στον άξονα των y αντίστοιχα. Η γενική μορφή τους είναι xlabel('Όνομα_Τίτλου') και ylabel('Όνομα_Τίτλου').
- Για την δημιουργία υπομνήματος για την επεξήγηση των γραμμών και των συμβόλων σε περίπτωση πολλών καμπύλων σε μία γραφική παράσταση χρησιμοποιείται η συνάρτηση legend και η γενική της μορφή είναι legend('επεξήγηση_1ης_καμπύλης', 'επεξήγηση_2ης_καμπύλης',…)
- Για την εμφάνιση γραμμών πλέγματος χρησιμοποιείται η συνάρτηση grid. Με την εντολή grid on προστίθενται οι γραμμές πλέγματος ενώ με την εντολή grid off αφαιρούνται οι γραμμές πλέγματος.
- Με την συνάρτηση text εισάγουμε κείμενο σε ένα προκαθορισμένο σημείο στη γραφική παράσταση και η γενική της μορφή είναι text(x,y, 'κείμενο'). Παραπλήσια με την συνάρτηση text είναι η συνάρτηση gtext με την οποία εισάγεται κείμενο σε θέση που προσδιορίζεται με το ποντίκι. Η γενική μορφή της gtext είναι gtext('κείμενο').
- Για την μορφοποίηση των αξόνων χρησιμοποιούμε την συνάρτηση axis η οποία έχει γενική μορφή axis([xmin xmax ymin ymax]) και θέτει άνω και κάτω όρια στους άξονες. Για να προσδιορίσουμε όρια μόνο στον κάθετο άξονα ή μόνο στον οριζόντιο άξονα χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις ylim([ymin ymax]) και xlim([xmin xmax]) αντίστοιχα. Ακόμη η συνάρτηση axis equal θέτει τα ίδια όρια και στους δύο άξονες ενώ για την προεπιλεγμένη εμφάνιση των αξόνων χρησιμοποιούμε την συνάρτηση axis auto. Σε περίπτωση που σε μια γραφική παράσταση δεν θέλουμε να εμφανίζονται οι άξονες χρησιμοποιούμε την συνάρτηση axis off και για την επανεμφάνισή τους χρησιμοποιούμε την συνάρτηση axis on.

Με βάση τα παραπάνω δημιουργούμε από την αρχή την γραφική παράσταση για τις ετήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής Άλφα, μόνο που αυτή τη φορά θα προσθέσουμε γραμμές πλέγματος, τίτλο γραφήματος και τίτλο οριζόντιου και κάθετου άξονα. Στο παράθυρο εντολών πληκτρολογούμε:

>> plot(x,y, '--x'); %Δημιουργία γραφικής παράστασης με διακεκομμένη γραμμή και το σύμβολο x σε κάθε σημείο
>> grid on % Προσθήκη πλέγματος γραμμών
>> title('Ετήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής Άλφα') %Τίτλος γραφήματος
>> xlabel('Έτη'); %Τίτλος οριζόντιου άξονα
>> ylabel('Τιμές κλεισίματος'); %Τίτλος κάθετου άξονα



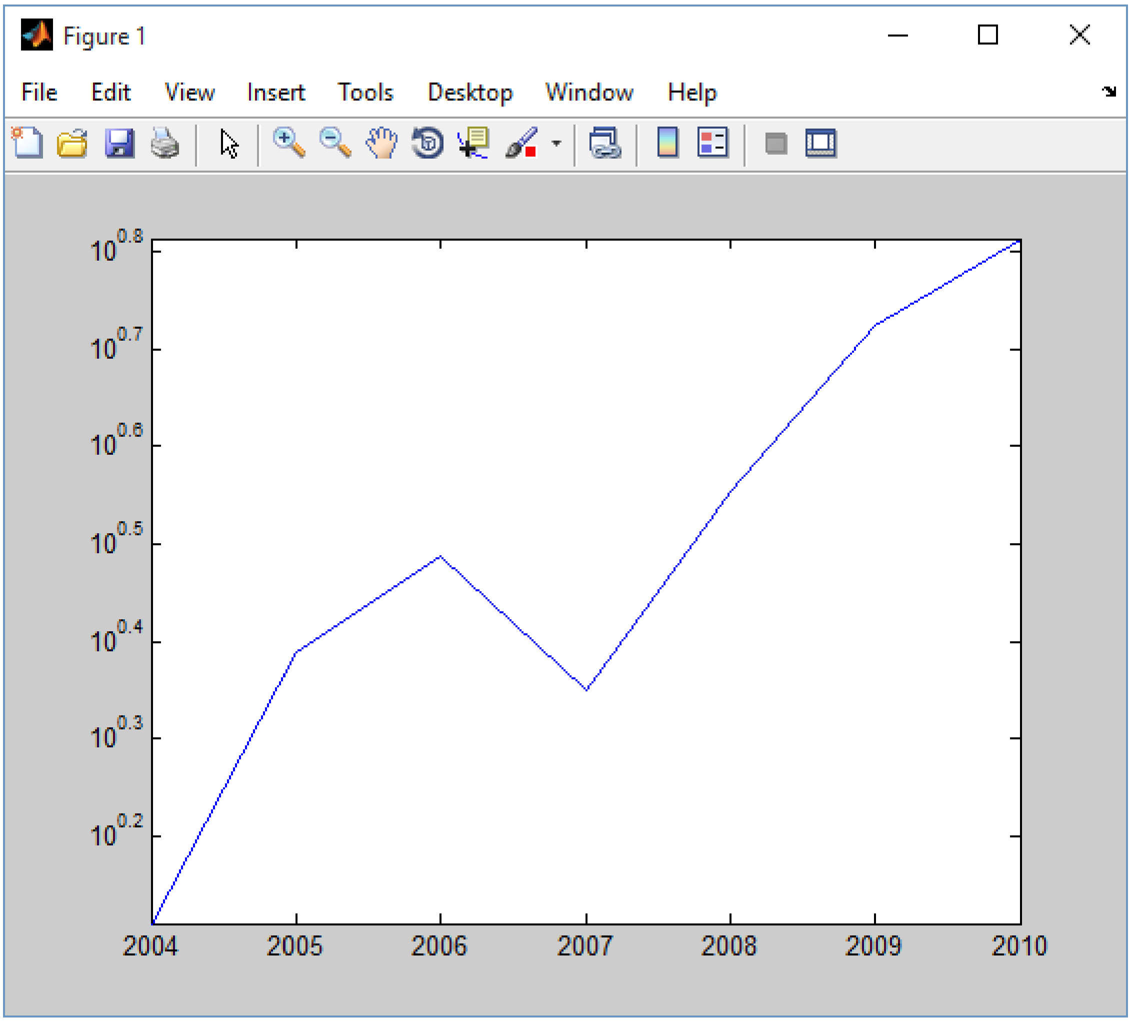
Εικόνα 2.5 Διάγραμμα ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα με τίτλους

Θα πρέπει να σημειωθεί πως η μορφοποίηση μιας γραφικής παράστασης μπορεί να πραγματοποιηθεί και μέσα από το παράθυρο γραφικών από το μενού **Insert** (Εισαγωγή) και από το μενού **Tools** (Εργαλεία). Εάν όμως κάποιος χρήστης επιθυμεί να δημιουργήσει ένα δικό του πρόγραμμα στο Matlab θα πρέπει να γνωρίζει τις εντολές που περιγράψαμε παραπάνω, ώστε να μπορεί να εντάξει μία γραφική παράσταση στον κώδικα του προγράμματος.

Για να δημιουργήσουμε **λογαριθμικές γραφικές παραστάσεις** χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **loglog(x,y)**. Επίσης, με την συνάρτηση **semilogx(x,y)** ο οριζόντιος άξονας (άξονας των x) είναι λογαριθμικός και ο κάθετος άξονας (άξονας των y) είναι γραμμικός, ενώ με την συνάρτηση **semilogy(x,y)** ο οριζόντιος άξονας (άξονας των x) είναι γραμμικός και ο κάθετος άξονας (άξονας των y) είναι λογαριθμικός. Έτσι, λοιπόν, εάν πληκτρολογήσουμε την εντολή:

```
>> semilogy(x,y)
```

εμφανίζεται η γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα.

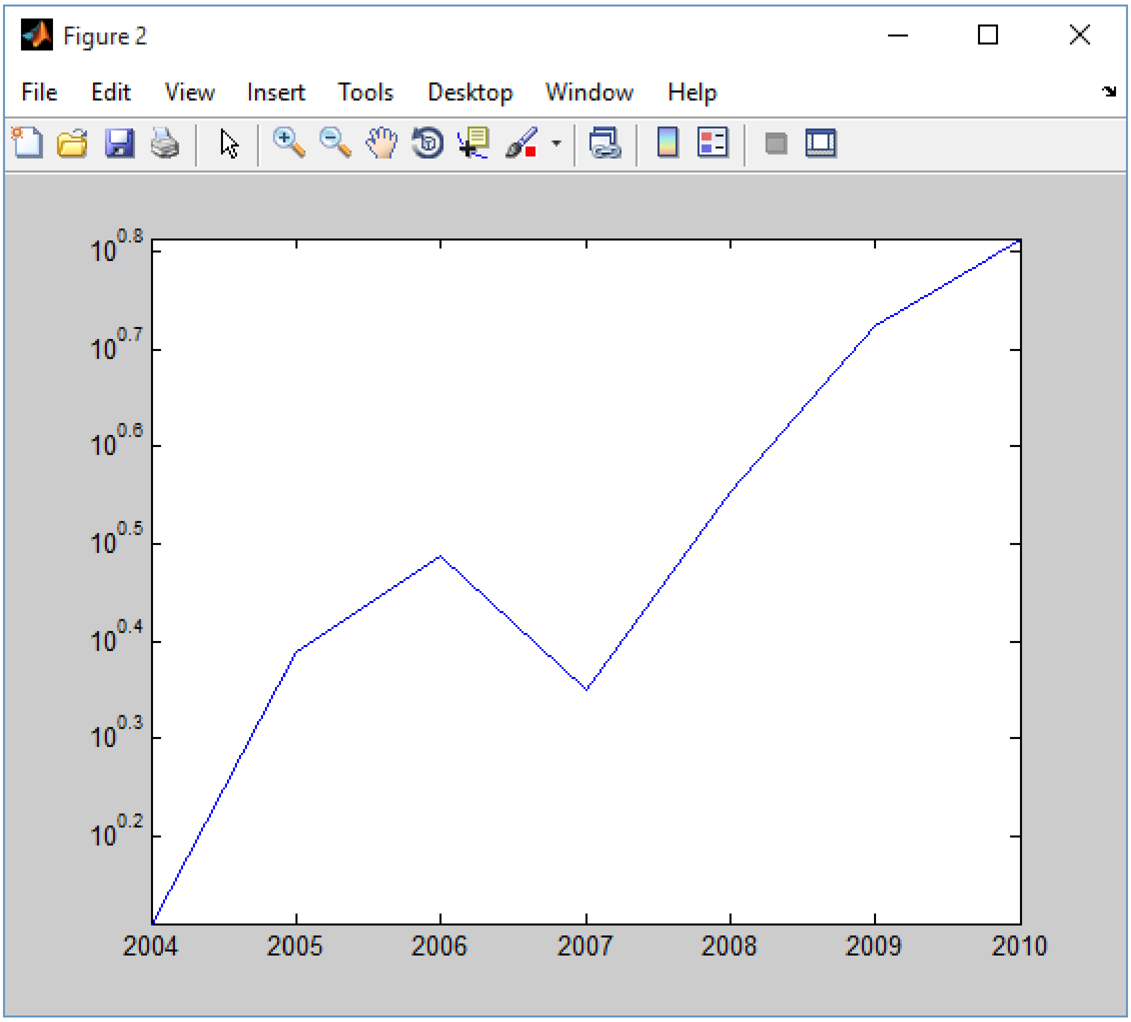


Εικόνα 2.6 Διάγραμμα ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα.

Εάν θέλουμε να εμφανίσουμε την γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα και παράλληλα ένα δεύτερο παράθυρο με την γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα πληκτρολογούμε τις παρακάτω εντολές:

>> plot(x,y); %Δημιουργία γραφικής παράστασης
>> figure(2); %Δημιουργία νέου παράθυρου γραφικών με όνομα Figure 2
>> semilogy(x,y); %Δημιουργία γραφικής παράστασης με τον άξονα y να είναι λογαριθμικός ενώ ο x γραμμικός

Έτσι εμφανίζεται και ένα δεύτερο παράθυρο (**Figure 2**) με την γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα.



Εικόνα 2.7 Διάγραμμα ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα με χρήση της συνάρτησης figure

Παρατηρούμε ότι για να εμφανίσουμε και μία δεύτερη γραφική παράσταση χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση **figure**. Οι βασικές λειτουργίες της συνάρτησης figure(i) όπου i= 1,2, …,n, είναι να δημιουργεί ένα νέο παράθυρο με τίτλο Figure i, ενώ εάν υπάρχει ήδη ένα παράθυρο με τίτλο Figure i τότε η συνάρτηση figure(i) το εμφανίζει στην οθόνη και στη συνέχεια οι γραφικές παραστάσεις που δημιουργούνται εμφανίζονται σε αυτό. Επιπλέον, πληκτρολογώντας clf διαγράφεται η γραφική παράσταση από το ενεργό παράθυρο γραφικών, ενώ πληκτρολογώντας close κλείνει το ενεργό παράθυρο γραφικών. Τέλος, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα νέο παράθυρο γραφικών και από το μενού **File -> New -> Figure** (Αρχείο -> Δημιουργία -> Εικόνα).

Στην περίπτωση που πληκτρολογούσαμε μόνο

```
>> plot(x,y);
>> semilogy(x,y);
```

τότε θα εμφανιζόταν αρχικά στο παράθυρο γραφικών Figure 1 η γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα και με την δεύτερη εντολή θα διαγραφόταν η προηγούμενη γραφική παράσταση και στο ίδιο παράθυρο γραφικών θα είχαμε τη γραφική παράσταση των ετήσιων τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα σε λογαριθμική κλίμακα.

Για να δημιουργήσουμε **πολλαπλές γραφικές παραστάσεις στο ίδιο παράθυρο γραφικών** η γενική μορφή της συνάρτησης plot είναι:

plot(x1, y1, x2, y2, …, xn, yn)

ή

plot(x1, y1, ‘σύμβολα_προσδιορισμού’ , x2, y2, ‘σύμβολα_προσδιορισμού’ ,…)

Διαφορετικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή hold on. Αφού δημιουργήσουμε μια γραφική παράσταση (η οποία εμφανίζεται σε ένα νέο παράθυρο γραφικών), εάν στην συνέχεια πληκτρολογήσουμε την εντολή hold on οι νέες γραφικές παραστάσεις εμφανίζονται στο ίδιο παράθυρο γραφικών με την πρώτη γραφική παράσταση. Η κατάσταση αυτή παύει να ισχύει πληκτρολογώντας την εντολή hold off. Σε περίπτωση που τα ορίσματα στην συνάρτηση plot είναι πίνακες, δημιουργούνται στο παράθυρο γραφικών οι γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων στηλών των δύο πινάκων. Ακολουθεί ο πίνακας 2.25 με τις ετήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής Βήτα.

Πίνακας 2.25 Ετήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής Βήτα

Έτος	Τιμή κλεισίματος
2004	1.69
2005	2.81
2006	2.33
2007	3.54
2008	5.99
2009	5.51
2010	7.16

Δημιουργούμε στο Matlab το διάνυσμα k με τις τιμές κλεισίματος της μετοχής Βήτα:

>> k=[1.69 2.81 2.33 3.54 5.99 5.51 7.16];

Σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους δημιουργίας κώδικα, θα εμφανίσουμε στο ίδιο διάγραμμα τη γραφική παράσταση των τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα και τη γραφική παράσταση των τιμών κλεισίματος της μετοχής Βήτα.

- **Ά τρόπος**: *χωρίς την χρήση της εντολής hold on/hold off*

  >> plot(x,y, 'g--o',x,k, 'r--*'); %Δημιουργία δύο γραφικών παραστάσεων στο ίδιο παράθυρο γραφικών
  >> grid on %Προσθήκη πλέγματος γραμμών
  >> title('Ετήσιες τιμές κλεισίματος μετοχής Άλφα και Βήτα')%Τίτλος γραφήματος
  >> xlabel('Έτη') %Τίτλος οριζόντιου άξονα
  >> ylabel('Τιμές κλεισίματος') %Τίτλος κάθετου άξονα
  >> legend('Μετοχή Άλφα', 'Μετοχή Βήτα') %Τοποθέτηση υπομνήματος

- **Ͼ τρόπος**: *με την χρήση της εντολής hold on/hold off*

  >> plot(x,y, 'g--o'); %Δημιουργία πρώτης γραφικής παράστασης
  >> grid on %Προσθήκη πλέγματος γραμμών

>> hold on % Εμφάνιση νέας γραφικής παράστασης στο ίδιο παράθυρο γραφικών με την πρώτη γραφική παράσταση

>> plot(x,k, 'r--*'); %Δημιουργία δεύτερης γραφικής παράστασης

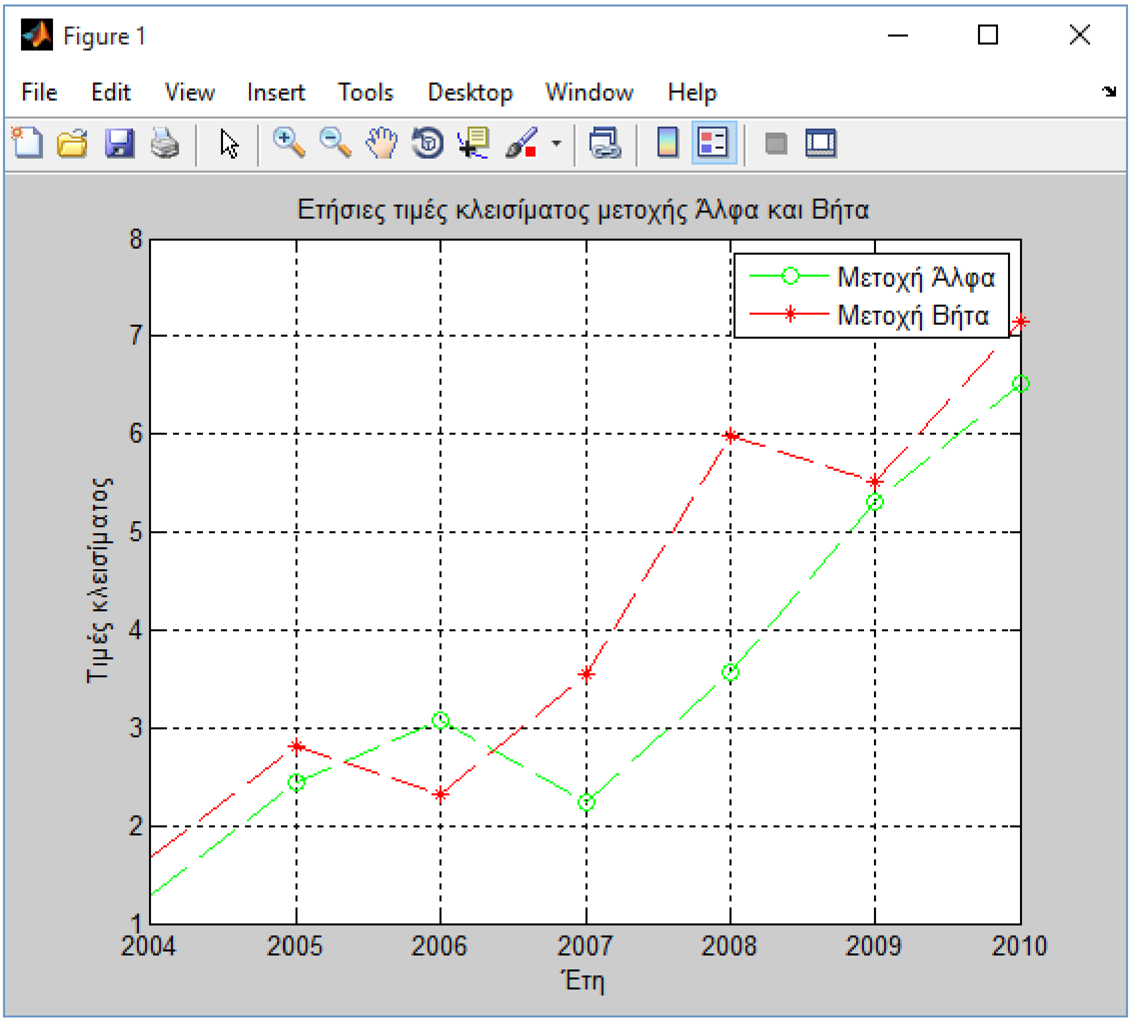
>> title('Ετήσιες τιμές κλεισίματος μετοχής Άλφα και Βήτα') %Τίτλος γραφήματος

>> xlabel('Έτη') %Τίτλος οριζόντιου άξονα

>> ylabel('Τιμές κλεισίματος') %Τίτλος κάθετου άξονα

>> legend('Μετοχή Άλφα', 'Μετοχή Βήτα') %Τοποθέτηση υπομνήματος

>> hold off



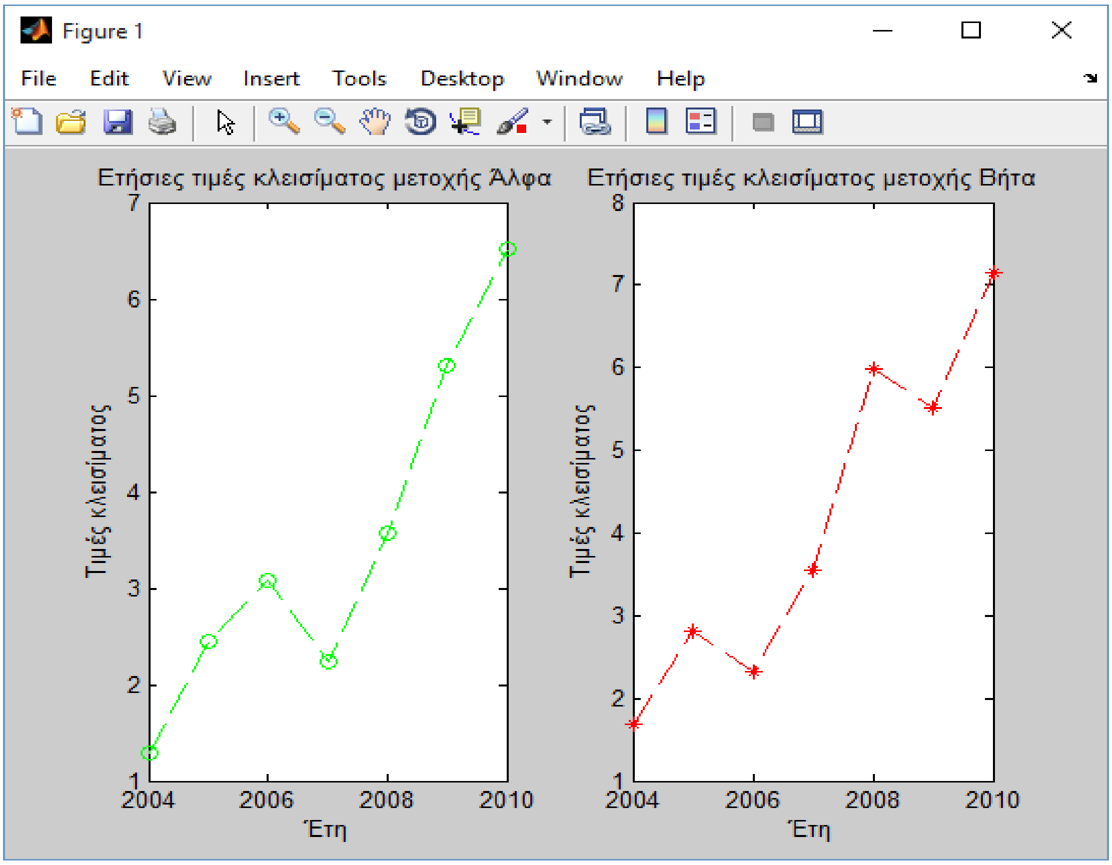
Εικόνα 2.8 Γραφικές παραστάσεις ετήσιων τιμών κλεισίματος μετοχών Άλφα και Βήτα

Εάν θέλουμε να δημιουργήσουμε **πολλαπλά διαγράμματα στο ίδιο παράθυρο γραφικών** χρησιμοποιούμε την συνάρτηση subplot με γενική μορφή:

subplot(m,n,P)

Η συνάρτηση subplot(m,n,P) διαιρεί το παράθυρο γραφικών σε έναν m x n πίνακα υποπαραθύρων των οποίων η αρίθμηση γίνεται κατά σειρά. Η παράμετρος P προσδιορίζει τον αριθμό των διαγραμμάτων που είναι σχεδιασμένα και την τρέχουσα γραφική παράσταση. Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε στο ίδιο παράθυρο γραφικών δύο διαγράμματα, το πρώτο με τη γραφική παράσταση των τιμών κλεισίματος της μετοχής Άλφα και το δεύτερο με τη γραφική παράσταση των τιμών κλεισίματος της μετοχής Βήτα. Για το σκοπό αυτό πληκτρολογούμε τις παρακάτω εντολές:

```
>> subplot(1,2,1); %Δημιουργία πρώτου διαγράμματος στο ίδιο παράθυρο γραφικών
>> plot(x,y, 'g--o'); % Δημιουργία γραφικής παράστασης
>> title('Ετήσιες τιμές κλεισίματος μετοχής Άλφα') %Τίτλος γραφήματος
>> xlabel('Έτη') %Τίτλος στον οριζόντιο άξονα
>> ylabel('Τιμές κλεισίματος') %Τίτλος στον κάθετο άξονα
>> subplot(1,2,2); %Δημιουργία δεύτερου διαγράμματος στο ίδιο παράθυρο γραφικών
>> plot(x,k, 'r--*'); %Δημιουργία γραφικής παράστασης
>> title('Ετήσιες τιμές κλεισίματος μετοχής Βήτα') %Τίτλος γραφήματος
>> xlabel('Έτη') %Τίτλος στον οριζόντιο άξονα
>> ylabel('Τιμές κλεισίματος') %Τίτλος στον κάθετο άξονα
```



Εικόνα 2.9 Διαγράμματα των ετήσιων τιμών κλεισίματος μετοχών Άλφα και Βήτα στο ίδιο παράθυρο γραφικών

2.13.2 Γραφικές παραστάσεις στο χώρο τριών διαστάσεων

Για να δημιουργήσουμε καμπύλες στον χώρο τριών διαστάσεων χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **plot3**. Η σύνταξη και τα χαρακτηριστικά της είναι ίδια με αυτά της plot με την διαφορά ότι εδώ ορίζουμε τριάδες διανυσμάτων αντί για ζεύγη. Η γενική μορφή της συνάρτησης plot3 είναι:

plot3(x,y,z)

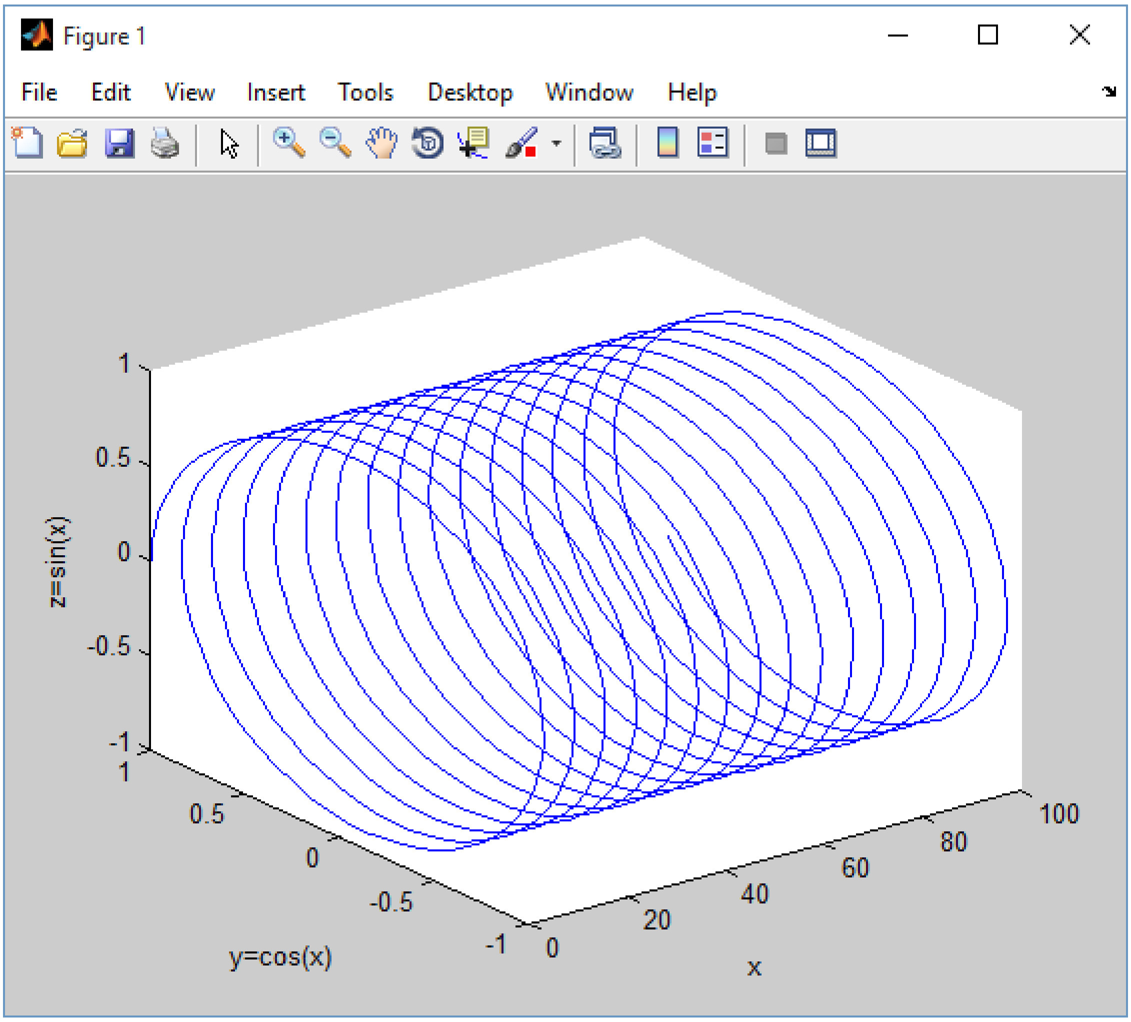
ή

plot3(x,y,z, 'σύμβολα_προσδιορισμού_χαρακτηριστικών γραμμής')

Τα διανύσματα x,y,z πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις και τα σημεία στον τριδιάστατο χώρο που σχεδιάζονται έχουν συντεταγμένες τα αντίστοιχα σημεία των x,y,z. Η παράμετρος z αντιστοιχεί στην τρίτη συνιστώσα των σημείων η οποία δημιουργεί τον κάθετο στο επίπεδο άξονα (άξονα των z). Για την εμφάνιση τίτλου στον άξονα των z χρησιμοποιείται η συνάρτηση zlabel('Όνομα_Τίτλου').

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε μια καμπύλη με συνάρτηση f(x)=(x, συν(x), ημ(x)) με διάστημα 0≤x≤100, στο χώρο τριών διαστάσεων. Πληκτρολογούμε τον παρακάτω κώδικα στο παράθυρο εντολών του Matlab.

```
>> x=0:0.1:100; % Ορισμός διαστήματος με βήμα 0.1
>> y=cos(x); %Ορισμός της cos(x)
>> z=sin(x); %Ορισμός της sin(x)
>> plot3(x,y,z) %Σχεδίαση καμπύλης στο χώρο τριών διαστάσεων
>> xlabel('x'); %Τίτλος στον άξονα x
>> ylabel('y=cos(x)'); %Τίτλος στον άξονα y
>> zlabel('z=sin(x)'); %Τίτλος στον άξονα z
```



Εικόνα 2.10 Σχεδίαση καμπύλης στο χώρο τριών διαστάσεων

2.13.3 Γραφικές παραστάσεις επιφανειών

Στην χρηματοοικονομική και κυρίως στην χρηματοοικονομική μηχανική χρειάζεται πολλές φορές ο σχεδιασμός επιφανειών στον τριδιάστατο χώρο, όπως για παράδειγμα η σχεδίαση της ευαισθησίας ενός δικαιώματος. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης z=f(x,y) είναι μια επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο. Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τα σημεία $(x_i,\ y_i)$ στο επίπεδο x,y ώστε στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τιμές της μεταβλητής z για κάθε ζεύγος $(x_i,\ y_i)$. Για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση **meshgrid** η οποία δημιουργεί ένα πλέγμα με όλα τα ζεύγη των τιμών (x_i, y_i). Η γενική μορφή της συνάρτησης
meshgrid είναι:

[X,Y] = meshgrid(x,y)

Η συνάρτηση meshgrid δέχεται ως μεταβλητές εισόδου δύο διανύσματα x και y και επιστρέφει δύο διδιάστατες μήτρες X και Y. Οι γραμμές της μήτρας X αντιστοιχούν στα στοιχεία του διανύσματος x ενώ οι στήλες της μήτρας Y αντιστοιχούν στα στοιχεία του διανύσματος y. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις **mesh** ή **surf** μπορούμε να δημιουργήσουμε την τριδιάστατη γραφική παράσταση της συνάρτησης z=f(x,y).

Η γενική μορφή της συνάρτησης mesh είναι:

mesh (X, Y, Z)
ή
mesh (X, Y, Z, C)

Η συνάρτηση mesh δημιουργεί ένα δικτυωτό πλέγμα το οποίο ορίζεται από τις τριάδες που βρίσκονται στα ομοθέσια στοιχεία των διδιάστατων πινάκων X, Y, Z. Σημαντική διαφορά με τη συνάρτηση plot3 είναι ότι στη συνάρτηση mesh (και στη surf που θα δούμε παρακάτω) η Τρίτη παράμετρος θα πρέπει να είναι αποκλειστικά πίνακας και όχι κάποια αριθμητική τιμή ή διάνυσμα. Το χρώμα των σημείων που συνθέτουν το πλέγμα διαφοροποιείται ανάλογα με τις τιμές των στοιχείων του πίνακα Z. Ο πίνακας C συσχετίζει μία τιμή χρώματος με κάθε στοιχείο του πίνακα Z. Αυτού του είδους ο πίνακας μπορεί να δημιουργηθεί με τη συνάρτηση colormap.

Εάν δεν θέλουμε να δημιουργήσουμε τον πίνακα C, μπορούμε να προσδιορίσουμε το χρώμα των σημείων πληκτρολογώντας την εντολή colormap(‘Ονομασία_προτύπου’). Το Matlab περιλαμβάνει διάφορους έτοιμους πίνακες C, όπου καθένας από αυτούς αντιστοιχεί και σε διαφορετική χρωματική διαβάθμιση.

Για την εμφάνιση των μη ορατών τμημάτων της επιφάνειας χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **hidden**. Με την εντολή **hidden off** εμφανίζονται τα τμήματα της επιφάνειας που δεν είναι ορατά καθώς βρίσκονται πίσω από άλλα, ενώ με την εντολή **hidden on** τα τμήματα αυτά παύουν να είναι ορατά. Η προεπιλογή στο Matlab είναι hidden off.

Παραπλήσια με τη συνάρτηση mesh είναι η συνάρτηση surf. Η βασική της διαφορά με τη συνάρτηση mesh είναι ότι οι περιοχές ανάμεσα στις γραμμές πλέγματος χρωματίζονται. Η γενική μορφή της συνάρτησης surf είναι:

surf (X, Y, Z)
ή
surf (X, Y, Z, C)

Στην περίπτωση της συνάρτησης surf, για την εμφάνιση των μη ορατών τμημάτων της επιφάνειας χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση alpha(ποσοστό). Οι τιμές που μπορεί να λάβει το ποσοτό είναι από 0 (πλήρης εμφάνιση μη ορατών τμημάτων) έως 1 (πλήρης απόκρυψη μη ορατών τμημάτων). Τέλος, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις του Matlab μπορεί να αλλάξει ο φωτισμός και η σκίαση των γραφικών παραστάσεων που σχεδιάζονται με τη συνάρτηση surf.

Για την αλλαγή της οπτικής γωνίας ενός τριδιάστατου διαγράμματος χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **view**. Η γενική μορφή της συνάρτησης view είναι:

view (az, el)

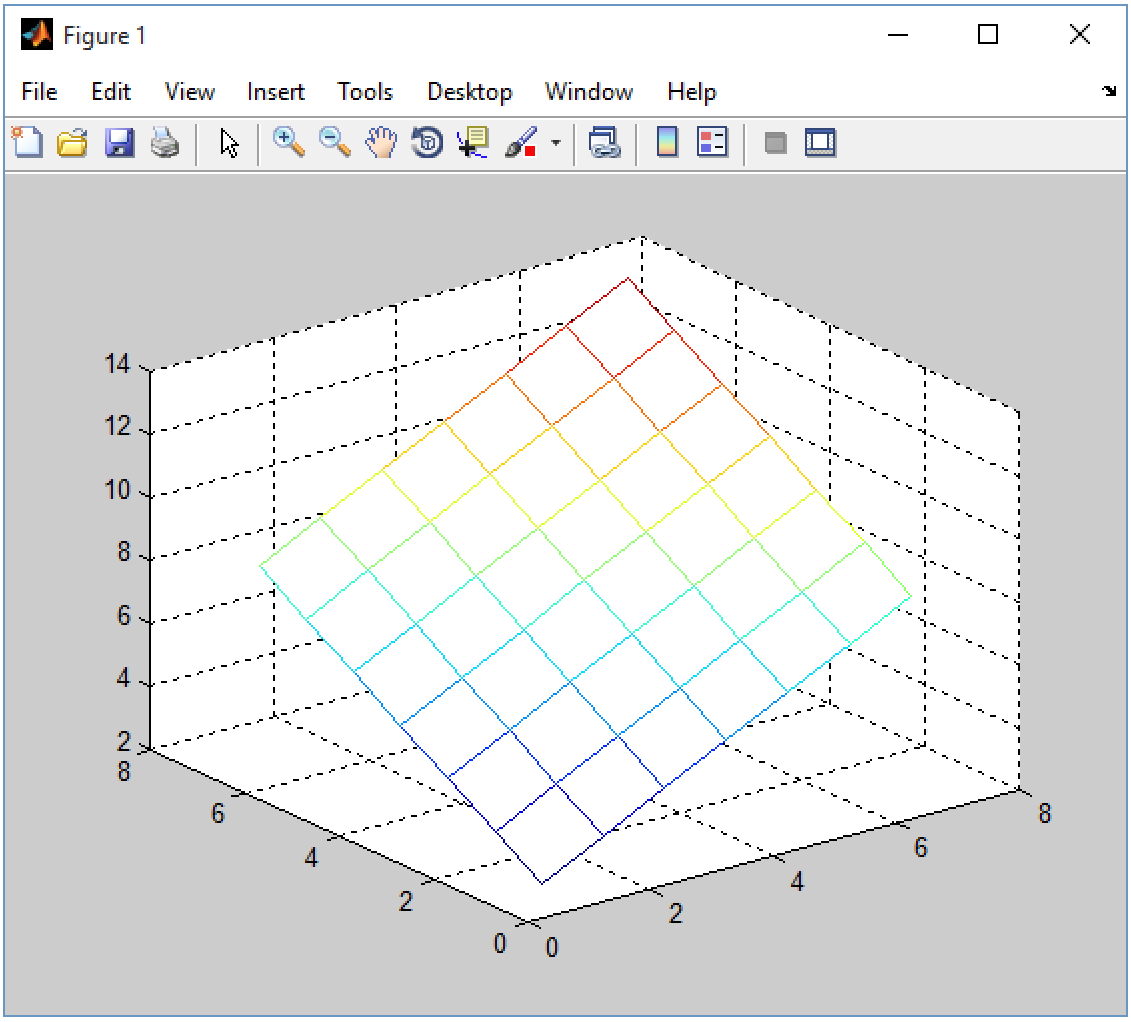
Η παράμετρος *az* αντιστοιχεί στο αζιμούθιο (azimouth) ενώ η παράμετρος *el* αντιστοιχεί στην ανύψωση (elevation). Το αζιμούθιο αντιστοιχεί στην οριζόντια περιστροφή γύρω από τον άξονα των z, υπολογιζόμενη σε μοίρες από τον αρνητικό άξονα των y. Θετικές τιμές του αζιμούθιου αντιστοιχούν σε περιστροφή σύμφωνα με την κατεύθυνση της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Η ανύψωση αντιστοιχεί στην κάθετη ανύψωση της οπτικής γωνίας. Θετικές τιμές της ανύψωσης αντιστοιχούν σε κίνηση της οπτικής γωνίας πάνω από το επίπεδο x,y ενώ αρνητικές τιμές της ανύψωσης αντιστοιχούν σε κίνηση της οπτικής γωνίας κάτω από το επίπεδο x,y. Τέλος, η εντολή view(2) αντιστοιχεί στην εξ'ορισμού οπτική γωνία διδιάστατου διαγράμματος (az=0, el=90) , ενώ η εντολή view(3) αντιστοιχεί στην εξ'ορισμού οπτική γωνία τριδιάστατου διαγράμματος (az=-37.5, el=30).

Θα σχεδιάσουμε, για παράδειγμα, την επιφάνεια που ορίζεται από τη συνάρτηση z=f(x,y), 1≤x≤ 7, 1≤y≤ 7 πληκτρολογώντας τον παρακάτω κώδικα στο παράθυρο εντολών του Matlab.

```
>> x=1:7; %Ορισμός του διανύσματος x
>> y=1:7; %Ορισμός του διανύσματος y

>> [X,Y]=meshgrid(x,y) %Μετατροπή των διανυσμάτων x,y στους πίνακες X,Y
X =
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7
    1    2    3    4    5    6    7

Y =
    1    1    1    1    1    1    1
    2    2    2    2    2    2    2
    3    3    3    3    3    3    3
    4    4    4    4    4    4    4
    5    5    5    5    5    5    5
    6    6    6    6    6    6    6
    7    7    7    7    7    7    7

>> Z=X+Y %Ορισμός του πίνακα Z σύμφωνα με τη σχέση Z=f (X,Y)
Z =
    2    3    4    5    6    7    8
```

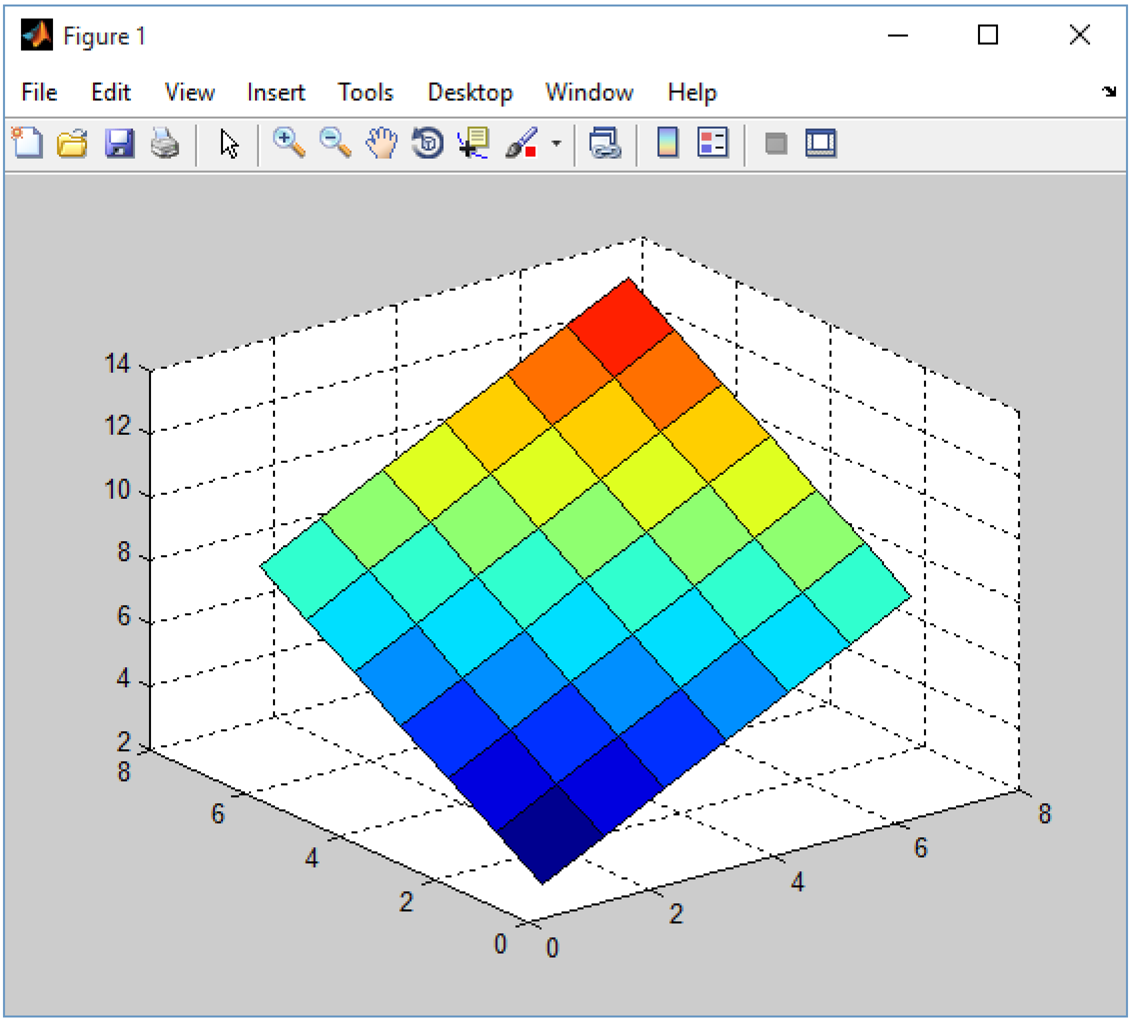
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14

>> mesh(X,Y,Z) %Σχεδίαση της επιφάνειας



Εικόνα 2.11 Σχεδίαση επιφάνειας με την εντολή mesh

>> surf(X,Y,Z) %Σχεδίαση της επιφάνειας με χρώματα



Εικόνα 2.12 Σχεδίαση επιφάνειας με την εντολή surf

2.13.4 Συναρτήσεις για τη δημιουργία διαφόρων τύπων διαγραμμάτων

Στον πίνακα 2.26 περιγράφονται οι βασικές συναρτήσεις του Matlab για τη δημιουργία ραβδοδιαγραμμάτων, διαγραμμάτων πίτας, εμβαδογραμμάτων και ιστογραμμάτων.

Πίνακας 2.26 Συναρτήσεις για τη δημιουργία ειδικού τύπου διαγραμμάτων

Συνάρτηση	**Περιγραφή**
bar(Y)	Κάθετο ραβδόγραμμα στο επίπεδο
barh(Y)	Οριζόντιο ραβδόγραμμα στο επίπεδο
bar3(Y)	Κάθετο ραβδόγραμμα στο χώρο
bar3h(Y)	Οριζόντιο ραβδόγραμμα στο χώρο
hist(Y)	Ιστόγραμμα

pareto(Y)	Ιστόγραμμα(οι μπάρες εμφανίζονται από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη ενώ σχεδιάζεται και καμπύλη με τα αθροίσματα των συχνοτήτων)
area(Y)	Εμβαδόγραμμα
pie(X)	Διάγραμμα πίτας στο επίπεδο
pie3(X)	Διάγραμμα πίτας στο χώρο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε την Θεωρία Χαρτοφυλακίου, πώς υπολογίζουμε και απεικονίζουμε γραφικά το αποτελεσματικό σύνορο, πώς μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο και να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο χαρτοφυλακίου.

3.1 Εισαγωγή

Η σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου εξετάζει τις ιδιότητες των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων, ή επενδυτικών επιλογών, που μπορεί να έχει στη διάθεσή του ένας επενδυτής και επιδιώκει τη σύνθεση αρίστων συνδυασμών τους (χαρτοφυλάκια), που να μεγιστοποιούν την απόδοσή του και να ελαχιστοποιούν τον κίνδυνό του, ικανοποιώντας το σκοπό κάθε ορθολογικού επενδυτή.

Εάν όλες οι συνθήκες της αγοράς ήταν τέλειες, δηλαδή εάν υπήρχε πλήρης βεβαιότητα, οπότε το επιτόκιο χορηγήσεων και καταθέσεων θα ήταν το ίδιο, εάν δεν υπήρχαν φόροι, εάν το κόστος πληροφόρησης ήταν μηδενικό, και οι πληροφορίες ήταν διαθέσιμες σε όλους τότε θα μιλούσαμε για **Τέλεια Αγορά** (Perfect Market). Το γεγονός όμως ότι η αγορά δεν είναι ποτέ τέλεια, αποτελεί έναν λόγο για τον οποίο είναι απαραίτητη η μελέτη της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου (ΘΧ).

Η ΘΧ αναπτύχθηκε από τον Harry Markowitz στις αρχές της δεκαετίας του 1950 και στη συνέχεια εξελήχθηκε ιδιαίτερα ώστε σήμερα να μιλάμε για τη «σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου», που μπορεί να θεωρηθεί ως ο αντίποδας της διαδικασίας επιλογής μετοχών (stock picking). Σύμφωνα με τη βασική θέση της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου ο επενδυτής μπορεί να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του και ταυτόχρονα να μειώσει τον κίνδυνό του, εάν συνδυάσει περιουσιακά στοιχεία, των οποίων οι αποδόσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους. Έτσι λοιπόν, βασικό μήνυμα της θεωρίας χαρτοφυλακίου είναι ότι τα περιουσιακά στοιχεία δεν μπορούν να επιλεγούν μόνο στη βάση των χαρακτηριστικών της κατανομής των αποδόσεων των μεμονωμένων αξιογράφων, αλλά πρέπει να συνυπολογιστεί και η συνδιακύμανση των αποδόσεων μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων, προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα χαρτοφυλάκιο μικρότερης επικινδυνότητας.

3.2 Αποτελεσματικό σύνορο

Το θεμέλιο της σύγχρονης διαχείρησης χαρτοφυλακίου είναι η έννοια του αποτελεσματικού συνόρου (Markowitz, 1952), δηλαδή του συνόλου των χαρτοφυλακίων που για δεδομένη προσδοκώμενη απόδοση Ε(r_p) :

$$\mathrm{E}(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathrm{E}(r_i) \quad (1)$$

ελαχιστοποιούν την διακύμανση σ_ρ^2:

$$\sigma_\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\, \sigma_i^2 + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j Cov(r_i, r_j) \quad (2)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (1) η προσδοκώμενη απόδοση Ε(r_p) του χαρτοφυλακίου καθορίζεται από τις προσδοκώμενες αποδόσεις Ε(r_i) των επιμέρους κεφαλαιουχικών στοιχείων και την αναλογία w_i με την οποία αντιπροσωπεύεται κάθε κεφαλαιουχικό στοιχείο στο χαρτοφυλάκιο. Από την εξίσωση (2) βλέπουμε ότι ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου καθορίζεται από τρεις παράγοντες: 1) την αναλογία w_i κάθε κεφαλαιουχικού στοιχείου στο χαρτοφυλάκιο, 2) την τυπική απόκλιση σ_i των ιστορικών αποδόσεών του, και 3) την γραμμική συσχέτιση ρ_{ij} μεταξύ αυτών των αποδόσεων για κάθε ζευγάρι κεφαλαιουχικών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο. Τέλος, ο όρος $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j = Cov(r_i, r_j)$ είναι αλλιώς γνωστός και ως συνδιακύμανση.

Το Matlab διαθέτει συναρτήσεις που επιτρέπουν να προσδιοριστεί η επιθυμητή ισορροπία μεταξύ της απόδοσης και του συναρτώμενου κινδύνου.

3.3 Υπολογισμός και γραφική απεικόνιση του αποτελεσματικού συνόρου(efficient frontier)

Για να υπολογίσουμε το αποτελεσματικό σύνορο στο Matlab χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **frontcon**, η οποία προϋποθέτει τον ορισμό χαρακτηριστικών του κάθε περιουσιακού στοιχείου που συνθέτει το χαρτοφυλάκιο. Το αποτελεσματικό σύνορο συνδέει τις προσδοκώμενες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου (κάθετος άξονας) με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο όπως αυτός εκφράζεται με την τυπική απόκλιση(οριζόντιος άξονας).

Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

[PortRisk, PortReturn, PortWts] = frontcon (ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts, PortReturn, AssetBounds, Groups, GroupBounds)

Ακολουθεί ο πίνακας 3.1 με τα ορίσματα της συνάρτησης frontcon.

Πίνακας 3.1 Ορίσματα της συνάρτησης frontcon

Όρισμα	Περιγραφή
PortRisk	Διάνυσμα, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί 1, που αναφέρεται στην τυπική απόκλιση κάθε χαρτοφυλακίου
PortReturn	Διάνυσμα, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί 1, που αναφέρεται στην προσδοκώμενη απόδοση κάθε χαρτοφυλακίου
PortWts	Ένας πίνακας των αναλογιών κάθε περιουσιακού στοιχείου, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί αριθμό περιουσιακών στοιχείων. Κάθε γραμμή αναφέρεται σε ένα χαρτοφυλάκιο. Το άθροισμα όλων των αναλογιών σε ένα χαρτοφυλάκιο ισούται με τη μονάδα.
ExpReturn	Προσδοκώμενη (μέση) απόδοση κάθε περιουσιακού στοιχείου. Είναι ένα διάνυσμα γραμμή με διαστάσεις 1 επί τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων
ExpCovariance	Η συνδιακύμανση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Ένας πίνακας με διαστάσεις n x n, όπου n= ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων
NumPorts (προαιρετικό)	Ο αριθμός των χαρτοφυλακίων. Οι αποδόσεις ισαπέχουν μεταξύ της μέγιστης δυνατής απόδοσης και της ελάχιστης τιμής κινδύνου όπως αυτός εκφράζεται από την τυπική απόκλιση. Η προεπιλογή είναι 10 χαρτοφυλάκια. Στην περίπτωση που ορίζεται επιθυμητή τιμή για την απόδοση των χαρτοφυλακίων(PortReturn), στη θέση του NumPorts εισάγεται κενός πίνακας [ ].

PortReturn (προαιρετικό)	Επιθυμητές τιμές των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων στο αποτελεσματικό σύνορο. Διάνυσμα με αριθμό στοιχείων ίσο με τον αριθμό των χαρτοφυλακίων.
AssetBounds	Άνω και κάτω όρια των αναλογιών κάθε περιουσιακού στοιχείουστο χαρτοφυλάκιο. Ένας πίνακας διαστάσεων 2 επί τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων. Η προεπιλογή για το κάτω όριο είναι = όλα μηδέν, ενώ η προεπιλογή για το πάνω όριο είναι = όλα μονάδες, δηλαδή οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο μπορεί να αποτελεί ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο.
Groups (προαιρετικό)	Ορίζει ομάδες ή κλάσεις περιουσιακών στοιχείων. Ένας πίνακας με διαστάσεις τον αριθμό ομάδων επί τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων. Κάθε γραμμή προσδιορίζει μία ομάδα. Groups(i,j)=1. Το στοιχείο j ανήκει στην ομάδα i.
GroupBounds (προαιρετικό)	Άνω και κάτω όρια των συνολικών αναλογιών όλων των περιουσιακών στοιχείων σε μια ομάδα. Ένας πίνακας με διαστάσεις τον αριθμό των ομάδων επί 2. Η προεπιλογή για το κάτω όριο είναι = όλα μηδέν, ενώ η προεπιλογή για το πάνω όριο είναι = όλα μονάδες.

Με βάση τα παραπάνω για την διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου ισχύει PortVar = PortWts*ExpCovariance*PortWts, ενώ για την προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου PortReturn = dot(ExpReturn, PortWts). Η συνάρτηση frontcon όταν συντάσσεται χωρίς τα ορίσματα εξόδου δημιουργεί τη γραφική παράσταση του αποτελεσματικού συνόρου.

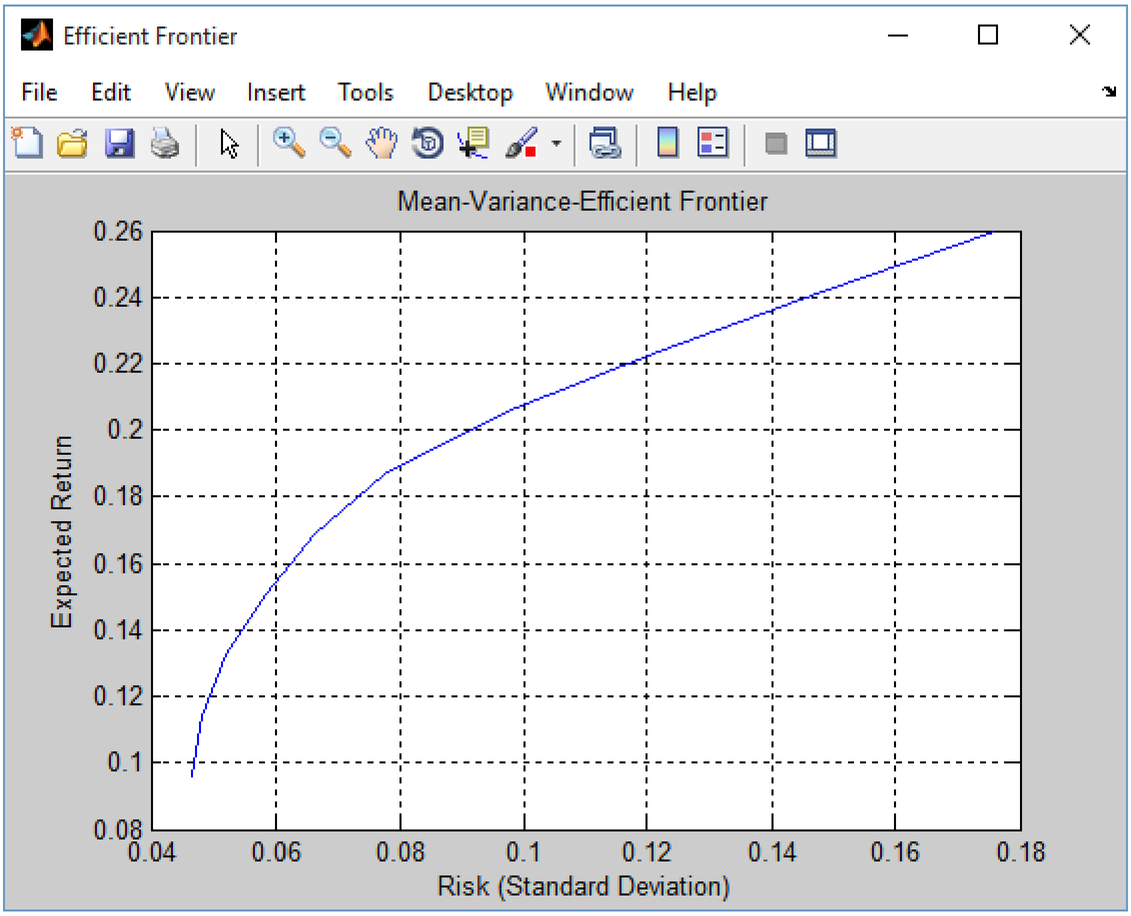
Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά το αποτελεσματικό σύνορο 10 χαρτοφυλακίων τα οποία περιλαμβάνουν τρεις μετοχές. Αρχικά εισάγουμε την προσδοκώμενη απόδοση και τη συνδιακύμανση των αποδόσεων των τριών μετοχών στο χώρο εργασίας του Matlab. Ακολουθεί ο παρακάτω κώδικας:

%Εισαγωγή προσδοκώμενης απόδοσης και συνδιακύμανσης

```
>> ExpReturn = [0.08 0.11 0.26];
>> ExpCovariance=[ 0.009 -0.006  0.012
                  -0.006  0.012 -0.010
                   0.012 -0.010  0.031];
```

NumPorts=10; %Ορίζουμε τον αριθμό των χαρτοφυλακίων

frontcon(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts); %Δημιουργούμε το αποτελεσματικό σύνορο



Εικόνα 3.1 Αποτελεσματικό σύνορο

[PortRisk, PortReturn, PortWts] = frontcon (ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts); %Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση, την προσδοκώμενη απόδοση και τις αναλογίες για κάθε ένα από τα δέκα χαρτοφυλάκια.

```
PortRisk =
    0.0467
    0.0481
```

```
    0.0522
    0.0584
    0.0661
    0.0776
    0.0974
    0.1216
    0.1482
    0.1761
PortReturn =
    0.0960
    0.1142
    0.1324
    0.1506
    0.1689
    0.1871
    0.2053
    0.2235
    0.2418
    0.2600
PortWts =
    0.5303    0.4572    0.0125
    0.4062    0.4846    0.1092
    0.2822    0.5119    0.2059
    0.1581    0.5393    0.3026
    0.0341    0.5666    0.3993
         0    0.4860    0.5140
         0    0.3645    0.6355
         0    0.2430    0.7570
         0    0.1215    0.8785
         0         0    1.0000
```

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι το πρώτο χαρτοφυλάκιο αποτελείται κατά 53% από την πρώτη μετοχή, κατά 46% από την δεύτερη μετοχή και κατά 1% από την τρίτη μετοχή. Τέλος, η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι 0.0467 ενώ η προσδοκώμενη απόδοση είναι 0.0960.

3.4 Επιλογή άριστου χαρτοφυλακίου (optimal portfolio) όταν απαρτίζεται από τίτλους που περιέχουν κίνδυνο και από τίτλους χωρίς κίνδυνο.

Το άριστο χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως το καλύτερο χαρτοφυλάκιο από όλα τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια και αντιστοιχεί στο σημείο επαφής του αποτελεσματικού συνόρου και της καμπύλης αδιαφορίας του επενδυτή. Κάθε καμπύλη αδιαφορίας αντικατοπτρίζει διάφορους συνδυασμούς ποσοστού απόδοσης/κινδύνου οι οποίοι δίνουν το ίδιο επίπεδο ικανοποίησης στον επενδυτή. Για την επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου με βάση το ποσοστό απόδοσης τίτλου χωρίς κίνδυνο, το επιτόκιο δανεισμού και το βαθμό αποστροφής κινδύνου (risk aversion) του επενδυτή, χρησιμοποιούμε στο Matlab τη συνάρτηση portalloc. Η συνάρτηση portalloc διαιρεί το χαρτοφυλάκιο σε χρηματοδοτικούς τίτλους χωρίς κίνδυνο και σε χρηματοδοτικούς τίτλους που περιέχουν κίνδυνο ανάλογα με τις προτιμήσεις κινδύνου του επενδυτή. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αναλογίες των διαφόρων χρηματοδοτικών τίτλων στο χαρτοφυλάκιο κατά μήκος του αποτελεσματικού συνόρου. Στην ουσία πρόκειται για μια απόφαση αναφορικά με την κατανομή του κεφαλαίου σε χρηματοδοτικούς τίτλους χωρίς κίνδυνο και σε χρηματοδοτικούς τίτλους που περιέχουν κίνδυνο.

Η γενική μορφή της συνάρτησης portalloc είναι:

[RiskyRisk, RiskyReturn, RiskyWts, RiskyFraction, OverallRisk, OverallReturn] = portalloc(PortRisk, PortReturn, PortWts, RisklessRate, BorrowRate, RiskAversion)

Ακολουθεί ο πίνακας 3.2 με τα ορίσματα της συνάρτησης portalloc.

Πίνακας 3.2 Ορίσματα της συνάρτησης portalloc

Όρισμα	Περιγραφή
RiskyRisk	Η τυπική απόκλιση του άριστου χαρτοφυλακίου που ενέχει κίνδυνο
RiskyReturn	Η προσδοκώμενη απόδοση του άριστου χαρτοφυλακίου που ενέχει κίνδυνο

RiskyWts	Είναι ένα διάνυσμα, διαστάσεων 1 επί τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων , που αντιστοιχεί στις αναλογίες που προσδιορίζουν το άριστο χαρτοφυλάκιο που ενέχει κίνδυνο. Το άθροισμα όλων των αναλογιών στο χαρτοφυλάκιο ισούται με τη μονάδα.
RiskyFraction	Είναι το μέρος του συνολικού χαρτοφυλακίου που απαρτίζεται από το χαρτοφυλάκιο που ενέχει κίνδυνο. Μία τιμή 1.4 υποδηλώνει ότι το 40% του κεφαλαίου μπορεί να είναι δανειακά κεφάλαια. Μία τιμή 0.6 υποδηλώνει ότι το κεφάλαιο του χαρτοφυλακίου έχει κατανεμηθεί κατά 60% σε χρηματοδοτικούς τίτλους που περιέχουν κίνδυνο, ενώ το 40% έχει επενδυθεί σε χρηματοδοτικούς τίτλους χωρίς κίνδυνο με το επιτόκιο τίτλων χωρίς κίνδυνο
OverallRisk	Η τυπική απόκλιση του άριστου συνολικού χαρτοφυλακίου.Υπολογίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος της τυπικής απόκλισης του μέερους του χαρτοφυλακίου που περιέχει κίνδυνο και της τυπικής απόκλισης του μέρους του χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο
OverallReturn	Η προσδοκώμενη απόδοση του άριστου συνολικού χαρτοφυλακίου. Υπολογίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος της προσδοκώμενης απόδοσης του μέρους του χαρτοφυλακίου που περιέχει κίνδυνο και της τυπικής απόκλισης του μέρους του χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο.
PortRisk	Διάνυσμα, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί 1, που αναφέρεται στην τυπική απόκλιση κάθε περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο και συνθέτει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο
PortReturn	Διάνυσμα, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί 1, που αναφέρεται στην προσδοκώμενη απόδοση κάθε περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο και συνθέτει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο

PortWts	Ένας πίνακας των αναλογιών κάθε περιουσιακού στοιχείου, διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί αριθμό περιουσιακών στοιχείων. Κάθε γραμμή αναφέρεται σε ένα χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται μόνο από χρηματοδοτικούς τίτλους που περιέχουν κίνδυνο. Το άθροισμα όλων των αναλογιών σε ένα χαρτοφυλάκιο ισούται με τη μονάδα
RisklessRate	Το ποσοστό απόδοσης τίτλου χωρίς κίνδυνο σε δεκαδική μορφή
BorrowRate (προαιρετικό)	Το επιτόκιο δανεισμού σε δεκαδική μορφή. Η προεπιλογή είναι NaN
RiskAversion (προαιρετικό)	Ο συντελεστής βαθμού αποστροφής κινδύνου (risk aversion) του επενδυτή. Υψηλές τιμές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερη αποστροφή κινδύνου. Συνήθως οι τιμές κυμαίνονται μεταξύ 2 και 4. Η προεπιλογή είναι 3.

Έστω, για παράδειγμα, ότι ενδιαφερόμαστε να επενδύσουμε σε τρεις μετοχές. Αρχικά εισάγουμε την προσδοκώμενη απόδοση και την συνδιακύμανση των αποδόσεων των τριών μετοχών στο χώρο εργασίας του Matlab.

```
%Εισαγωγή προσδοκώμενης απόδοσης και συνδιακύμανσης
>> ExpReturn = [0.08 0.11 0.26];
>> ExpCovariance=[ 0.009 -0.006  0.012
                  -0.006  0.012 -0.010
                   0.012 -0.010  0.031];

NumPorts= 10; % Ορισμός του αριθμού των χαρτοφυλακίων

[PortRisk, PortReturn, PortWts]= frontcon(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts);
% Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης, της προσδοκώμενης απόδοσης και των αναλογιών για κάθε ένα από τα 10 χαρτοφυλάκια

PortRisk =
    0.0467
```

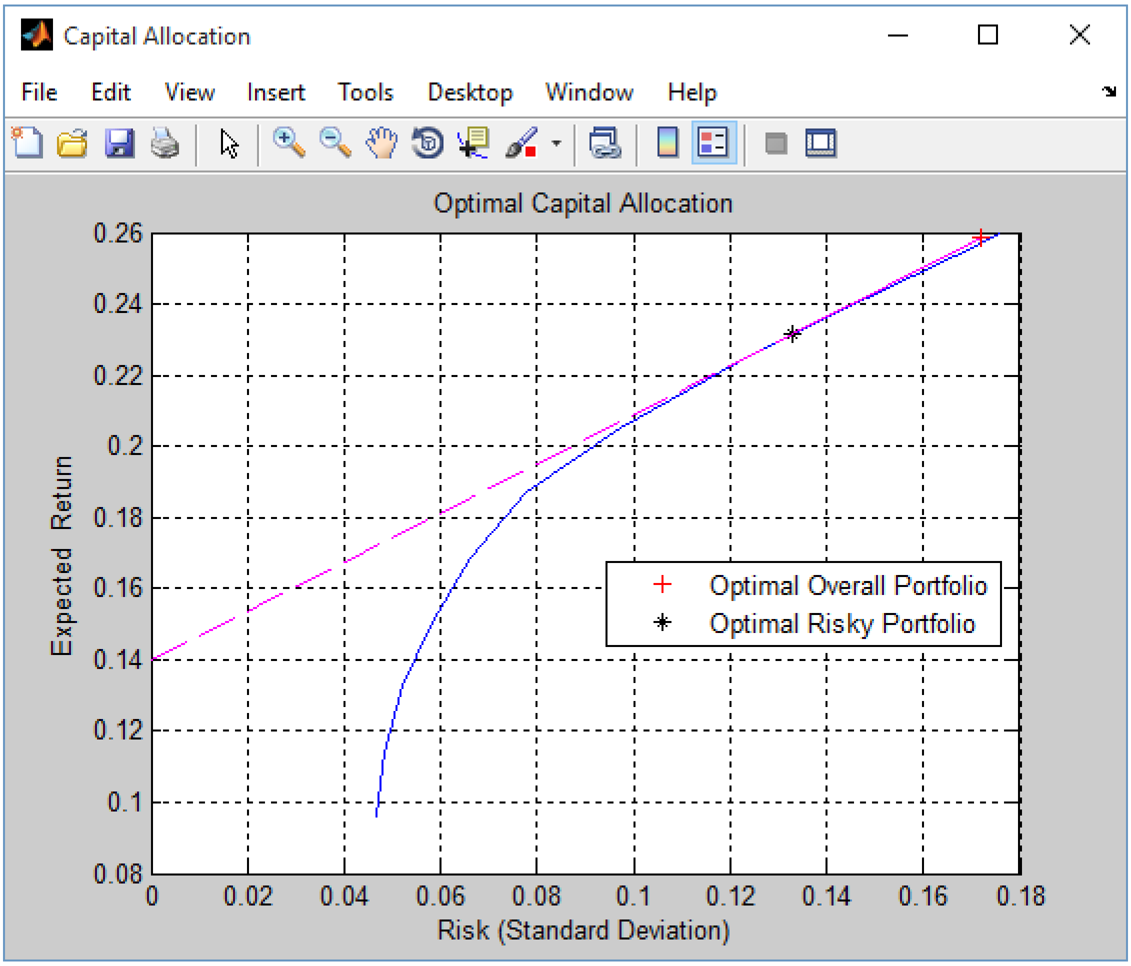
```
    0.0481
    0.0522
    0.0584
    0.0661
    0.0776
    0.0974
    0.1216
    0.1482
    0.1761

PortReturn =
    0.0960
    0.1142
    0.1324
    0.1506
    0.1689
    0.1871
    0.2053
    0.2235
    0.2418
    0.2600

PortWts =
    0.5303    0.4572    0.0125
    0.4062    0.4846    0.1092
    0.2822    0.5119    0.2059
    0.1581    0.5393    0.3026
    0.0341    0.5666    0.3993
         0    0.4860    0.5140
         0    0.3645    0.6355
         0    0.2430    0.7570
         0    0.1215    0.8785
         0         0    1.0000
```

RisklessRate = 0.04; % Εισαγωγή του ποσοστού απόδοσης τίτλου χωρίς κίνδυνο

BorrowRate = 0.14; % Εισαγωγή του επιτοκίου δανεισμού

RiskAversion = 4; % Εισαγωγή του βαθμού αποστροφής κινδύνου του επενδυτή

portalloc(PortRisk, PortReturn, PortWts, RisklessRate, BorrowRate, RiskAversion); % Δημιουργία γραφικής παράστασης της άριστης κατανομής περιουσιακών στοιχείων



Εικόνα 3.2 Γραφική παράσταση της άριστης κατανομής περιουσιακών στοιχείων

[RiskyRisk, RiskyReturn, RiskyWts, RiskyFraction, OverallRisk, OverallReturn] = portalloc(PortRisk, PortReturn, PortWts, RisklessRate, BorrowRate, RiskAversion); % Υπολογισμός των RiskyRisk, RiskyReturn, RiskyWts, RiskyFraction, OverallRisk, OverallReturn

RiskyRisk =

0.1328

RiskyReturn =
0.2313

RiskyWts =
0   0.1911   0.8089

RiskyFraction =
1.2954

OverallRisk =
0.1720

OverallReturn =
0.2583

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή RiskyFraction είναι πάνω από το 1 και ισούται με 1.2954. Η τιμή αυτή υποδηλώνει ότι το 29.54% του κεφαλαίου μπορεί να είναι δανειακά κεφάλαια. Τέλος, το 19.11% του κεφαλαίου του χαρτοφυλακίου θα επενδυθεί στην δεύτερη μετοχή, το 80.89% στην τρίτη μετοχή, ενώ κανένα ποσό δεν θα επενδυθεί σε τίτλους χωρίς κίνδυνο.

3.5 Υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk) Χαρτοφυλακίου

Η **VaR** εκφράζει τη μέγιστη δυνατή απώλεια που μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο,σε δεδομένη χρονική περίοδο και με δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, ενώ μπορεί να υπολογιστεί για χαρτοφυλάκια που περιέχουν οποιονδήποτε αριθμό διαφορετικών κεφαλαιουχικών στοιχείων. Η μεγάλη αποδοχή της VaR για τη μέτρηση του κινδύνου της αγοράς από τα χρηματοοικονομικά ιδρύματα οδήγησε την Basle Committee on Banking Supervision στην έκδοση συστάσεων, που ενσωματώθηκαν στην αντίστοιχη Ευρωπαϊκή Οδηγία Κεφαλαιακής Επάρκειας (European Capital Adequacy Directive – CAD2), και επιτρέπουν πλέον στα χρηματοοικονομικά ιδρύματα να υπολογίζουν τις απαιτήσεις επάρκειας κεφαλαίου στη βάση της VaR. Υπάρχουν σήμερα αρκετοί διαφορετικοί τρόποι μέτρησης της VaR, ο κάθε ένας εκ των οποίων έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες. Όμως μια κοινή κριτική για όλες τις προσεγγίσεις VaR, είναι ότι δεν δίνουν κάποια ένδειξη για το μέγεθος της πιθανής απώλειας εάν μια κίνηση της αγοράς ξεφύγει από το επίπεδο εμπιστοσύνης του υποδείγματος. Επομένως, οι προσεγγίσεις VaR ισχύουν γι'αυτό που ονομάζουμε «κανονικές συνθήκες αγοράς».

Για να υπολογίσουμε την VaR ενός χαρτοφυλακίου στο Matlab χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **portvrisk**. Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

ValueAtRisk = portvrisk(PortReturn, PortRisk, RiskThreshold, PortValue)

όπου RiskThreshold (προαιρετικό): επίπεδο εμπιστοσύνης. Αριθμός ή διάνυσμα διαστάσεων αριθμός χαρτοφυλακίων επί 1. Η προεπιλογή είναι είναι 0.05 (5%).

Έστω ότι θέλουμε, για παράδειγμα, να υπολογίσουμε τη VaR ανά μονάδα βάσης πληκτρολογώντας κώδικα με τα ακόλουθα δεδομένα:

```
>> PortReturn=0.40/100; %προσδοκώμενη απόδοση κάθε περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο και συνθέτει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο
>> PortRisk=5.10/100; %τυπική απόκλιση κάθε περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο και συνθέτει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο
>> RiskThreshold=0.05; %επίπεδο εμπιστοσύνης
%Υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο χαρτοφυλακίου
>> ValueAtRisk = portvrisk(PortReturn, PortRisk, RiskThreshold)
ValueAtRisk =
 0.0799
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΧΡΕΟΓΡΑΦΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται οι βασικές έννοιες που αφορούν την επένδυση σε ομόλογα. Περιγράφονται, δηλαδή, τα γενικά χαρακτηριστικά των ομολογιών, οι βασικές συναρτήσεις υπολογισμού της θεωρητικής τιμής ομολόγου, απόδοσης στη λήξη, διάρκεια και κυρτότητα ομολόγου.

4.1 Εισαγωγή

Οι ομολογίες ή ομόλογα είναι τίτλοι που εκδίδονται από το δημόσιο αλλά και τις ιδιωτικές επιχειρήσεις, με σκοπό την άντληση κεφαλαίων από το κοινό (αποταμιευτές), για την κάλυψη των μακροπρόθεσμων αναγκών τους. Πρόκειται για τίτλους ελεύθερα μεταβιβάσιμους και διαπραγματεύσιμους στις αγορές ομολόγων. Οι τόκοι των εγχώριων ομολογιών φορολογούνται με βάση την εγχώρια νομοθεσία και έχουν χαμηλότερη φορολόγηση σε σχέση με τις καταθέσεις. Εκδίδονται τόσο σε εθνικό νόμισμα όσο και με ρήτρα άλλου νομίσματος.

Μια πρώτη διάκριση των ομολογιών γίνεται **με βάση τη λήξη** τους σε:

1. Βραχυπρόθεσμες εκδόσεις (short-term) με διάρκεια ενός έτους ή μικρότερη του έτους. Τέτοιες εκδόσεις είναι τα γνωστά Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου (ΕΓΔ, Tresury bills) και άλλα προϊόντα της χρηματαγοράς.
2. Μεσοπρόθεσμες εκδόσεις (medium-term) με διάρκεια 1-10 χρόνια (Notes).
3. Μακροπρόθεσμες εκδόσεις (long-term) με διάρκεια μεγαλύτερη των 10 ετών (Bonds). Κάποιες κυβερνήσεις εκδίδουν και διηνεκείς ομολογίες δηλαδή χωρίς λήξη (consols).

Μια δεύτερη σημαντική διάκριση γίνεται **με βάση τα χαρακτηριστικά των τοκομεριδίων (coupons)** των ομολογιών.

Α. Ομολογίες με σταθερό επιτόκιο (Fixed Coupon Bonds)

Β. Ομολογίες με κυμαινόμενο επιτόκιο (Floating Rate Bonds)

Γ. Ομολογίες χωρίς τοκομερίδιο (zero coupon bonds)

Δ. Τιμαριθμοποιημένα Ομόλογα (State bonds index linked)

Οι ομολογίες με σταθερό επιτόκιο, πληρώνουν έναν σταθερό τόκο μια φορά το χρόνο (σε ορισμένες περιπτώσεις κάθε 2 φορές- semi-annual) που ονομάζεται τοκομερίδιο ή κουπόνι (coupon). Διαιρώντας το κουπόνι με την ονομαστική τιμή υπολογίζουμε το ετήσιο επιτόκιο της ομολογίας, γνωστό ως ονομαστική απόδοση (coupon rate). Στη λήξη κάθε τοκοφόρου περιόδου, ο κάτοχος εισπράττει το τοκομερίδιο και στη λήξη του τίτλου εισπράττει και το κεφάλαιο ή αλλιώς την ονομαστική αξία (face or par value), γνωστή και ως αξία στη λήξη (redemption value).

Μια τυπική έκδοση ομολογίας με κυμαινόμενο επιτόκιο έχει συνήθως ονομαστική αξία 3000 ευρώ ή 30.000 ευρώ και διάρκεια μεταξύ 3,5 και 7 ετών. Τα χαρακτηριστικά τους είναι ίδια με τις σταθερού τοκομεριδίου ομολογίες, μόνο που το τοκομερίδιό τους είναι όσο των ΕΓΔ προσαυξημένο κατά ένα σταθερό ποσοστό (π.χ., 0.3 για τα 3ετή, 0.8 για τα 5ετή και 1.3 για τα 7ετή).

Οι ομολογίες χωρίς τοκομερίδιο μοιάζουν με τα Έντοκα Γραμμάτια, καθώς αγοράζονται με έκπτωση και εξοφλούνταιστη λήξη τους στην ονομαστική τους αξία μείον τους φόρους. Συνήθως οι ομολογίες αυτές έχουν διετή διάρκεια.

Τα τιμαριθμοποιημένα ομόλογα έχουν συνήθως διάρκεια 5 και 10 ετών και σταθερή ετήσια απόδοση πάνω από τον πληθωρισμό. Έτσι, εγγυώνται ότι τα χρήματα των επενδυτών θα αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνει ο πληθωρισμός. Αγοράζονται στην ονομαστική αξία αν φέρουν κουπόνια και με έκπτωση αν δεν φέρουν κουπόνια.

Κάποια άλλα είδη ομολογιών λίγο περισσότερο εξειδικευμένα τα οποία διαπραγματεύονται στις διεθνείς αγορές είναι τα ακόλουθα:

- *Callable bonds* είναι ομολογίες που δίνουν το δικαίωμα στον εκδότη να τις εξαγοράσει πριν τη λήξη τους
- *Putable bonds* είναι ομολογίες που δίνουν το δικαίωμα στον επενδυτή να υποχρεώσει τον εκδότη να τις εξαγοράσει πριν τη λήξη τους.
- *Convertible bonds* (Μετατρέψιμες ομολογίες) είναι ομολογίες που δίνουν το δικαίωμα στον επενδυτή να τις μετατρέψει σε μετοχές της εκδότριας εταιρείας μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, όταν η επιχείρηση το αποφασίσει χωρίς ευνοϊκούς όρους.
- *Bonds with equity warrants* (Ομόλογα με παραστατικό δικαιώματος προαίρεσης) είναι ομόλογα που ο κάτοχός τους έχει το δικαίωμα να τα μετατρέψει σε μετοχές σε μια προκαθορισμένη τιμή.
- *Junk bonds* είναι ομολογίες που εκδίδουν εταιρείες ή οργανισμοί οι οποίοι χαρακτηρίζονται από υψηλό πιστωτικό κίνδυνο.

4.2 Προσδιορισμός της Αξίας (Αποτίμηση) Ομολογίας

Η ακαθάριστη/θεωρητική τιμή ενός ομολόγου είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας όλων των μελλοντικών χρηματικών ροών (τοκομερίδια και ονομαστική αξία) που θα αποδώσει το ομόλογο μέχρι τη λήξη του. Σε περίπτωση που είναι γνωστά τα τρέχοντα επιτόκια για τις λήξεις που συμπίπτουν με τις πληρωμές που θα αποδώσει το ομόλογο στον κάτοχό του τότε η ακαθάριστη τιμή του ομολόγου δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$B = \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot e^{-r_i t_i} + M \cdot e^{-r_n t_n}$ (Συνεχής Ανατοκισμός)

$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+R_i)^i} + \frac{M}{(1+R_n)^n}$ (Ετήσιος Ανατοκισμός)

όπου:

B: η ακαθάριστη τιμή του ομολόγου

CF_i : η χρηματική ροή σε ευρώ που θα ληφθεί σε t_i έτη από σήμερα

n : ο αριθμός των χρηματικών ροών εως τη λήξη του ομολόγου

r_i : το τρέχον επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού για χρονική περίοδο t_i ετών από σήμερα

R_i : το τρέχον επιτόκιο ετήσιου ανατοκισμού για χρονική περίοδο t_i ετών από σήμερα

Μ : η ονομαστική αξία του ομολόγου

Επειδή η τιμή του ομολόγου εκφράζεται ανά 100 ευρώ ονομαστικής αξίας, στις προηγούμενες σχέσεις θέτουμε Μ=100. Τέλος, θεωρούμε ότι η τελευταία πληρωμή περιέχει το τελευταίο τοκομερίδιο και την ονομαστική αξία του ομολόγου.

4.2.1 Τιμή ομολόγων με τοκομερίδιο

Η συνάρτηση στο Matlab για τον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής ομολόγου είναι η **bndprice** και η γενική της μορφή είναι:

[Price, AccruedInt] = bndprice (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

Πίνακας 4.1 Ορίσματα της συνάρτησης bndprice

Όρισμα	Περιγραφή
Price	Η θεωρητική τιμή του ομολόγου
AccruedInt	Η συσσωρευτική απόδοση κατά την εκκαθάριση
Yield	Απόδοση στη λήξη σε εξαμηνιαία βάση
CouponRate	Τοκομερίδιο (σε δεκαδική μορφή)
Settle	Ημερομηνία διακανονισμού. Διάνυσμα ημερομηνιών σε μορφή αριθμού ή σε αλφαριθμητική μορφή. Θα πρέπει να είναι νωρίτερα ή την ίδια μέρα με την ωρίμανση.
Maturity	Ωρίμανση- Διάρκεια ζωής ομολογίας
Period (προαιρετικό)	Συχνότητα με την οποία γίνονται οι πληρωμές των τοκομεριδίων (Πίνακας 4.2)
Basis (προαιρετικό)	Κλάσμα στο οποίο ο αριθμητής δηλώνει τον αριθμό ημερών ανάμεσα σε δύο ημερομηνίες πληρωμών τοκομεριδίων και ο παρονομαστής δηλώνει τον αριθμό ημερών του έτους (Πίνακας 4.3)
EndMonthRule (προαιρετικό)	Ο κανόνας τέλος του μήνα. Προσδιορίζει εάν η πληρωμή του τοκομεριδίου γίνεται την τελευταία μέρα του μήνα ή όχι. Ο κανόνας εφαρμόζεται όταν η ωρίμανση είναι η τελευταία ημέρα του μήνα που έχει 30 ή λιγότερες ημέρες. Εάν ορίσουμε 0=αγνόησε τον κανόνα, δηλαδή η πληρωμή του τοκομεριδίου γίνεται την ίδια ημέρα (από αριθμητικής άπποψη) κάθε μήνα. Εάν ορίσουμε 1=εφάρμοσε τον κανόνα(προεπιλογή), δηλαδή η πληρωμή του τοκομεριδίου γίνεται την τελευταία μέρα του μήνα.
IssueDate (προαιρετικό)	Ημερομηνία έκδοσης του ομολόγου
FirstCouponDate (προαιρετικό)	Η πρώτη ημερομηνία πληρωμής του τοκομεριδίου
LastCouponDate (προαιρετικό)	Η τελευταία ημερομηνία πληρωμής του τοκομεριδίου

StartDate (προαιρετικό)	Η ημερομηνία από την οποία μπορούν να υπολογιστούν οι ταμειακές ροές του ομολόγου
Face (προαιρετικό)	Ονομαστική αξία. Προεπιλογή =100

Πίνακας 4.2 Συχνότητα με την οποία γίνονται οι πληρωμές των τοκομεριδίων

Συντελεστής	**Συχνότητα**
0	-
1	Ετησίως
2 (προεπιλογή)	Εξαμηνιαία
3	Τετραμηνιαία
4	Τριμηνιαία
6	Ανά δεκαπενθήμερο
12	Ανά μήνα

Πίνακας 4.3 Συντελεστές βάσης

Βάση	**Περιγραφή**
0	actual/actual (προεπιλογή). Πραγματικός αριθμός ημερών ανάμεσα σε δύο ημερομηνίες πληρωμών και τον πραγματικό αριθμό ημερών στο δεδομένο έτος.
1	30/360
2	actual/360
3	actual/365
4	30/360
5	30/360
6	30/360
7	actual/365
8	actual/actual
9	actual/360
10	actual/365
11	30/360E

Να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η θεωρητική τιμή ενός δεκαετούς ομολόγου με εκδοτικό επιτόκιο 4% για τρεις διαφορετικές τιμές της απόδοσης στη λήξη (4%,6% και 7%). Τα τοκομερίδια πληρώνονται ανά εξάμηνο. Πληκτρολογούμε στη γραμμή εντολών τον παρακάτω κώδικα:

```
>> Yield = [0.04; 0.06; 0.07]; %Ορισμός τιμών απόδοσης στη λήξη
>> CouponRate = 0.04; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle = '10-May-2006'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity = '20-May-2016'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
%Υπολογισμός θεωρητικής τιμής ομολόγου
>> [Price, AccruedInt] = bndprice (Yield, CouponRate, Settle, Maturity)

Price =
   99.9990
   85.0909
   78.6387

AccruedInt =
   1.8895
    1.8895
    1.8895
```

4.2.2 Τιμή ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο

Η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε στο Matlab για να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή ομολόγου χωρίς τοκομερίδιο ή ομολόγου το οποίο πληρώνει ένα τοκομερίδιο στην ημερομηνία λήξης του ομολόγου είναι η prmat και έχει την παρακάτω γενική μορφή:

[Price, AccruInterest] = prmat (Settle, Maturity, IssueDate, Face, CouponRate, Yield, Basis)

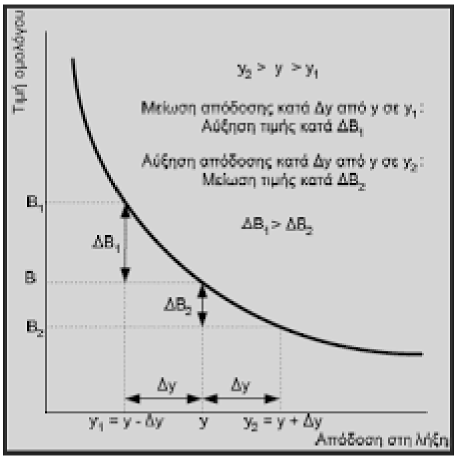
Από τα παραπάνω ορίσματα προαιρετικό είναι μόνο το όρισμα Basis.

Να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η θεωρητική τιμή ενός ομολόγου με εκδοτικό επιτόκιο 6% και τιμή 4% απόδοσης στη λήξη. Πληκτρολογούμε στη γραμμή εντολών τον παρακάτω κώδικα:

```
>> Settle = '10-May-2006'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity = '10-Jun-2006'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> IssueDate = '10-Jun-2005'; %Ορισμός ημερομηνίας έκδοσης του ομολόγου
>> Face = 100; %Ορισμός ονομαστικής αξίας
>> CouponRate = 0.06; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Yield = 0.04; %Ορισμός τιμής απόδοσης στη λήξη
%Υπολογισμός θεωρητικής τιμής ομολόγου χωρίς τοκομερίδιο
>> [Price, AccruInterest] = prmat (Settle, Maturity, IssueDate, Face, CouponRate, Yield)

Price =
  99.9876

AccruInterest =
 3.6603
```

4.3 Υπολογισμός Απόδοσης στη λήξη

Με δεδομένη την ακαθάριστη τιμή του ομολόγου μπορούμε να υπολογίσουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο, y, το οποίο εφαρμοζόμενο σε όλες τις μελλοντικές χρηματικές ροές θα μας δώσει την ακαθάριστη τρέχουσα τιμή του ομολόγου που ισχύει στην αγορά, ως το άθροισμα της παρούσας αξίας όλων των αναμενόμενων χρηματικών ροών. Το προεξοφλητικό επιτόκιο y, είναι ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της σειράς των μελλοντικών χρηματικών ροών που αντιπροσωπεύει το ομόλογο. Είναι επίσης γνωστό ως απόδοση στη λήξη γιατί αντιπροσωπεύει την απόδοση που θα πραγματοποιηθεί εάν το ομόλογο κρατηθεί μέχρι τη λήξη του και οι πληρωμές των τοκομεριδίων επανεπενδυθούν με επιτόκιο ίσο με το προεξοφλητικό επιτόκιο. Η απόδοση στη λήξη θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει την απαιτούμενη απόδοση του ομολόγου από τους επενδυτές. Τέλος, η καμπύλη απόδοσης (yield curve) είναι η γραφική παράσταση της σχέσης μεταξύ των διαθέσιμων λήξεων πιστωτικών χρεογράφων κυβερνητικών εκδόσεων και της αντίστοιχης απόδοσης στη λήξη. Ακολουθεί το σχήμα 4.1 το οποίο περιγράφει την σχέση μεταξύ της απόδοσης στη λήξη και της τιμής του ομολόγου.



Εικόνα 4.1 Η σχέση μεταξύ της απόδοσης στη λήξη και της τιμής του ομολόγου

Στο Matlab η συνάρτηση που υπολογίζει την απόδοση στη λήξη είναι η **bndyield** και η γενική της μορφή είναι:

Yield = bndyield (Price, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

Να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η απόδοση στη λήξη ενός ομολόγου για τρεις διαφορετικές θεωρητικές τιμές με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

```
>> Price=[99; 115; 133]; %Ορισμός θεωρητικών τιμών ομολόγου
>> CouponRate=0.05; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle='01-Feb-2016'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity='01-Feb-2017'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> Period=2; %Εξαμηνιαία πληρωμή τοκομεριδίου
%Υπολογισμός της απόδοσης στη λήξη
>> Yield = bndyield (Price, CouponRate, Settle, Maturity, Period)

Yield =
    0.0605
   -0.0900
   -0.2253
```

4.4 Ορισμός και μέτρηση της σταθμισμένης διάρκειας

Η σταθμισμένη διάρκεια (Duration) είναι μια εξαιρετικά σημαντική έννοια όσον αφορά στην ανάλυση των ομολογιών και αποτελεί μια πολύ χρήσιμη μέτρηση για διάφορες στρατηγικές επενδύσεων σε ομολογίες. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Frederick R. Macaulay σε μια δημοσίευσή του στο «National Bureau of Economic Research» (USA) το 1938. Αποτελεί μία μέτρηση της ευαισθησίας της τιμής του ομολόγου στις μεταβολές της απόδοσης στη λήξη. Ειδικότερα, η διάρκεια υπολογίζει το σταθμισμένο (με το ύψος των πληρωμών) μέσο χρονικό διάστημα μεταξύ της αγοράς της ομολογίας και της εξόφλησής της σε προεξοφλημένη βάση (δηλαδή οι παρούσες αξίες των πληρωμών χρησιμοποιούνται ως συντελεστές στάθμισης στον υπολογισμό αυτού του σταθμισμένου μέσου χρονικού διαστήματος). Η μαθηματική έκφραση της διάρκειας είναι η ακόλουθη:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} + t_n \cdot \frac{F}{(1+y)^{t_n}}}{P}$$

όπου:

D = η διάρκεια (duration) της ομολογίας

F = η ονομαστική αξία της ομολογίας

P = η αγοραία αξία (παρούσα αξία) της ομολογίας

y = η απόδοση στη λήξη

t_i = η χρονική στιγμή που πραγματοποιείται η κάθε χρηματική ροή

C_i = το τοκομερίδιο που που πληρώνεται τη χρονική στιγμή ti

Μια παραλλαγή της διάρκειας αποτελεί η λεγόμενη τροποποιημένη διάρκεια η οποία υπολογίζεται ως εξής:

Τροποποιημένη διάρκεια = Διάρκεια του Macaulay/(1+y/m)

όπου:

y = η απόδοση στη λήξη

m = ο αριθμός των τοκομεριδίων που καταβάλλονται μέσα σε ένα έτος

Η τροποποιημένη διάρκεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής για μια δεδομένη μεταβολή της απαιτούμενης απόδοσης.

Στο Matlab η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την διάρκεια του ομολόγου δεδομένης της απόδοσης στη λήξη είναι η **bnddury** και η γενική της μορφή είναι:

[ModDuration, YearDuration, PerDuration] = bnddury (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

όπου:
ModDuration: η τροποποιημένη διάρκεια σε έτη
YearDuration: η διάρκεια Macaulay σε έτη
PerDuration: η περιοδική διάρκεια Macaulay που αναφέρεται σε εξαμηνιαία βάση

Να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η διάρκεια ενός ομολόγου για τρεις διαφορετικές τιμές απόδοσης στη λήξη.

```
>> Yield=[0.04, 0.05, 0.06]; %Ορισμός τιμών απόδοσης στη λήξη
>> CouponRate=0.03; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle='10-Apr-2016'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity='01-May-2026'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> Period=1; %Ετήσια πληρωμή τοκομεριδίου
>> Basis=1; % 30/360
%Υπολογισμός της διάρκειας του ομολόγου δεδομένης των τιμών απόδοσης στη λήξη
>> [ModDuration, YearDuration, PerDuration] = bnddury (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis)

ModDuration =
   8.3590
    8.2318
    8.1020
```

YearDuration =
8.5262
8.4376
8.3451

PerDuration =
17.0523
16.8752
16.6902

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε την διάρκεια του ομολόγου δεδομένης της θεωρητικής τιμής του ομολόγου είναι χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **bnddurp,** η οποία έχει γενική μορφή:

[ModDuration, YearDuration, PerDuration] = bnddurp (Price, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

Για παράδειγμα, να υπολογιστεί η διάρκεια ενός ομολόγου για τρεις διαφορετικές θεωρητικές τιμές του ομολόγου.

```
>> Price=[97; 100; 110]; %Ορισμός θεωρητικών τιμών ομολόγου
>> CouponRate=0.03; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle='10-Apr-2016'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity='10-May-2026'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> Period=1; %Ετήσια πληρωμή τοκομεριδίου
>> Basis=1; % 30/360
%Υπολογισμός της διάρκειας του ομολόγου δεδομένης των θεωρητικών τιμών του ομολόγου
>> [ModDuration, YearDuration, PerDuration] = bnddurp (Price, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis)

ModDuration =
    8.4430
    8.4863
```

8.6185

YearDuration =
8.5835
8.6126
8.7001

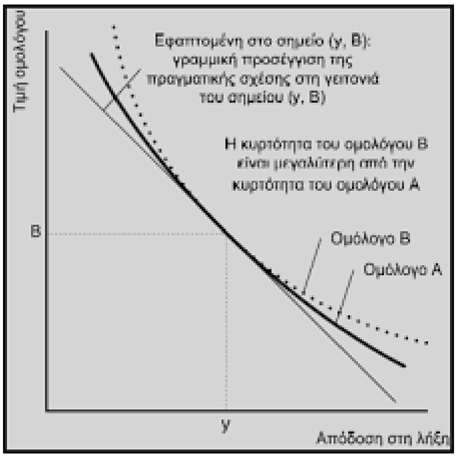
PerDuration =
17.1669
17.2253
17.4001

4.5 Ορισμός και μέτρηση της κυρτότητας

Η σχέση που περιγράψαμε πιο πάνω σχετικά με την τροποποιημένη διάρκεια είναι ακριβής για μικρές μεταβολές των επιτοκίων. Καθώς μεγαλώνει η μεταβολή των επιτοκίων τόσο λιγότερο ακριβής γίνεται η παραπάνω σχέση. Επειδή στην πραγματικότητα η σχέση μεταξύ της τιμής ενός ομολόγου και της απόδοσης στη λήξη δεν είναι γραμμική αλλά κυρτή, θα πρέπει να συνυπολογιστεί και η κυρτότητα (convexity). Η κυρτότητα μετράει την αλλαγή της διάρκειας σε μικρές μετατοπίσεις της καμπύλης απόδοσης. Δηλαδή μετράει δεύτερης τάξης ευαισθησία των τιμών. Τέλος, για να υπολογίσουμε την κυρτότητα, υπολογίζουμε αρχικά τη δεύτερη παράγωγο της τιμής του ομολόγου ως προς την απόδοση στη λήξη και διαιρούμε την ποσότητα αυτή με την τιμή του ομολόγου.

Οι ιδιότητες της κυρτότητας είναι οι ακόλουθες:

- Εάν η απαιτούμενη απόδοση μειώνεται, τότε η κυρτότητα του ομολόγου αυξάνεται. Αντίστροφα, εάν η απαιτούμενη απόδοση αυξάνεται η κυρτότητα του ομολόγου μειώνεται.
- Για δεδομένη απόδοση και λήξη, όσο μικρότερο είναι το τοκομερίδιο, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η κυρτότητα του ομολόγου.
- Για δεδομένη απόδοση και τροποποιημένη διάρκεια, όσο μικρότερο είναι το τοκομερίδιο, τόσο μικρότερη θα είναι η κυρτότητα του ομολόγου.



Εικόνα 4.2 Η κυρτή σχέση μεταξύ τιμής ομολόγου και απόδοσης στη λήξη. Η εφαπτομένη στην κυρτή καμπύλη τιμής-απόδοσης απεικονίζει την τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου

Για να υπολογίσουμε στο Matlab την κυρτότητα του ομολόγου δεδομένης της απόδοσης στη λήξη χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **bndconvy** και η γενική της μορφή είναι:

[YearConvexity, PerConvexity] = bndconvy (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

όπου:
YearConvexity: η κυρτότητα σε ετήσια βάση
PerConvexity: η περιοδική κυρτότητα σε εξαμηνιαία βάση

Να υπολογιστεί για παράδειγμα, η κυρτότητα ενός ομολόγου για τρεις διαφορετικές τιμές της απόδοσης στη λήξη.

```
>> Yield=[0.04; 0.05; 0.06]; %Ορισμός τιμών απόδοσης στη λήξη
>> CouponRate=0.04; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle='10-Apr-2016'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity='10-May-2026'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> Period=2; %Εξαμηνιαία πληρωμή τοκομεριδίου
>> Basis=0; % actual/actual
```

%Υπολογισμός της κυρτότητας ομολόγου δεδομένης των τιμών απόδοσης στη λήξη
>> [YearConvexity, PerConvexity] = bndconvy (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis)

YearConvexity =
  78.6924
  76.7880
  74.8784

PerConvexity =
 314.7694
 307.1520
 299.5135

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε την κυρτότητα του ομολόγου δεδομένης της θεωρητικής τιμής χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **bndconvp** και έχει γενική μορφή:

[YearConvexity, PerConvexity] = bndconvp (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis, EndMonthRule, IssueDate, FirstCouponDate, LastCouponDate, StartDate, Face)

Να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η κυρτότητα ενός ομολόγου για τρεις διαφορετικές θεωρητικές τιμές.
>> Price=[97; 100; 105]; %Ορισμός θεωρητικών τιμών ομολόγου
>> CouponRate=0.02; %Ορισμός τοκομεριδίου
>> Settle='10-Apr-2016'; %Ορισμός ημερομηνίας διακανονισμού
>> Maturity='10-May-2026'; %Ορισμός της διάρκειας ζωής της ομολογίας
>> Period=1; %Ετήσια πληρωμή τοκομεριδίου
>> Basis=1; % 30/360
%Υπολογισμός της κυρτότητας ομολόγου δεδομένης των θεωρητικών τιμών
>> [YearConvexity, PerConvexity] = bndconvp (Yield, CouponRate, Settle, Maturity, Period, Basis)

```
YearConvexity =
    0.0313
    0.0330
    0.0347

PerConvexity =
    0.1250
    0.1318
    0.1389
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις βασικές μεθόδους αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, τις συναρτήσεις υπολογισμού των μετρικών ευαισθησίας και τη γραφική απεικόνισή τους καθώς και στρατηγικές αντιστάθμισης κινδύνου.

5.1 Εισαγωγή

Παράγωγο προϊόν ή παράγωγος τίτλος (Derivative) είναι είναι ένας χρηματοπιστωτικός τίτλος του οποίου η ύπαρξη και η τιμή παράγεται και είναι συνάρτηση της τιμής άλλων υποκείμενων τίτλων(μετοχές, ομόλογα, χρηματιστηριακοί δείκτες, εμπορεύματα κ.λπ.), που διαπραγματεύονται στην αγορά μετρητοίς (spot αγορά). Δηλαδή είναι χρεόγραφα ή τίτλοι αξιών των οποίων η αξία προκύπτει έμμεσα από την αξία των υποκείμενων τίτλων (Underlying Product ή Asset).

Οι κυριότερες μορφές παραγώγων είναι:

- Τα προθεσμιακά συμβόλαια (Forward Contracts)
- Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures)
- Τα δικαιώματα προαίρεσης (Options)
- Οι συμφωνίες ανταλλαγής (Swaps)

Αγορά μετρητοίς ή spot αγορά, ονομάζουμε την αγορά εμπορευμάτων (π.χ, σιτηρά, ζάχαρη, πετρέλαιο) και την αγορά χρηματοοικονομικών τίτλων (π.χ., μετοχές, ομόλογα, έντοκα γραμμάτια του δημοσίου, νομίσματα) όπου η παράδοση του προϊόντος ή του τίτλου είναι άμεση και συνοδεύεται από την πληρωμή του. Η αγορά αυτή ονομάζεται και cash market.

Αντίθετα, προθεσμιακή αγορά (Forward), ονομάζουμε την αγορά εμπορευμάτων και την αγορά χρηματοοικονομικών τίτλων όπου η παράδοση του προϊόντος ή του τίτλου λαμβάνει χώρα στο μέλλον, ενώ έχει προκαθοριστεί ο χρόνος παράδοσης και η τιμή του προϊόντος ή του τίτλου.

Η ανάγκη προαγοράς ή προπώλησης των αγαθών πηγάζει από την αβεβαιότητα που δημιουργούν διάφοροι κύκλοι δραστηριότητας, όπως οι κύκλοι της παραγωγής (production cycles) και οι επιχειρηματικοί κύκλοι (business cycles).

Τα παράγωγα είναι κάτι διαφορετικό από τον υποκείμενο τίτλο ή προϊόν, γιατί εάν για παράδειγμα, κάποιος συμφωνήσει να αγοράσει χρυσό, θα πρέπει να αγοράσει χρυσό. Εάν όμως αγοράσει το δικαίωμα να αγοράσει χρυσό σε μια συγκεκριμένη τιμή, τότε έχει την δυνατότητα είτε να πουλήσει το δικαίωμα, είτε να το αγνοήσει (να το αφήσει να λήξει), είτε να το ασκήσει.

να , έτσι ώστε ζημίες (κέρδη) στον υποκείμενο τίτλο να αντισταθμίζονται με κέρδη (ζημίες) στο παράγωγο.

Αντιστάθμιση είναι η αγορά ή πώληση παραγώγων αξιογράφων, με σκοπό την εξουδετέρωση των κινδύνων από τις αυξομειώσεις των τιμών των αγαθών ή αξιογράφων στις αγορές μετρητοίς. Έτσι αν στην αγορά μετρητοίς έχουμε δημιουργήσει μία θέση αγοράς, τότε στην αγορά παραγώγων δημιουργούμε μία θέση πώλησης και αντιστρόφως. Τέλος, η αντιστάθμιση είναι ο βασικός λόγος ύπαρξης των παραγώγων.

Κλείνοντας, τα παράγωγα χρησιμοποιούνται επίσης μέσω των δυνατοτήτων μόχλευσης που προσφέρουν, για την πραγματοποίηση της κερδοσκοπίας, δηλαδή της στρατηγικής που ακολουθεί ένας επενδυτής λαμβάνοντας θέσεις αγοράς ή πώλησης παραγώγων, ανάλογα με τις προσδοκίες του για τη μελλοντική πορεία των τιμών του υποκείμενου τίτλου, με σκοπό την πραγματοποίηση κέρδους.

5.2 Βασικά υποδείγματα υπολογισμού της «δίκαιης» τιμής ενός δικαιώματος

Για την αποτελεσματική χρησιμοποίηση των δικαιωμάτων προαίρεσης κρίνεται απαραίτητη η γνώση των βασικών υποδειγμάτων υπολογισμού της «δίκαιης» τιμής ενός δικαιώματος. Η «δίκαιη» τιμή, αναφέρεται στην τιμή που θα πληρώνονταν για το δικαίωμα σε μια αγορά που λειτουργεί ομαλά. Στην πραγματικότητα η τιμή ενός δικαιώματος διαμορφώνεται από τις δυνάμεις της αγοράς ωστόσο, κρίνεται χρήσιμη η σύγκριση αυτής της τιμής με τη θεωρητική τιμή του δικαιώματος.

5.2.1 Το υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων των Black και Scholes

Οι Black και Scholes το 1972 δημιουργησαν το ομώνυμο υπόδειγμα, προσδιορίζοντας τη συμπεριφορά του υποκείμενου τίτλου και λαμβάνοντας υπόψη το χρόνο που απομένει για τη λήξη του δικαιώματος, καθώς και το μέγεθος της μεταβλητότητας της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Το υπόδειγμα αυτό αναφέρεται σε δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου και βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Οι τιμές των μετοχών προσαρμόζονται με τρόπο ώστε να εμποδίσουν την εξισορροπητική κερδοσκοπία.
2. Οι τιμές των μετοχών είναι στοχαστικές και μεταβάλλονται συνεχώς.
3. Οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν μια λογαριθμική κανονική πιθανοκατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ ανά μονάδα χρόνου.
4. Η υποκείμενη μετοχή δεν καταβάλλει μερίσματα.
5. Τα επιτόκια δανεισμού παραμένουν σταθερά μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.
6. Η τυπική απόκλιση σ παραμένει σταθερή μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.
7. Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών κατά την αγορά και την πώληση τόσο των μετοχών όσο και των δικαιωμάτων.

Η τιμή ενός *δικαιώματος αγοράς* (call option) κατά το υπόδειγμα Black και Scholes δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$c = S\,N(d_1) - X\,e^{-rT}\,N(d_2)$$

Ενώ η τιμή ενός *δικαιώματος πώλησης* (put option) δίνεται από τον τύπο:

$$p = X\,e^{-rT}\,N(-d_2) - S\,N(-d_1)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

και S είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής, X είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος, r είναι το επιτόκιο δίχως κίνδυνο, Τα είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος σε έτη, σ είναι η τυπική απόκλιση της μετοχής, και η συνάρτηση N() δίνεται είτε από πίνακες είτε υπολογίζεται με πολυωνυμικές προσεγγίσεις όπως η παρακάτω:

$$N(x)=\begin{cases}1 - N'(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3) & όταν\ x \geq 0\\ 1 - N(-x) & όταν\ x < 0\end{cases}$$

όπου

$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2}$

και

$\mathrm{k} = \frac{1}{1+\gamma\ x}$

και

γ = 0,33267

a_1 = 0,4361836

a_2 = - 0,1201676

a_3 = 0,9372980

π = 3,14159265

Για να υπολογίσουμε στο Matlab την τιμή των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με το υπόδειγμα Black-Scholes, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsprice** και η γενική της μορφή είναι:

[Call, Put] = blsprice (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Ακολουθεί ο πίνακας 5.1 με τα ορίσματα της συνάρτησης blsprice.

Πίνακας 5.1 Ορίσματα της συνάρτησης blsprice

Όρισμα	**Περιγραφή**
Call	Τιμή δικαιώματος αγοράς
Put	Τιμή δικαιώματος πώλησης
Price	Τρέχουσα τιμή υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής
Strike	Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος
Rate	Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο σε ετήσια βάση. Εκφράζεται ως θετικός δεκαδικός αριθμός.
Time	Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος εκφρασμένος σε έτη

Volatility	Η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης χρηματοοικονιμικής μεταβλητής σε ετήσια βάση. Εκφράζεται ως θετικός δεκαδικός αριθμός
Yield (προαιρετικό)	Απόδοση της υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής σε ετήσια βάση κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Η προεπιλογή είναι 0. Π.χ. όταν η υποκείμενη χρηματοοικονομική μεταβλητή είναι μετοχή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μερισματική απόδοση.

Στα ορίσματα εισόδου μπορούμε να έχουμε ακόμη και διανύσματα ή μήτρες επιτρέποντάς μας να υπολογίσουμε τις τιμές πολλών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης ταυτόχρονα.

Έστω, για παράδειγμα, ότι η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι 65 ευρώ, η μεταβλητότητά της είναι 20% ετησίως και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 9%. Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου της μετοχής με τιμή άσκησης 57 ευρώ και λήξη σε 6 μήνες.

```
>> [Call, Put] = blsprice(65, 57, 0.09, 6/12, 0.20);
Call =
10.9360

Put =
  0.4278
```

Σε περίπτωση που η υποκείμενη χρηματοοικονομική μεταβλητή είναι κάποιο συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης ΣΜΕ (future) χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **blkprice** αντί της blsprice για τον υπολογισμό της τιμής των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με το υπόδειγμα Black-Scholes και η γενική της μορφή είναι:

```
[Call, Put] = blkprice (Price, Strike, Rate, Time, Volatility)
```

Έστω, για παράδειγμα, ότι η τρέχουσα τιμή ενός ΣΜΕ είναι 46 ευρώ, η μεταβλητότητά του είναι 23% ετησίως και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 8%

ετησίως. Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου του ΣΜΕ με τιμή άσκησης 50 ευρώ και λήξη σε 4 μήνες.

```
>> [Call, Put] = blkprice(46, 50, 0.08, 4/12, 0.23);
Call =
 0.9980

Put =
 4.8928
```

5.2.2 Το δυωνυμικό υπόδειγμα

Μετά το υπόδειγμα Black-Scholes, το δυωνυμικό μοντέλο μας δίνει μια σχετικά απλοϊκή λύση στο πρόβλημα της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης . και έχει γενική μορφή:

[AssetPrice, OptionValue] = binprice (Price, Strike, Rate, Time, Increment, Volatility, Flag, DividendRate, Dividend, ExDiv)

Ακολουθεί ο πίνακας 5.2 με τα ορίσματα της συνάρτησης binprice.

Πίνακας 5.2 Ορίσματα της συνάρτησης binprice

Όρισμα	Περιγραφή
AssetPrice	Η τιμή της υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής σε κάθε κόμβο του δυωνυμικού δέντρου
OptionValue	Η τιμή του δικαιώματος σε κάθε κόμβο του δυωνυμικού δέντρου
Price	Τρέχουσα τιμή υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής
Strike	Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος
Rate	Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Εκφράζεται ως δεκαδικός αριθμός.
Time	Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος εκφρασμένος σε έτη

Increment	Χρονική προσαύξηση. Η προσαύξηση ορίζεται έτσι ώστε η απόσταση κάθε διαστήματος να είναι σύμφωνη με τη διάρκεια του δικαιώματος
Volatility	Η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής σε ετήσια βάση. Εκφράζεται ως θετικός δεκαδικός αριθμός.
Flag	Συντελεστής που προσδιορίζει εάν το δικαίωμα είναι δικαίωμα αγοράς (Flag=1) ή δικαίωμα πώλησης (Flag=0)
DividendRate (προαιρετικό)	Η μερισματική απόδοση εκφρασμένη σε κλάσμα. Η προεπιλογή είναι 0. Εάν οριστεί τότε θα πρέπει να οριστούν ίσα με το 0 τα δύο επόμενα ορίσματα (Dividend και ExDiv)
Dividend (προαιρετικό)	Το μέρισμα την ημέρα αποκοπής. Μπορεί να είναι διάνυσμα γραμμής. Για κάθε μέρισμα θα πρέπει να ορίζεται και η αντίστοιχη ημέρα αποκοπής. Η προεπιλογή είναι 0. Εάν οριστεί το μέρισμα/μερίσματα και η ημερομηνία/νίες αποκοπής τότε η μερισματική απόδοση θα πρέπει να οριστεί ίση με το 0.
ExDiv (προαιρετικό)	Ημερομηνία αποκοπής. Μπορεί να είναι διάνυσμα γραμμής. Η προεπιλογή είναι 0.

Έστω, για παράδειγμα, ότι η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι 47 ευρώ, η μεταβλητότητά της είναι 33% ετησίως και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 5% ετησίως. Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή άσκησης 50 ευρώ, λήξη σε 6 μήνες και μία πληρωμή μερίσματος 1.7 ευρώ σε 3 μήνες.

```
>> [AssetPrice, OptionValue]=binprice(47, 50, 0.05, 6/12, 1/12, 0.33, 1, 0, 1.7, 3)

AssetPrice =
   47.0000    51.5368    56.5263    62.0138    66.3421   72.9728   80.2663
```

0	42.8889	47.0140	51.5509	54.8334	60.3138	66.3421
0	0	39.1520	42.9030	45.3211	49.8509	54.8334
0	0	0	35.7553	37.4590	41.2030	45.3211
0	0	0	0	30.9608	34.0553	37.4590
0	0	0	0	0	28.1475	30.9608
0	0	0	0	0	0	25.5899

OptionValue =

3.0789	4.9761	7.8471	12.0138	16.7570	23.1807	30.2663
0	1.2218	2.1685	3.7774	6.4172	10.5217	16.3421
0	0	0.2926	0.5898	1.1891	2.3974	4.8334
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

5.3 Υπολογισμός της ευαισθησίας των τιμών των δικαιωμάτων ως προς διάφορους παράγοντες

Τα ελληνικά γράμματα Δέλτα, Γάμμα, Θήτα, βέγκα(κάπα ή λάμδα) και Ρο χρησιμοποιούνται για την εύρεση της ευαισθησίας που έχουν οι τιμές των δικαιωμάτων ως προς διάφορους παράγοντες όπως η τιμή του υποκείμενου προϊόντος, η μεταβλητότητα, ο υπολοιπόμενος χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

5.3.1 Ευαισθησία των τιμών των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, σε σχέση με τις πέντε μεταβλητές που καθορίζουν τις τιμές των δικαιωμάτων

Για να υπολογίσουμε στο Matlab τη μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος για κάθε μία μονάδα μεταβολής της τιμής του υποκείμενου προϊόντος (δέλτα) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsdelta** και η γενική της μορφή είναι:

[CallDelta, PutDelta] = blsdelta (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Έστω, για παράδειγμα, ότι και η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 37 ευρώ, η μεταβλητότητά της είναι 48% ετησίως και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 6%

ετησίως. Θέλουμε να υπολογίσουμε το δέλτα των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης 40 ευρώ και λήξη σε 5 μήνες. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> [CallDelta, PutDelta] = blsdelta(37, 40, 0.06, 5/12, 0.48)
CallDelta =
  0.4936

PutDelta =
  -0.5064
```

Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή στην τιμή του δέλτα του δικαιώματος για κάθε μεταβολή μίας μονάδας στην τιμή του δικαιώματος (γάμμα) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsgamma** και έχει γενική μορφή:

Gamma = blsgamma (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, υπολογίζουμε το γάμμα. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> Gamma = blsgamma(37, 40, 0.06, 5/12, 0.48)
Gamma =
 0.0348
```

Για να υπολογίσουμε στο Matlab τη μεταβολή στην αξία ενός δικαιώματος για κάθε μονάδα ποσοστιαίας αύξησης στη μεταβλητότητα του υποκείμενου προϊόντος (βέγκα) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsvega** και έχει γενική μορφή:

Vega = blsvega (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, υπολογίζουμε το βέγκα. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> Vega = blsvega(37, 40, 0.06, 5/12, 0.48)
Vega =
 9.5269
```

Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της τιμής ενός δικαιώματος για την αντίστοιχη μείωση μίας ημέρας από τον εναπομείνοντα χρόνο για τη λήξη του δικαιώματος (θήτα) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blstheta** και έχει γενική μορφή:

[CallTheta, PutTheta] = blstheta (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, υπολογίζουμε το θήτα. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> [CallTheta, PutTheta] = blstheta(37, 40, 0.06, 5/12, 0.48)
CallTheta =
  -6.3589

PutTheta =
 -4.0181
```

Τέλος, για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της αξίας μίας θέσης σε δικαιώματα ως προς την μεταβολή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο κατά μία ποσοστιαία μονάδα (ρο) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsrho** και έχει γενική μορφή:

[CallRho, PutRho] = blsrho (Price, Strike, Rate, Time, Volatility, Yield)

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, υπολογίζουμε το ρο. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> [CallRho, PutRho] = blsrho(37, 40, 0.06, 5/12, 0.48)
CallRho =
  6.0513

PutRho =
 -10.2039
```

5.3.2 Υπονοούμενη ή τεκμαρτή μεταβλητότητα

Η υπονοούμενη ή τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι η τυπική απόκλιση που υπονοείται από την τιμή με την οποία διαπραγματεύεται στην αγορά το δικαίωμα. Στην ουσία μας δίνει την εκτίμηση της αγοράς για την τυπική απόκλιση του υποκείμενου προϊόντος. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος από την τιμή ενός άλλου δικαιώματος, πάνω φυσικά στο ίδιο υποκείμενο προϊόν. Συχνά, υπολογίζονται αρκετές τεκμαρτές μεταβλητότητες διαφορετικών δικαιωμάτων πάνω στο ίδιο υποκείμενο προϊόν και μετά υπολογίζεται η σύνθετη τεκμαρτή μεταβλητότητα, ως ένας σταθμισμένος μέσος των επιμέρους τεκμαρτών μεταβλητοτήτων. Τέλος, η στάθμιση που δίνεται σε κάθε επιμέρους τεκμαρτή μεταβλητότητα αντικατοπτρίζει την ευαισθησία της τιμής του δικαιώματος στη μεταβλητότητα (βέγκα).

Για να υπολογίσουμε στο Matlab την τεκμαρτή μεταβλητότητα χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **blsimpv** και έχει την παρακάτω γενική μορφή:

Volatility = blsimpv (Price, Strike, Rate, Time, Value, Limit, Yield, Tolerance, Class)
Ακολουθεί ο πίνακας 5.3 με τα ορίσματα της συνάρτησης blsimpv.

Πίνακας 5.3 Ορίσματα της συνάρτησης blsimpv

Όρισμα	**Περιγραφή**
Volatility	Η τεκμαρτή μεταβλητότητα
Price	Τρέχουσα τιμή υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής
Strike	Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος
Rate	Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Εκφράζεται ως δεκαδικός αριθμός
Time	Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος εκφρασμένος σε έτη
Value	Η τιμή δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου από το οποίο θα υπολογιστεί η τεκμαρτή μεταβλητότητα της υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής
Limit (προαιρετικό)	Θετικός αριθμός που αναφέρεται στο άνω όριο του διαστήματος της αναζητούμενης τεκμαρτής

	μεταβλητότητας. Η προεπιλογή είναι 10 ή 1000% ανά έτος
Yield (προαιρετικό)	Απόδοση της υποκείμενης χρηματοοικονομικής μεταβλητής σε ετήσια βάση κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Η προεπιλογή είναι 0. Π.χ. όταν η υποκείμενη χρηματοοικονομική μεταβλητή είναι μετοχή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μερισματική απόδοση
Tolerance (προαιρετικό)	Η μέγιστη τελική τεκμαρτή μεταβλητότητα. Η προεπιλογή είναι 1e-6
Class (προαιρετικό)	Η κλάση του δικαιώματος (αγοράς ή πώλησης) η οποία προσδιορίζει το είδος του δικαιώματος από το οποίο προκύπτει η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Μπορεί να οριστεί είτε ως λογικός τελεστής (για δικαιώματα αγοράς Class=true, για δικαιώματα πώλησης Class=false), είτε ως κελί (για δικαιώματα αγοράς Class={'call'}, για δικαιώματα πώλησης Class={'put'}). Η προεπιλογή είναι δικαίωμα αγοράς

Έστω, για παράδειγμα, ότι ένα δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου διαπραγματεύεται στα 5 ευρώ με τιμή εξάσκησης 75 ευρώ και το οποίο λήγει σε 4 μήνες. Η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι 79 ευρώ, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 8% ετησίως και θεωρούμε ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα δεν είναι πάνω από 50% ετησίως. Τέλος, η υποκείμενη μετοχή δεν πληρώνει μέρισμα. Στη γραμμή εντολών του Matlab πληκτρολογούμε:

```
>> Volatility = blsimpv (79, 75, 0.08, 4/12, 5, 0.5, 0, [], {'Put'})
Volatility =
 0.4364
```

5.3.3 Γραφική απεικόνιση των δεικτών ευαισθησίας

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συναρτήσεις για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης και των υπολογισμό των δεικτών ευαισθησίας, θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να απεικονίσουμε γραφικά τους δείκτες ευαισθησίας ενός δικαιώματος ή ενός χαρτοφυλακίου με δικαιώματα.

5.3.3.1 Γραφική απεικόνιση των δεικτών ευαισθησίας δικαιώματος

Για να απεικονίσουμε γραφικά τους δείκτες ευαισθησίας ενός δικαιώματος θα δημιουργήσουμε ένα αρχείο script με τον παρακάτω κώδικα:

```
disp('Το πρόγραμμα αυτό δημιουργεί ένα τριδιάστατο γράφημα στο οποίο')
disp('περιγράφεται πώς μεταβάλλεται το γάμμα σε σχέση με την τιμή ενός')
disp('δικαιώματος προαίρεσης χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα τιμολόγησης')
disp('Black-Scholes.')
disp('Επίσης, το χρώμα της σχηματιζόμενης επιφάνειας αντιστοιχεί στις')
disp('αντίστοιχες τιμές του δέλτα')
disp('')
prices=input('Πληκτρολογήστε το εύρος των τιμών των δικαιωμάτων:  ');
strike=input('Πληκτρολογήστε την τιμή εξάσκησης:  ');
rate=input('Πληκτρολογήστε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο:  ');
volatility=input('Πληκτρολογήστε τη μεταβλητότητα:  ');
disp('Πατήστε το πλήκτρο Enter για να εμφανιστεί το διάγραμμα')
price_width=prices;
m=length(price_width);
n=1:12; %Ορισμός ενός χρόνου διαιρεμένου σε μήνες
year_fraction=n(ones(m,1),:)'/12; %Έκφραση του χρόνου ως μέρος του έτους
time_matrix=ones(length(n),1); %Δημιουργία διανύσματος για το εύρος των τιμών
newprice_width=price_width(time_matrix,:); %Για κάθε χρονική περίοδο
n_options=ones(size(year_fraction)); %Δημιουργία πίνακα με όλα τα στοιχεία ίσα
με το 1
%Υπολογισμός του γάμμα
Gamma=blsgamma(newprice_width, strike*n_options,
rate*n_options,year_fraction, volatility*n_options);
%Υπολογισμός του δέλτα
call_delta=blsdelta(newprice_width, strike*n_options,
rate*n_options,year_fraction, volatility*n_options);
mesh(price_width, n, Gamma, call_delta) %Δημιουργία διαγράμματος
xlabel('Τιμή μετοχής', 'fontsize',12, 'fontweight','b'); %Τίτλος στον άξονα x
ylabel('Χρονική περίοδος (σε μήνες)', 'fontsize',12,'fontweight','b'); %Τίτλος στον
άξονα y
```

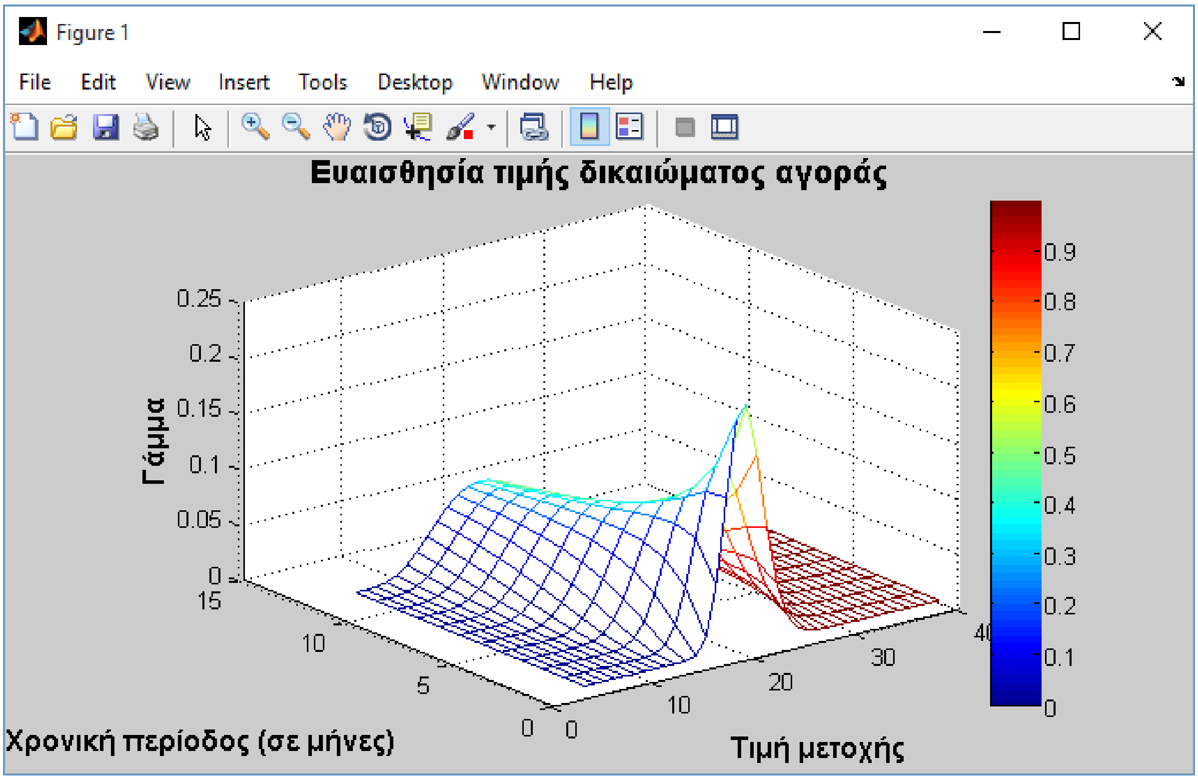
zlabel('Γάμμα','fontsize',12,'fontweight','b'); %Τίτλος στον άξονα z

title('Ευαισθησία τιμής δικαιώματος αγοράς','fontsize',14,'fontweight','b'); %Τίτλος γραφήματος

colormap('jet'); %Προσδιορισμός χρώματος σημείων

colorbar; % Εμφάνιση χρωματικής διαβάθμισης σε μορφή μπάρας

Αφού έχουμε δημιουργήσει το script option_sen με τον παραπάνω κώδικα, πληκτρολογούμε το όνομά του στη γραμμή εντολών του Matlab. Θα μας ζητήσει να δηλώσουμε τα χαρακτηριστικά του δικαιώματος αγοράς. Έστω ότι το εύρος τιμών είναι 5:30, η τιμή εξάσκησης είναι 21, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 0.06 και η μεταβλητότητα είναι 0.30, θα δημιουργηθεί το παρακάτω διάγραμμα της Εικόνας 5.1.



Εικόνα 5.1 Διάγραμμα ευαισθησίας της τιμής δικαιώματος αγοράς

5.3.3.2 Γραφική απεικόνιση δεικτών ευαισθησίας χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων

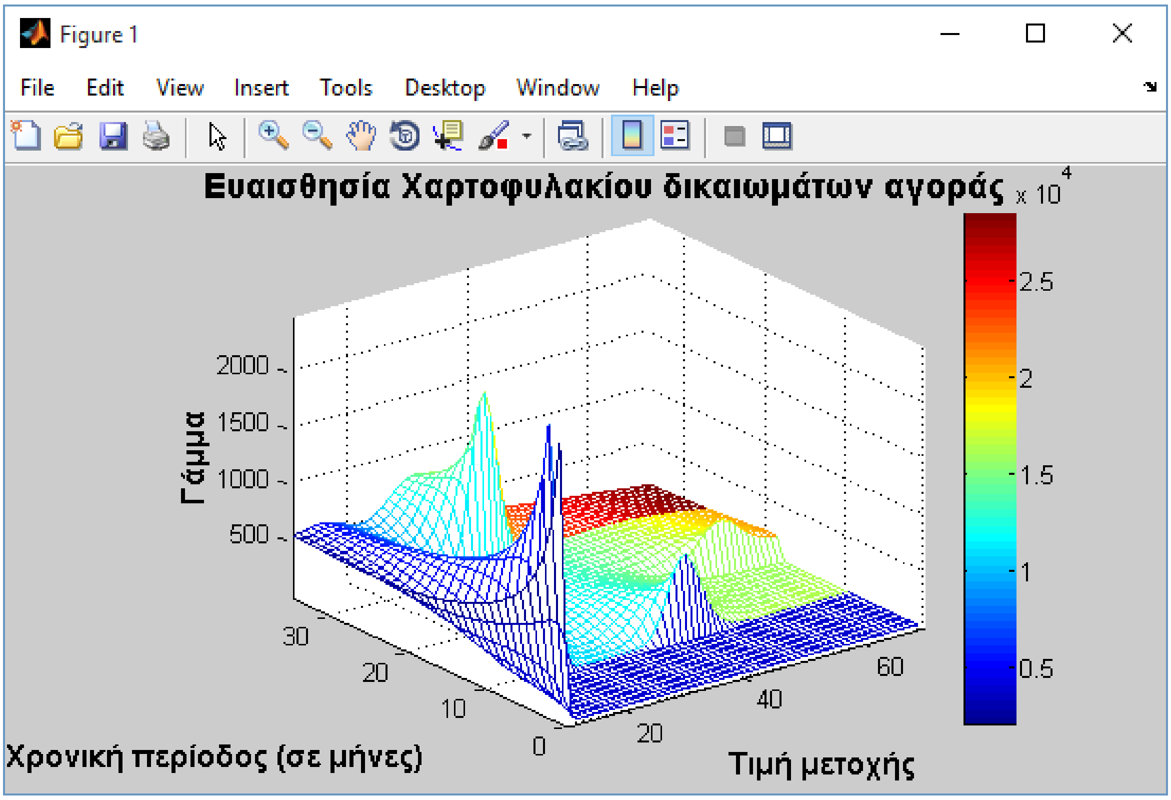
Για να απεικονίσουμε γραφικά τους δείκτες ευαισθησίας ενός χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων θα δημιουργήσουμε ένα αρχείο script με όνομα optionport_sen, γράφοντας τον παρακάτω κώδικα:

```
disp('Το πρόγραμμα αυτό δημιουργεί ένα τριδιάστατο γράφημα στο οποίο')
disp('περιγράφεται πώς μεταβάλλεται το γάμμα σε σχέση με την τιμή και')
disp('τον χρόνο για ένα χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων με το υπόδειγμα')
disp('τιμολόγησης Black-Scholes.')
disp('Επίσης, το χρώμα της σχηματιζόμενης επιφάνειας αντιστοιχεί στις')
disp('αντίστοιχες τιμές του δέλτα')
disp('')
prices=input('Πληκτρολογήστε το εύρος τιμών για κάθε δικαίωμα: ');
strike=input('Πληκτρολογήστε τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης για κάθε δικαίωμα
σε μορφή []: ');
maturity=input('Πληκτρολογήστε τις αντίστοιχες ημερομηνίες λήξης (σε ημέρες) για
κάθε δικαίωμα σε μορφή []: ');
options=input('Πληκτρολογήστε τον αριθμό των δικαιωμάτων για κάθε υποκείμενο
προϊόν σε μορφή 1000*[]: ');
rate=input('Πληκτρολογήστε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο: ');
volatility=input('Πληκτρολογήστε τν μεταβλητότητα: ');
disp('Πατήστε το πλήκτρο Enter για να εμφανιστεί το διάγραμμα')
price_width=prices;
m=length(price_width);
t_rate=rate*ones(length(strike),1); %Ορισμός όλων των επιτοκίων χωρίς κίνδυνο
ίσων με το rate
t_volatility=volatility*ones(length(strike),1); %Ορισμός όλων των επιτοκίων χωρίς
κίνδυνο ίσων με το volatility
%Δημιουργία χώρου για τους πίνακες των γάμμα και δέλτα
gamma=zeros(max(maturity),m);
call_delta=zeros(max(maturity),m);
%Ο άξονας των z αντιστοιχεί στο άθροισμα των γάμμα κάθε δικαιώματος στο
%χαρτοφυλάκιο σταθμισμένο με την ποσότητα κάθε δικαιώματος
```

```
%Για κάθε υποκείμενο προϊόν δημιουργούμε έναν πίνακα διαστάσεων
%(maturity*m) των τιμών κάθε περιόδου
for i=1:length(strike)
    m_prices=ones(maturity(i),m);
    newprice_width=price_width(ones(maturity(i),1),:);
    %Δημιουργία διανύσματος χρονικών περιόδων διαστάσεων 1*maturity και
    %ενός πίνακα των χρονικών περιόδων με μια στήλη για κάθε τιμή
    mat_time=(1:maturity(i))';
    new_maturity=mat_time(:,ones(m,1));
    %Υπολογισμός του γάμμα
    gamma(max(maturity)-maturity(i)+1:max(maturity),:)=gamma(max(maturity)-
maturity(i)+1:max(maturity),:)+options(i)*blsgamma(newprice_width,
strike(i)*m_prices, t_rate(i)*m_prices, new_maturity/max(maturity),
t_volatility(i)*m_prices);
%Υπολογισμός του δέλτα
    call_delta(max(maturity)-
maturity(i)+1:max(maturity),:)=call_delta(max(maturity)-
maturity(i)+1:max(maturity),:)+options(i)*blsdelta(newprice_width,
strike(i)*m_prices, t_rate(i)*m_prices, new_maturity/max(maturity),
t_volatility(i)*m_prices);
end
%Δημιουργία διαγράμματος
mesh(price_width, 1:max(maturity), gamma, call_delta)
axis([min(prices) max(prices) 0 max(maturity) -inf inf]); %Καθορισμός κλίμακας
κάθε άξονα
xlabel('Τιμή μετοχής', 'fontsize',12,'fontweight','b'); %Τίτλος στον άξονα x
ylabel('Χρονική περίοδος (σε μήνες)', 'fontsize',12,'fontweight','b'); % Τίτλος στον
άξονα y
zlabel('Γάμμα', 'fontsize',12,'fontweight','b'); %Τίτλος στον άξονα z
title('Ευαισθησία Χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων   %Τίτλος γραφήματος
αγοράς','fontsize',14,'fontweight','b');
colormap('jet'); %Προσδιορισμός χρώματος σημείων
colorbar; %Εμφάνιση χρωματικής διαβάθμισης σε μορφή μπάρας
```

Αφού έχουμε δημιουργήσει το script optionport_sen με τον παραπάνω κώδικα, πληκτρολογούμε το όνομά του στη γραμμή εντολών του Matlab. Έστω ότι το εύρος τιμών για κάθε δικαίωμα είναι: 10:70, οι τιμές εξάσκησης για κάθε δικαίωμα είναι: [10, 20, 43, 61, 72, 33], οι ημερομηνίες λήξης (σε ημέρες) για κάθε δικαίωμα: [35, 26, 26, 17, 17, 8], ο αριθμός των δικαιωμάτων για κάθε υποκείμενο προϊόν: 1000*[4, 7.1, 5, 4.3, 2, 8], το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο: 0.05 και η μεταβλητότητα είναι: 0.38, θα δημιουργηθεί το παρακάτω διάγραμμα της Εικόνας 5.2.

Το πρόγραμμα αυτό δημιουργεί ένα τριδιάστατο γράφημα στο οποίο περιγράφεται πώς μεταβάλλεται το γάμμα σε σχέση με την τιμή και το χρόνο για ένα χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων με το υπόδειγμα τιμολόγησης Black-Scholes. Το χρώμα της σχηματιζόμενης επιφάνειας αντιστοιχεί στις αντίστοιχες τιμές του δέλτα.



Εικόνα 5.2 Διάγραμμα ευαισθησίας χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων αγοράς

5.4 Στρατηγικές αντιστάθμισης με τη βοήθεια του Matlab

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε την μεθοδολογία με την οποία ένας επενδυτής ή διαχειριστής προσπαθεί να καταστήσει ένα χαρτοφυλάκιο μετοχικών δικαιωμάτων ουσιαστικά ανεπηρέαστο από μικρές και μεγάλες μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου προϊόντος και από μικρές μεταβολές της μεταβλητότητας του υποκείμενου προϊόντος. Για να το πετύχει αυτό αρκεί να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων προαίρεσης με μηδενικά/ουδέτερα δέλτα, θήτα και βέγκα ταυτόχρονα.

Έστω ότι ένας επενδυτής διαθέτει 40.000 ευρώ και επιθυμεί να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο με 6 μετοχικά δικαιώματα των οποίων τα χαρακτηριστικά εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.4 Χαρακτηριστικά δικαιωμάτων προαίρεσης

Τρέχουσα τιμή υποκείμενης μετοχής	**Τιμή εξάσκησης**	**Χρόνος μέχρι τη λήξη (σε έτη)**	**Μεταβλητότητα**	**Είδος δικαιώματος**
22.25	21.00	3/12	0.23	Αγοράς
54.00	50.00	6/12	0.39	Πώλησης
34.50	38.00	6/12	0.32	Αγοράς
109.80	108.00	5/12	0.18	Πώλησης
65.36	69.00	9/12	0.41	Αγοράς
13.48	16.00	4/12	0.29	Πώλησης

Επιπλέον, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 6% και το θεωρούμε σταθερό για όλες τις διάρκειες των εξεταζόμενων δικαιωμάτων.

Στη γραμμή εντολών του Matlab δημιουργούμε έναν πίνακα με τις τέσσερις πρώτες στήλες του παραπάνω πίνακα. Οι στήλες αντιστοιχούν στα υποχρεωτικά ορίσματα των συναρτήσεων τιμολόγησης δικαιωμάτων με το υπόδειγμα Black-Scholes και των συναρτήσεων υπολογισμού των δεικτών ευαισθησίας.

```
>>options_data=[22.25  21.00  3/12  0.23; 54.00  50.00  6/12  0.39; 34.50  38.00  6/12  0.32; 109.80  108.00  5/12  0.18; 65.36 69.00  9/12  0.41; 13.48  16.00  4/12  0.29];
%Εισαγωγή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο
>> Rate=0.06;
```

% Δημιουργία τεσσάρων διανυσμάτων στήλης που αντιστοιχούν στα δεδομένα κάθε στήλης του πίνακα **options_data**, με ονόματα τα ορίσματα των συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε

>> Price=options_data (:, 1);

>> Strike=options_data (:, 2);

>> Time=options_data (:, 3);

>> Volatility=options_data (:, 4);

%Υπολογισμός των τιμών των δικαιωμάτων και των δεικτών ευαισθησίας

>> [Call, Put]= blsprice(Price, Strike, Rate, Time, Volatility);

>> [CallDelta, PutDelta]= blsdelta(Price, Strike, Rate, Time, Volatility);

>> Gamma= blsgamma(Price, Strike, Rate, Time, Volatility)';

>> Vega= blsvega(Price, Strike, Rate, Time, Volatility)';

Επειδή η θεωρητική τιμή και το δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς διαφέρει από τις αντίστοιχες τιμές ενός δικαιώματος πώλησης, για να μην δημιουργηθεί σύγχιση θα πρέπει να ξεχωρίσουμε αυτές τις τιμές, γι'αυτό πληκτρολογούμε τις παρακάτω εντολές:

>> new_prices= [Call(1) Put(2) Call(3) Put(4) Call(5) Put(6)];

>> new_delta= [CallDelta(1) PutDelta(2) CallDelta(3) PutDelta(4) CallDelta(5) PutDelta(6)];

Προκειμένου το χαρτοφυλάκιο να έχει ουδέτερα δέλτα, θήτα και βέγκα ταυτόχρονα θα πρέπει να λύσουμε το σχετικό γραμμικό σύστημα εξισώσεων, x=A\b. Η τιμή του κάθε δείκτη ευαισθησίας του χαρτοφυλακίου ισούται με το σταθμισμένο μέσο του αντίστοιχου δείκτη ευαισθησίας κάθε δικαιώματος που συνθέτει το χαρτοφυλάκιο.

>> A= [new_delta; Gamma; Vega; new_prices];

%Θέλουμε οι δείκτες ευαισθησίας να είναι όλοι μηδέν ενώ η αξία του χαρτοφυλακίου να είναι 40.000 ευρώ

>> b= [0; 0; 0; 40000];

%Ο αριθμός των συμβολαίων από κάθε δικαίωμα

>> n_options=A\b;

%Υπολογισμός των τιμών των δικαιωμάτων, του δέλτα, του γάμμα και θήτα του συνολικού χαρτοφυλακίου ως το σταθμισμένο μέσο των αντίστοιχων τιμών των δικαιωμάτων που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο

```
>> port_prices=new_prices*n_options;
>> port_delta=new_delta*n_options;
>> port_gamma=Gamma*n_options;
>> port_vega=Vega*n_options;
```

Ακολουθεί ο πίνακας 5.5 όπου εμφανίζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών.

Πίνακας 5.5 Χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων προαίρεσης με μηδενικά/ουδέτερα δέλτα, γάμμα και βέγκα ταυτόχρονα

Θεωρητική τιμή	Δέλτα	Γάμμα	Βέγκα	Αριθμός συμβολαίων	Δικαίωμα
1.9564	0.7551	0.1228	3.4963	-3106.96	1
3.2974	-0.2995	0.0233	13.2668	0	2
2.1640	0.4281	0.0503	9.5736	0	3
3.0645	-0.3389	0.0287	25.9367	-4974.17	4
8.9537	0.5603	0.0170	22.3234	5932.70	5
2.4453	-0.7940	0.1262	2.2176	3354.31	6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΗΜΑΤΟΡΟΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε την χρονική αξία του χρήματος με την πραγματοποίηση υπολογισμών της παρούσας και μελλοντικής αξίας χρηματοροών, των αποσβέσεων, του εσωτερικού ποσοστού απόδοσης και του τοκοχρεολυσίου.

6.1 Εισαγωγή

Στην χρηματοοικονομική, η έννοια της χρονικής αξίας του χρήματος είναι από τις πιο σημαντικές. Είναι γεγονός ότι η επένδυση συνεπάγεται μια ταμειακή εκροή η οποία είθισται να πραγματοποιείται σήμερα, με την προσδοκία αποκόμισης μελλοντικών χρηματικών ωφελειών. Επιπλέον, ένα ευρώ σήμερα έχει μεγαλύτερη αξία από ένα ευρώ που πρόκειται να αποκτηθεί στο μέλλον, αφού ένα ευρώ σήμερα μπορεί να επενδυθεί και να αποφέρει μελλοντικό επιπρόσθετο εισόδημα. Τέλος, ένας επενδυτής προκειμένου να επιλέξει μεταξύ ενός χρηματικού ποσού που μπορεί να έχει σήμερα και ενός χρηματικού ποσού διαθέσιμου σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή, θα πρέπει να υπολογίσει την παρούσα ή μελλοντική αξία ανάλογα με το χρονικό σημείο της σύγκρισης.

6.2 Υπολογισμός της παρούσας και μελλοντικής αξίας χρηματοροών

Για τον υπολογισμό της παρούσας ή μελλοντικής αξίας χρηματοροών σε τακτά ή μη χρονικά διαστήματα και σε ισόποσες ή μη πληρωμές, το Matlab μας παρέχει τις κατάλληλες συναρτήσεις. Ακολουθεί ο πίνακας 6.1 όπου περιγράφουμε τις συναρτήσεις αυτές.

Πίνακας 6.1 Συναρτήσεις υπολογισμού παρούσας και μελλοντικής αξίας χρηματοροών

Συνάρτηση	Περιγραφή
fvfix	Μελλοντική αξίας ταμειακής εισροής/εκροής ομοιόμορφης σειράς χρηματικών ποσών
pvfix	Παρούσα αξίας ταμειακής εισροής/εκροής ομοιόμορφης σειράς χρηματικών ποσών

fvvar	Μελλοντική αξία μη ομοιόμορφης ταμειακής εισροής/εκροής
pvvar	Παρούσα αξία μη ομοιόμορφης ταμειακής εισροής/εκροής

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **fvfix** είναι:

fvfix (Rate, NumPeriods, Payment, PresentVal, Due)

Πίνακας 6.2 Ορίσματα της συνάρτησης fvfix

Όρισμα	**Περιγραφή**
Rate	Το καθορισμένο ποσοστό απόδοσης το οποίο θεωρείται σταθερό για την υπό εξέταση περίοδο
NumPeriods	Ο αριθμός των περιόδων
Payment	Η πληρωμή κάθε περιόδου
PresentVal (προαιρετικό)	Η αρχική τιμή (η προεπιλογή είναι 0)
Due (προαιρετικό)	Όταν το ποσό προκαταβάλλεται=1 και όταν το ποσό καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου=0(προεπιλογή)

Έστω, για παράδειγμα, ότι οι γονείς της Κατερίνας με την γέννησή της, της άνοιξαν στην τράπεζα έναν λογαριασμό κατάθεσης και κατέθεσαν 2000 ευρώ, Έχουν σκοπό στο τέλος κάθε μήνα και για 18 χρόνια να καταθέτουν 100 ευρώ σε αυτό το λογαριασμό. Μ’αυτόν τον τρόπο οι γονείς της Κατερίνας επιθυμούν κατά την ενηλικίωσή της να λάβει ένα ικανοποιητικό χρηματικό ποσό για τις σπουδές της. Το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης είναι 1,2% ανατοκιζόμενο ανά μήνα. Τί ποσό θα λάβει η Κατερίνα κατά την ενηλικίωσή της;

```
>> total_amount = fvfix (0.012/12, 12*18, 100, 2000, 0)
total_amount = 26578.78
```

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **pvfix** είναι:

pvfix (Rate, NumPeriods, Payment, ExtraPayment, Due)

Πίνακας 6.3 Ορίσματα της συνάρτησης pvfix

Όρισμα	Περιγραφή
Rate	Το καθορισμένο ποσοστό απόδοσης το οποίο θεωρείται σταθερό για την υπό εξέταση περίοδο
NumPeriods	Ο αριθμός των περιόδων
Payment	Η πληρωμή κάθε περιόδου
ExtraPayment (προαιρετικό)	Τυχόν επιπρόσθετο εισόδημα στο τέλος της περιόδου (η προεπιλογή είναι 0)
Due (προαιρετικό)	Όταν το ποσό προκαταβάλλεται=1 και όταν το ποσό καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου=0(προεπιλογή)

Έστω, για παράδειγμα, ότι ο κύριος Πέτρος σκέφτεται να επενδύσει ένα χρηματικό ποσό αγοράζοντας μια γκαρσονιέρα. Ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσής του είναι 13 χρόνια. Υποθέτουμε σταθερό μηνιαίο μίσθωμα 350 ευρώ για τα επόμενα 13 χρόνια το οποίο θα προκαταβάλλεται κάθε μήνα. Να υπολογιστεί η παρούσα αξία του εισοδήματος από τα μισθώματα του συγκεκριμένου ακινήτου χρησιμοποιώντας ένα ετήσιο ποσοστό προεξόφλησης 4%.

```
>> income = pvfix (0.04/12, 12*13, 350, 1)
income = 42521.93
```

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **fvvar** είναι:

fvvar (CashFlow, Rate, IrrCFDates)

Πίνακας 6.4 Ορίσματα της συνάρτησης fvvar

Όρισμα	Περιγραφή
CashFlow	Διάνυσμα με τις χρηματοροές συμπεριλαμβανομένης και της αρχικής επένδυσης(με αρνητικό πρόσημο)
Rate	Το καθορισμένο ποσοστό απόδοσης το οποίο θεωρείται σταθερό για την υπό εξέταση περίοδο

IrrCFDates (προαιρετικό)	Αφορά την περίπτωση μη τακτικών χρηματοροών. Είναι ένα διάνυσμα το οποίο περιέχει τις ημερομηνίες που πραγματοποιούνται οι χρηματοροές. Η προεπιλογή είναι ότι οι χρηματοροές καταβάλλονται σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Έστω, για παράδειγμα, ότι μια εταιρία για το επόμενο εξάμηνο αναμένει να έχει τις ακόλουθες εισροές: 900, 1200, 2500, 1600, 2000, 2350. Να υπολογιστεί η μελλοντική αξία αυτών των εισροών στο τέλος του εξαμήνου, υποθέτοντας ότι η εταιρία καταθέτει κάθε μήνα αυτές τις εισροές σε ένα λογαριασμό ταμιευτηρίου με ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης 4%.

```
>> revenue = [900 1200 2500 1600 2000 2350];
>> future_revenue = fvvar (revenue, 0.04/12)
future_revenue = 10623.62
```

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **pvvar** είναι:

pvvar (CashFlow, Rate, IrrCFDates)

Πίνακας 6.5 Ορίσματα της συνάρτησης pvvar

Όρισμα	**Περιγραφή**
CashFlow	Διάνυσμα με τις χρηματοροές συμπεριλαμβανομένης και της αρχικής επένδυσης(με αρνητικό πρόσημο)
Rate	Το καθορισμένο ποσοστό απόδοσης το οποίο θεωρείται σταθερό για την υπό εξέταση περίοδο
IrrCFDates (προαιρετικό)	Αφορά την περίπτωση μη τακτικών χρηματοροών. Είναι ένα διάνυσμα το οποίο περιέχει τις ημερομηνίες που πραγματοποιούνται οι χρηματοροές. Η προεπιλογή είναι ότι οι χρηματοροές καταβάλλονται σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Έστω, για παράδειγμα, ότι μια επιχείρηση εξετάζει την αγορά ενός μηχανήματος αξίας 85000 ευρώ η λειτουργία του οποίου θα αποφέρει ετήσιες καθαρές ταμειακές εισροές που έχουν εκτιμηθεί ως εξής: 11000, 13000, 16300, 18100, 18900. Αν το κόστος χρήσης του κεφαλαίου της επένδυσης είναι 4% και η υπολειμματική αξία της συγκεκριμένης επένδυσης στο τέλος του πέμπτου έτους είναι μηδέν, να προσδιοριστεί κατά πόσο η αγορά του μηχανήματος είναι συμφέρουσα για την επιχείρηση.

```
>> cashflows = [-85000 11000 13000 16300 18100 18900];
>> net_value = pvvar (cashflows, 0.04)
net_value = -16906.83
```

<u>Παρατήρηση</u>: Επειδή η καθαρά παρούσα αξία της επένδυσης είναι αρνητική δεν συμφέρει η αγορά του μηχανήματος.

6.3 Υπολογισμός αποσβέσεων

Το Matlab μας παρέχει εργαλειοθήκη χρηματοοικονομικής ανάλυσης με τις ακόλουθες συναρτήσεις του πίνακα 6.6, για τον υπολογισμό των αποσβέσεων.

Πίνακας 6.6 Συναρτήσεις υπολογισμού αποσβέσεων

Συνάρτηση	Περιγραφή
Depstln	Μέθοδος σταθερής απόσβεσης
Depfixdb	Μέθοδος του σταθερού ποσοστού επί της αναπόσβεστης λογιστικής αξίας
Depgendb	Μέθοδος της διπλάσιας μείωσης της αναπόσβεστης λογιστικής αξίας
Depsoyd	Μέθοδος του αθροίσματος της σειράς των ετών ζωής
Deprdv	Υπολογισμός αναπόσβεστης αξίας

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **depstln** είναι:

depstln (Cost, Salvage, Life)

Πίνακας 6.7 Ορίσματα της συνάρτησης depstln

Όρισμα	**Περιγραφή**
Cost	Τιμή κτήσης περιουσιακού στοιχείου
Salvage	Υπολειμματική αξία
Life	Διάρκεια ωφέλιμης ζωής

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **depfixdb** είναι:

depfixdb (Cost, Salvage, Life, Period, Month)

όπου:

Period: Ο αριθμός των ετών για τα οποία θα υπολογιστεί η απόσβεση

Month(προαιρετικό) : Ο αριθμός των μηνών τον πρώτο χρόνο της ωφέλιμης ζωής του περιουσιακού στοιχείου (η προεπιλογή είναι 12)

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **depgendb** είναι:

depgendb (Cost, Salvage, Life, Factor)

όπου:

Factor: Ο συντελεστής απόσβεσης. Στην περίπτωση της διπλάσιας μείωσης της αναπόσβεστης λογιστικής αξίας ισούται με 2.

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **depsoyd** είναι:

depsoyd (Cost, Salvage, Life)

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **deprdv** είναι:

deprdv (Cost, Salvage, Accum)

όπου:

Accum: η συσωρευμένη απόσβεση των προηγούμενων ετών

Έστω, για παράδειγμα, ότι μια μεταφορική επιχείρηση διαθέτει ένα αυτοκίνητο τιμής κτήσης 70000 ευρώ. Η υπολειμματική αξία αυτού υπολογίζεται σε 9000 και η διάρκεια ωφέλιμης ζωής σε 8 έτη. Να προσδιοριστεί η ετήσια απόσβεση του μηχανήματος με τις ακόλουθες μεθόδους:

1) Της σταθεράς ή γραμμικής απόσβεσης
2) Του σταθερού ποσοστού επί της αναπόσβεστης λογιστικής αξίας
3) Της διπλάσιας μείωσης της αναπόσβεστης λογιστικής αξίας
4) Του αθροίσματος της σειράς ετών ζωής

```
>> method1 = depstln (70000, 9000, 8)
method1 =  7625

>> method2 = depfixdb (70000, 9000, 8, 8)
method2 = 15832.21   12251.37   9480.42   7336.19   5676.93   4392.96   3399.38
2630.53

>> method3 = depgendb (70000, 9000, 8, 2)
method3 = 17500.00 13125.00   9843.75   7382.81   5537.11   4152.83   3114.62
343.87

>> method4 = depsoyd (70000, 9000, 8)
method4 = 13555.56   11861.11   10166.67   8472.22 6777.78   5083.33   3388.89
1694.44
```

6.4 Υπολογισμός εσωτερικού ποσοστού απόδοσης, πραγματικού και ονομαστικού επιτοκίου

Το Matlab μας παρέχει τις κατάλληλες συναρτήσεις έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίζουμε το εσωτερικό ποσοστό απόδοσης, το πραγματικό καθώς και το ονομαστικό επιτόκιο. Ακολουθεί ο πίνακας 6.8 με τις συναρτήσει αυτές.

Πίνακας 6.8 Συναρτήσεις υπολογισμού εσωτερικού ποσοστού απόδοσης, πραγματικού και ονομαστικού επιτοκίου

Συνάρτηση	**Περιγραφή**
Irr	Υπολογίζει το εσωτερικό ποσοστό απόδοσης μιας σειράς τακτικών χρηματοροών

Effrr	Υπολογίζει το πραγματικό επιτόκιο με δεδομένο το ονομαστικό επιτόκιο και τον αριθμό των ανατοκιζόμενων περιόδων μέσα στο έτος
Nomrr	Υπολογίζει το ονομαστικό επιτόκιο με δεδομένο το πραγματικό επιτόκιο και τον αριθμό των ανατοκιζόμενων περιόδων μέσα στο έτος

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **irr** είναι:

Return = irr (CashFlow)

όπου:

Return: εσωτερικό ποσοστό απόδοσης

CashFlow: το διάνυσμα των χρηματοροών. Το πρώτο στοιχείο αντιστοιχεί στην αρχική επένδυση.

Η συνάρτηση irr υπολογίζει μόνο θετικό εσωτερικό ποσοστό απόδοσης. Στην περίπτωση αρνητικού ποσοστού απόδοσης η συνάρτηση irr επιστρέφει την μεταβλητή NaN (μη αριθμός).

Έστω, για παράδειγμα, ότι μία επένδυση 70000 ευρώ αναμένεται να αποφέρει τα επόμενα πέντε χρόνια τις ακόλουθες εισροές: 17000, 14000, 19000, 22000, 20000. Να υπολογιστεί το εσωτερικό ποσοστό απόδοσης.

```
>> CashFlow = [-70000 17000 14000 19000 22000 20000];
>> Return = irr (CashFlow)
Return = 0.0933
```

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **effrr** είναι:

  Return = effrr (Rate, NumPeriods)

όπου:

Rate: το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο

NumPeriods: ο αριθμός των ανατοκιζόμενων περιόδων μέσα στο έτος

Ας υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το πραγματικό επιτόκιο, εάν το ονομαστικό επιτόκιο είναι 4% με μηνιαίο ανατοκισμό.

```
>> Return = effrr (0.04, 12)
Return  =  0.0407
```

- Η γενική μορφή της συνάρτησης **nomrr** είναι:

  Return = nomrr (Rate, NumPeriods)

όπου:

Rate: το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο

NumPeriods: ο αριθμός των ανατοκιζόμενων περιόδων μέσα στο έτος

Ας υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το ονομαστικό επιτόκιο, εάν το πραγματικό επιτόκιο είναι 4.13% με μηνιαίο ανατοκισμό.

```
>> Return = nomrr (0.0413, 12)
Return = 0.0405
```

6.5 Υπολογισμός τοκοχρεολυσίου

Για να υπολογίσουμε το επιτόκιο περιόδου, εάν είναι γνωστό το ποσό του δανείου, η περίοδος αποπληρωμής και το τοκοχρεολύσιο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **annurate**. Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

Rate = annurate (NumPeriods, Payment, PresentValue, FutureValue, Due)

Ακολουθεί ο πίνακας 6.9 με τα ορίσματα της συνάρτησης annurate.

Πίνακας 6.9 Ορίσματα της συνάρτησης annurate

Όρισμα	**Περιγραφή**
NumPeriods	Ο αριθμός των περιόδων αποπληρωμής
Payment	Το τοκοχρεολύσιο
PresentValue	Η παρούσα αξία του δανείου
FutureValue (προαιρετικό)	Η μελλοντική αξία του δανείου. Η προεπιλογή είναι 0

Due (προαιρετικό)	Η αποπληρωμή γίνεται στην αρχή κάθε περιόδου Due=1, η αποπληρωμή γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου Due=0 (προεπιλογή)

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε το μηνιαίο επιτόκιο τετραετούς δανείου αξίας 5000 ευρώ εάν η δόση είναι 170 ευρώ και πληρώνεται στο τέλος κάθε μήνα.

>> Rate = annurate (4*12, 170, 5000, 0, 0)
Rate = 0.0221
Επομένως, το ετήσιο επιτόκιο είναι 12*0.0221 = 0.2652, άρα 26.52%

Για να υπολογίσουμε το τοκοχρεολύσιο χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **amortize**. Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

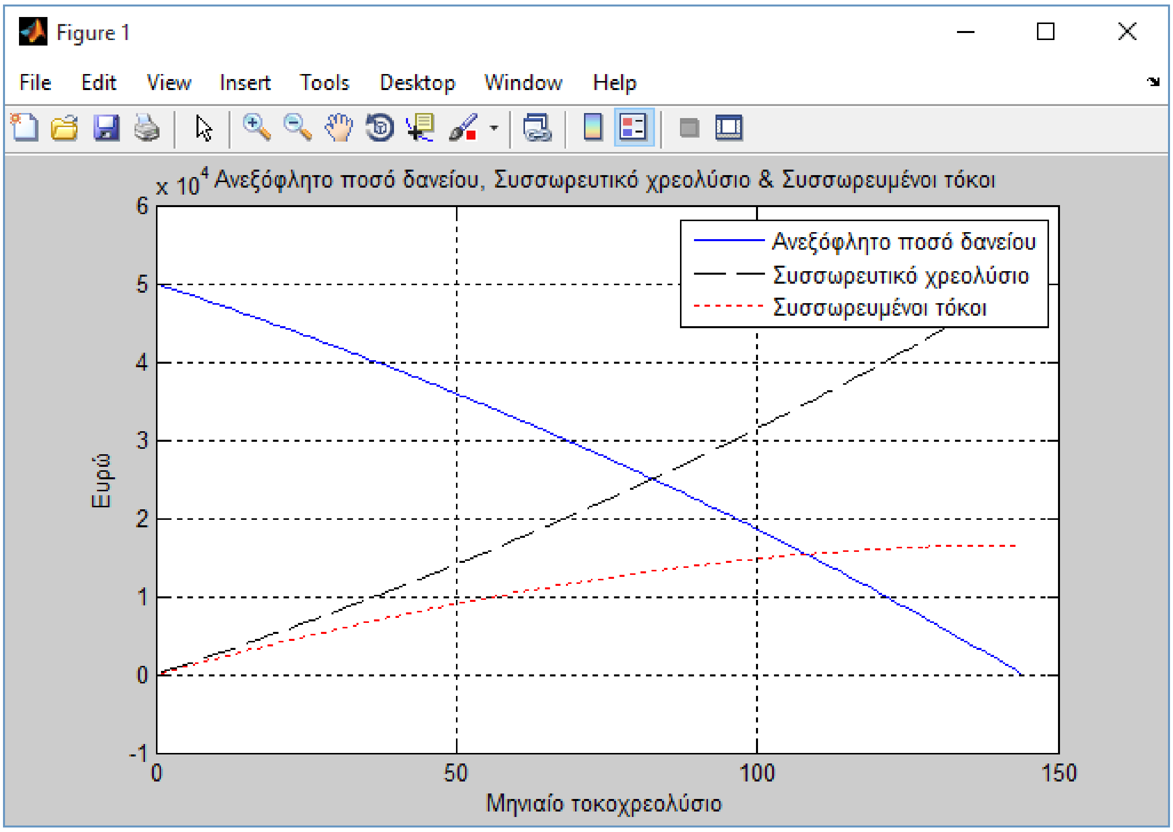
[Principal, Interest, Balance, Payment] = amortize (Rate, NumPeriods, PresentValue, FutureValue, Due)

Όπου:
Principal: το τοκοχρεολύσιο. Διάνυσμα διαστάσεων 1 επί τον αριθμό των περιόδων
Interest: ο τόκος κάθε περιόδου. Διάνυσμα διαστάσεων 1 επί τον αριθμό των περιόδων
Balance: ανεξόφλητο ποσό σε κάθε περίοδο. Διάνυσμα διαστάσεων 1 επί τον αριθμό των περιόδων
Payment: το τοκοχρεολύσιο

Έστω, για παράδειγμα, ένα δωδεκαετές δάνειο 50.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 5% και πληρωμή των δόσεων στο τέλος κάθε μήνα. Να υπολογιστεί το τοκοχρεολύσιο.
>> [Principal, Interest, Balance, Payment] = amortize (0.05/12, 12*12, 50000, 0, 0)
Payment = 462.45
Δηλαδή, η μηνιαία δόση υπολογίστηκε στα 462,45 ευρώ.

Στη συνέχεια, με τον παρακάτω κώδικα θα παραστήσουμε γραφικά το ανεξόφλητο ποσό δανείου, τον συνολικό τόκο (χρησιμοποιώντας την συνάρτηση cumsum η οποία υπολογίζει το συσσωρευτικό άθροισμα), και τις πληρωμές τόκου καθ’όλη τη διάρκεια αποπληρωμής του δανείου.

```
%Δημιουργία τριών γραφικών παραστάσεων στο ίδιο παράθυρο γραφικών
>> plot (Balance,'b'), hold('on')
>> plot (cumsum(Principal), '--k')
>> plot (cumsum(Interest), ':r')
>> xlabel ('Μηνιαίο τοκοχρεολύσιο') %Τίτλος στον οριζόντιο άξονα
>> ylabel('Ευρώ') %Τίτλος στον κάθετο άξονα
>> grid('on') %Εμφάνιση πλέγματος γραμμών
>> title('Ανεξόφλητο ποσό δανείου, Συσσωρευτικό χρεολύσιο & Συσσωρευμένοι τόκοι') %Τίτλος γραφήματος
>> legend('Ανεξόφλητο ποσό δανείου', 'Συσσωρευτικό χρεολύσιο', 'Συσσωρευμένοι τόκοι') %Δημιουργία υπομνήματος
```



Εικόνα 6.1 Ανεξόφλητο ποσό δανείου, συσσωρευτικό χρεολύσιο και συσσωρευμένοι τόκοι

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α’

7.1 Πίνακες και Ορίζουσες

Ας θεωρήσουμε τα εξής συστήματα:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z &= b_4 \end{aligned} \qquad (3)$$

Μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω συστήματα ως εξής:

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$

όπου A , X , B ορίζονται για κάθε σύστημα

(1) $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(3) $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Εν γένει πίνακας $(m \times n)$ A_{ij} θα είναι η συλλογή των στοιχείων $α_{ij}$:

$$\mathrm{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m = αριθμός σειρών — $α_{ij}$ = το στοιχείο που βρίσκεται

n = αριθμός στηλών — στην i σειρά και στην j στήλη

Αυτή η διάταξη των στοιχείων $α_{ij}$ τα οποία μπορεί να είναι πραγματικοί, μιγαδικοί, συναρτήσεις κ.λ.π. έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α. Πρόσθεση δύο πινάκων $(m \times n)$

$$\mathrm{A}_{ij} + \mathrm{B}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots\cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

β. Πολλαπλασιασμός

$$\mathrm{A}_{ij} \cdot \mathrm{B}_{jk} = \Gamma_{ik}$$

Ο πολλαπλασιασμός είναι δυνατός όταν:

$$\begin{matrix} \mathrm{A} \rightarrow (m \times n) \\ \mathrm{B} \rightarrow (n \times k) \end{matrix} \qquad \Gamma \rightarrow m \times k$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{A}_{(m\times n)\cdot(n\times k)}=m\times k$$

$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$ δεν ορίζεται στην συγκεκριμένη περίπτωση

Ο πολλαπλασιασμός λοιπόν δύο πινάκων A , B ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jk} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}bjk \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jk} \end{pmatrix}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\to (3\times 2) \\ \mathrm{B} &\to (2\times 4) \end{aligned}$$

$$\mathrm{A}_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}_{ij}=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{C}\to(3\times 2)\cdot(2\times 4)=(3\times 4)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\times(-4)+(-1)\times(1) & 1\times 1+(-1)\times 3 & 1\times 2+(-1)\times(-2) & 1\times(-1)+(-1)\times 1 \\ 3\times(-4)+2\times 1 & 3\times 1+2\times 3 & 3\times 2+2\times(-2) & 3\times(-1)+2\times 1 \\ 1\times(-4)+(-2)\times 1 & 1\times 1+(-2)\times 3 & 1\times 2+(-2)\times(-2) & 1\times(-1)+(-2)\times 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & -2 \\ -10 & 9 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Εάν $m=n$ ο πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός**:

π.χ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2\times 2) \qquad (3\times 3)$$

Εν γένει για τετραγωνικούς πίνακες: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\neq\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$

Ανάστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A ονομάζεται ο πίνακας A^t ο οποίος σχηματίζεται όταν στον A αλλάξω τις σειρές με τις στήλες:

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^t=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει την ιδιότητα $\mathrm{A}^t=\mathrm{A}$ ονομάζεται **συμμετρικός.**

π.χ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ενώ εάν ικανοποιεί την συνθήκη $\mathrm{A}^t=-\mathrm{A}$ ονομάζεται **αντισυμμετρικός.**

π.χ.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Μερικοί ενδιαφέροντες πίνακες

(1) **Πίνακες «σειρές»:** $\mathrm{A} \to (m \times n)$: $m=1$, $n=\beta$

π.χ. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $m=1$, $n=3$

$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $m=1$, $n=5$

(2) **Πίνακες «στήλες» :** $\mathrm{A} \to (m \times n)$: $m=d$, $n=1$

π.χ. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$m=3$, $n=1$ $m=4$, $n=1$

(3) **Μηδενικός πίνακας :**

$$\underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = 0$$

(4) **Ο Μοναδιαίος πίνακας:**

$$\mathrm{I} = \underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα</u> $|\mathrm{A}|$

$$(2\times 2)\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$(3\times 3)\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Οι ορίζουσες $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ ονομάζονται

«Ελλάσονες» ορίζουσες του πίνακα A και θα τις συμβολίζουμε με Ε: E_{ij}

E_{12} = ελλάσων ορίζουσα του A που δημιουργείται εάν αφαιρέσω από τον A την **πρώτη σειρά** και την **δεύτερη στήλη**:

π.χ. $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{E}_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ονομάζονται **«Συμπαράγουσες»** ορίζουσες του A , οι ελλάσονες ορίζουσες πολλαπλασιασμένες με $(-1)^{i+j}$ και τις συμβολίζω με Σ_{ij} :

$$\Sigma_{ij}=(-1)^{i+j}\,\mathrm{E}_{ij}$$

π.χ. για τον A (3×3) θα έχω:

$$\Sigma_{12}=(-1)^{1+2}\mathrm{E}_{12}=-1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα $(n\times n)$ μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια των «συμπαραγουσών». Επιλέγω μία σειρά ή μία στήλη και αναπτύσσω, όπως λέμε, ως προς αυτή την σειρά ή στήλη:

$$|\mathrm{A}|=a_{j1}\Sigma_{j1}+a_{j2}\Sigma_{j2}+...+a_{jn}\Sigma_{jn}$$ ως προς την j σειρά

ή

$$\left|\mathrm{A}\right| = a_{1k}\Sigma_{1k} + a_{2k}\Sigma_{2k} + ... + a_{nk}\Sigma_{nk}$$ ως προς την k στήλη

Συνήθως επιλέγω την πρώτη σειρά ή την πρώτη στήλη.

Παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\left|\mathrm{A}\right| = a_{11}\Sigma_{11} + a_{21}\Sigma_{21} + a_{31}\Sigma_{31}$ ανάπτυξη ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης

$$\Sigma_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Οπότε:

$$\left|\mathrm{A}\right| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\mathrm{A}\right| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\mathrm{A}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Για $\underline{n = 3}$ και μόνον μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathrm{A}| = +\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

Ακολουθεί ένα θεώρημα για τις «συμπαράγουσες»:

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μίας σειράς (στήλης) με τις συμπαράγουσες μίας άλλης σειράς (στήλης) είναι μηδέν !!

Δηλαδή εάν έχω τον πίνακα Α με στοιχεία α_{ij}

$$i \neq j \qquad a_{i1}\Sigma_{j1} + a_{i2}\Sigma_{j2} + ... + a_{in}\Sigma_{jn} = 0$$

$$k \neq l \qquad a_{1k}\Sigma_{1l} + a_{2k}\Sigma_{2l} + ... + a_{nk}\Sigma_{nl} = 0$$

Ακολουθούν οι παρακάτω εφαρμογές του τρόπου υπολογισμού ορίζουσας με την μέθοδο των συμπαραγουσών, την μέθοδο Sarrus και το ΘΕΩΡΗΜΑ I

Παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Α) Υπολογισμός ορίζουσας αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης:

$$|\mathrm{A}| = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{A}| = 1 \times [2 \times 1 - (-2) \times 1] - 3[(-1) \times 1 - (-2) \times 2] + 1 \times [(-1) \times 1 - 2 \times 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{A}| = 1 \times (2 + 2) - 3 \times (-1 + 4) + 1 \times (-1 - 4) \Rightarrow |\mathrm{A}| = 4 - 9 - 5 \Rightarrow |\mathrm{A}| = -10$$

Β) Υπολογισμός ορίζουσας χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Sarrus:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$|A| = 1\times 2\times 1 + (-1)\times 1\times 1 + 2\times 3\times (-2) - 1\times 2\times 2 - (-2)\times 1\times 1 - 1\times 3\times (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = 2 - 1 - 12 - 4 + 2 + 3 \Rightarrow |A| = 7 - 17 \Rightarrow |A| = -10$$

Γ) Επαλήθευση του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Ι :

Επιλέγω τα στοιχεία της σειράς 2 :

3 , 2 , 1

Θα θεωρήσω το γινόμενο των στοιχείων αυτής της σειράς με τις συμπαράγουσες των στοιχείων της πρώτης σειράς: το πρώτο στοιχείο της 2ης σειράς με την συμπαράγουσα του πρώτου στοιχείου της 1ης σειράς κ.ο.κ.

Δηλαδή

$$a_{21}\Sigma_{11} + a_{22}\Sigma_{12} + a_{23}\Sigma_{13}$$

όπου

$$a_{21} = 3 \quad , \quad a_{22} = 2 \quad , \quad a_{23} = 1$$

και

$$\Sigma_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Sigma_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Sigma_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

Σύμφωνα με το ΘΕΩΡΗΜΑ Ι :

$$3\times 4 + 2\times(-2) + 1\times(-8) = 0$$

$$12 - 4 - 8 = 0$$

<u>Ιδιότητες Οριζουσών</u>

(i) Μία ορίζουσα μένει αμετάβλητη εάν οι σειρές της αντικατασταθούν από τις στήλες και οι στήλες από τις σειρές.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = -10$$

$$A \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\tilde{A}| = ?$$

$$|\tilde{A}| = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tilde{A}| = 1 \times (2+2) + 1 \times (3-1) + 2 \times (-6-2) \Rightarrow |\tilde{A}| = 4 + 2 - 16 = -10$$

(ii) Ο κοινός παράγοντας των στοιχείων μίας σειράς (στήλης) μπορεί να τεθεί σαν κοινός παράγοντας της ορίζουσας.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & -1 & 2 \\ 2 \times 3 & 2 & 1 \\ 2 \times 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Το 2 είναι κοινός παράγοντας της πρώτης στήλης˙ σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) το 2 θα πολλαπλασιάσει την ορίζουσα αυτού του πίνακα και θα έχω:

$$|B| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2|A| = -20$$

Κάνω επαλήθευση υπολογίζοντας την $|\mathrm{B}|$ με Sarrus:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}$$

$$|\mathrm{B}| = 2\times 2\times 1 + (-1)\times 1\times 2 + 2\times 6\times(-2) - 2\times 2\times 2 - (-2)\times 1\times 2 - 1\times 6\times(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{B}| = 4 - 2 - 24 - 8 + 4 + 6 = -26 + 6 = -20$$

(iii) Η εναλλαγή δύο σειρών (στηλών) σε μία ορίζουσα μας δίνει μία ορίζουσα με αλλαγμένο πρόσημο.

Παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{A}| = -10$$

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Σύμφωνα με την ιδιότητα (iii): $|\tilde{\mathrm{A}}| = 10$

Επαλήθευση:

$$|\tilde{\mathrm{A}}| = (-1)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|\tilde{\mathrm{A}}| = -(3-1) - 2\times(1-2) - 2\times(1-6) \Rightarrow |\tilde{\mathrm{A}}| = -2 + 2 + 10 \Rightarrow |\tilde{\mathrm{A}}| = 10!!$$

(iv) Από την προηγούμενη ιδιότητα συνάγεται ότι η ορίζουσα πίνακα με δύο όμοιες σειρές (στήλες) είναι μηδέν:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

Επαλήθευση:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$|A| = 1\times 2\times 1 + 1\times(-4)\times 1 + 3\times 2\times 1 - 1\times 2\times 3 - 1\times(-4)\times 1 - 1\times 2\times 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = 2-4+6-6+4-2 = 0!!$$

(v) Μία ορίζουσα μένει αμετάβλητη εάν στα στοιχεία μίας σειράς (στήλης) προστεθούν τα αντίστοιχα στοιχεία μίας άλλης σειράς (στήλης) πολλαπλασιασμένα με τον ίδιο αριθμό.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = -10$$

Θα προσθέσω στα στοιχεία της πρώτης σειράς τα αντίστοιχα στοιχεία της τρίτης σειράς πολλαπλασιασμένα με -1 :

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & -1 & 2 \\ + & -1 & 2 & -1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Πρέπει ο πίνακας $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ να έχει $|\tilde{A}| = -10$

Επαλήθευση (με Sarrus):

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$|\tilde{A}| = 0\times2\times1+1\times1\times1+1\times3\times(-2)-1\times2\times1-(-2)\times1\times0-1\times3\times1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tilde{A}| = 1-6-2-3 = -10!!$$

Αντίστροφος Πίνακας: Εάν έχω τετραγωνικό πίνακα τάξεως n δηλαδή $(n\times n)$ και $|A|\neq 0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας που συμβολίζεται ως A^{-1} τέτοιος ώστε:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I = \text{ μοναδιαίος πίνακας}$$

Ο αντίστροφος υπολογίζεται ως εξής:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{21} & \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{32} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Σij είναι οι συμπαράγουσες του A .

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = -10 \neq 0$$

$$\Sigma_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{11} = 4$$

$$\Sigma_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{21} = -3$$

$$\Sigma_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{31} = -5$$

$$\Sigma_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{12} = -2$$

$$\Sigma_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{22} = -1$$

$$\Sigma_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{32} = 5$$

$$\Sigma_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{13} = -8$$

$$\Sigma_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{23} = 1$$

$$\Sigma_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Sigma_{33} = 5$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{(-10)}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 5 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{(-10)}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 5 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{(-10)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 4\times1+(-3)\times3+(-5)\times1 & 4\times(-1)+(-3)\times2+(-5)\times(-2) & 4\times2+(-3)\times1+(-5)\times1 \\ (-2)\times1+(-1)\times3+5\times1 & (-2)\times(-1)+(-1)\times2+5\times(-2) & (-2)\times2+(-1)\times1+5\times1 \\ (-8)\times1+1\times3+1\times5 & (-8)\times(-1)+1\times2+5\times(-2) & (-8)\times2+1\times1+1\times5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{(-10)}\begin{pmatrix} 4-9-5 & -4-6+10 & 8-3-5 \\ -2-3+5 & 2-2-10 & -4-1+5 \\ -8+3+5 & 8+2-10 & -16+1+6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{(-10)}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

Βαθμός πίνακα A $(m \times n)$ **,** $m = n$ **ή και** $m \neq n$

Εάν ο πίνακας είναι τετραγωνικός $(m = n)$, ο βαθμός του πίνακα είναι n εάν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική. Εάν η ορίζουσα είναι μηδενική τότε θα είναι $n-1$ εφ' όσον υπάρχει μία τουλάχιστον συμπαράγουσα διαφορετική του μηδενός. Εάν και οι συμπαράγουσές του είναι μηδέν, τότε θεωρώ όλους τους υποπίνακες $(n-2)\times(n-2)$ και υπολογίζω τις ορίζουσές τους. Εάν υπάρχει μία τουλάχιστον διαφορετική του μηδενός τότε ο βαθμός του πίνακα είναι $n-2$. Εάν όχι τότε θεωρώ τους υποπίνακες $(n-3)\times(n-3)$ υπολογίζω τις ορίζουσες ……….. κλπ μέχρι να φτάσω στους υπο-πίνακες 1×1 δηλαδή τα στοιχεία του αρχικού πίνακα.

<u>Παραδείγματα:</u>

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |\mathrm{A}| = 2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$

  ο πίνακας A είναι δευτέρου βαθμού

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |\mathrm{A}| = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$

  ο A είναι βαθμού μικρότερου του 2

  Θεωρώ τους υποπίνακες του A που είναι τα στοιχεία του 2, 2, 3, 3 και που είναι διαφορετικά του μηδενός, επομένως ο A είναι πρώτου βαθμού.

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{A}| = -10 \neq 0 \Rightarrow$

  ο A είναι τρίτου βαθμού

- $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathrm{A}|=?$$

Με Sarrus:

$$\begin{matrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2\end{matrix}$$

$$|\mathrm{A}|=1\times(-1)\times 1+(-1)\times 2\times 1+2\times 1\times(-2)-1\times(-1)\times 2-(-2)\times 2\times 1-1\times 1\times(-1)=$$
$$=-1-2-4+2-4+1=0$$

$|\mathrm{A}|=0 \Rightarrow$ ο βαθμός του A δεν μπορεί να είναι 3 · θα είναι 2 ή 1 .

Θεωρώ όλους τους υποπίνακες 2×2.

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{κλπ}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Οι ορίζουσες αυτών των υπο-πινάκων είναι αντίστοιχα:

$$\begin{matrix}0 & , & 0 & , & 0\\ 1 & , & -1 & , & 3\\ -1 & , & -1 & , & 3\end{matrix}$$

Αφού υπάρχουν ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων μη μηδενικές, ο βαθμός του πίνακα είναι δύο !!

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

Όλοι οι υποπίνακες 2×2 είναι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και επομένως $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Όμως οι υποπίνακες 1×1, δηλαδή τα στοιχεία του A είναι μη μηδενικά και επομένως ο βαθμός του A είναι ένα.

Εάν ο πίνακας δεν είναι τετραγωνικός ο ορισμός είναι ο ίδιος: Θεωρώ τους μέγιστους τετραγωνικούς υποπίνακες και υπολογίζω τις ορίζουσές τους˙ ο βαθμός θα είναι η τάξη της μη μηδενικής ορίζουσας!!

<u>Παράδειγμα:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ είναι πίνακας 2×3

Θεωρώ όλους τους υποπίνακες 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Οι ορίζουσές τους θα είναι αντίστοιχα:

8 , 0 , -4

Αφού υπάρχει τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες διάφορη του μηδενός (εδώ υπάρχουν δύο), ο βαθμός του πίνακα είναι δύο!!

<u>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</u>

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}_1^1 x^1 + \mathrm{a}_2^1 x^2 + \ldots. + \mathrm{a}_\mathrm{n}^1 x^n = b^1 \\
&\mathrm{a}_1^2 x^1 + \mathrm{a}_2^2 x^2 + \ldots. + \mathrm{a}_\mathrm{n}^2 x^n = b^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathrm{a}_1^\mathrm{p} x^1 + \mathrm{a}_2^\mathrm{p} x^2 + \ldots. + \mathrm{a}_\mathrm{n}^\mathrm{p} x^n = b^p
\end{aligned}$$

ή υπό μορφή πινάκων: $\mathrm{A}\ \mathrm{X} = \mathrm{B}$

όπου

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1^1 & \mathrm{a}_2^1 & \ldots & \mathrm{a}_\mathrm{n}^1 \\ \mathrm{a}_1^2 & \mathrm{a}_2^2 & \ldots & \mathrm{a}_\mathrm{n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{a}_1^\mathrm{p} & \mathrm{a}_2^\mathrm{p} & \ldots & \mathrm{a}_\mathrm{n}^\mathrm{p} \end{pmatrix}$$

πίνακας συντελεστών $(p \times n)$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}$$

διάνυσμα στήλη με συνιστώσες (στοιχεία) τους αγνώστους $\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \ldots, \mathrm{x}^\mathrm{n}$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ . \\ . \\ . \\ b^p \end{pmatrix}$$

διάνυσμα στήλη συντελεστών δευτέρου μέρους

Διερεύνηση:

Εξετάζω τον βαθμό του πίνακα A (rank) και υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) $r = p$ ο βαθμός του συστήματος ισούται με τον αριθμό των εξισώσεων

(ii) $r < p$

(i) Γράφω το σύστημα ως εξής (φροντίζω η μη μηδενική ορίζουσα τάξεως r να καταλαμβάνει την άνω αριστερά γωνία του πίνακα).

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}_1^1 x^1 + \mathrm{a}_2^1 x^2 + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^1 x^r &= b^1 - \mathrm{a}_{\mathrm{r+1}}^1 x^{r+1} - \ldots - \mathrm{a}_{\mathrm{n}}^1 x^n \\
\mathrm{a}_1^2 x^1 + \mathrm{a}_2^2 x^2 + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^2 x^r &= b^2 - \mathrm{a}_{\mathrm{r+1}}^2 x^{r+1} - \ldots - \mathrm{a}_{\mathrm{n}}^2 x^n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{a}_1^{\mathrm{r}} x^1 + \mathrm{a}_2^{\mathrm{r}} x^2 + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}} x^r &= b^r - \mathrm{a}_{\mathrm{r+1}}^{\mathrm{r}} x^{r+1} - \ldots - \mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}} x^n
\end{aligned}$$

Δίνουμε στους $n-r$ αγνώστους $x^{r+1}, \ldots, x^n$ τιμές $\xi^{r+1}, \xi^{r+2}, \ldots, \xi^n$ αυθαίρετες και το προκύπτον σύστημα είναι ένα σύστημα Crammer. Οι λύσεις είναι ∞^{n-r} το πλήθος.

(ii) Σχηματίζω τις ορίζουσες $(r+1)\times(r+1)$:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1^1 & \ldots & \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^1 & b^1 \\ \mathrm{a}_1^2 & \ldots & \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{a}_1^{\mathrm{r}} & \ldots & \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{r}} & b^r \\ \mathrm{a}_1^{\mathrm{s}} & \ldots & \mathrm{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}} & b^s \end{vmatrix} \qquad r+1 \le s \le p$$

Εάν Δ=0 τότε υπάρχουν ∞^{n-r} λύσεις.

Εάν Δ≠0 το σύστημα είναι αδύνατον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αχιλλέας Ζαπράνης, Ευστράτιος Λιβάνης, «Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές με το MATLAB», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2009

[2] Στέφανος Θ. Παπαδάμου, «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου - Μια Σύγχρονη Προσέγγιση», Εκδόσεις Gutenberg, 2009

[3] Αλέξης Παλαμίδης, Αναστασία Βελώνη, «Σήματα & Συστήματα με Matlab», Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, 2008

[4] Πίνακες και Ορίζουσες https://eclass.teicrete.gr/modules/document/file.php/TH183/ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ.doc