

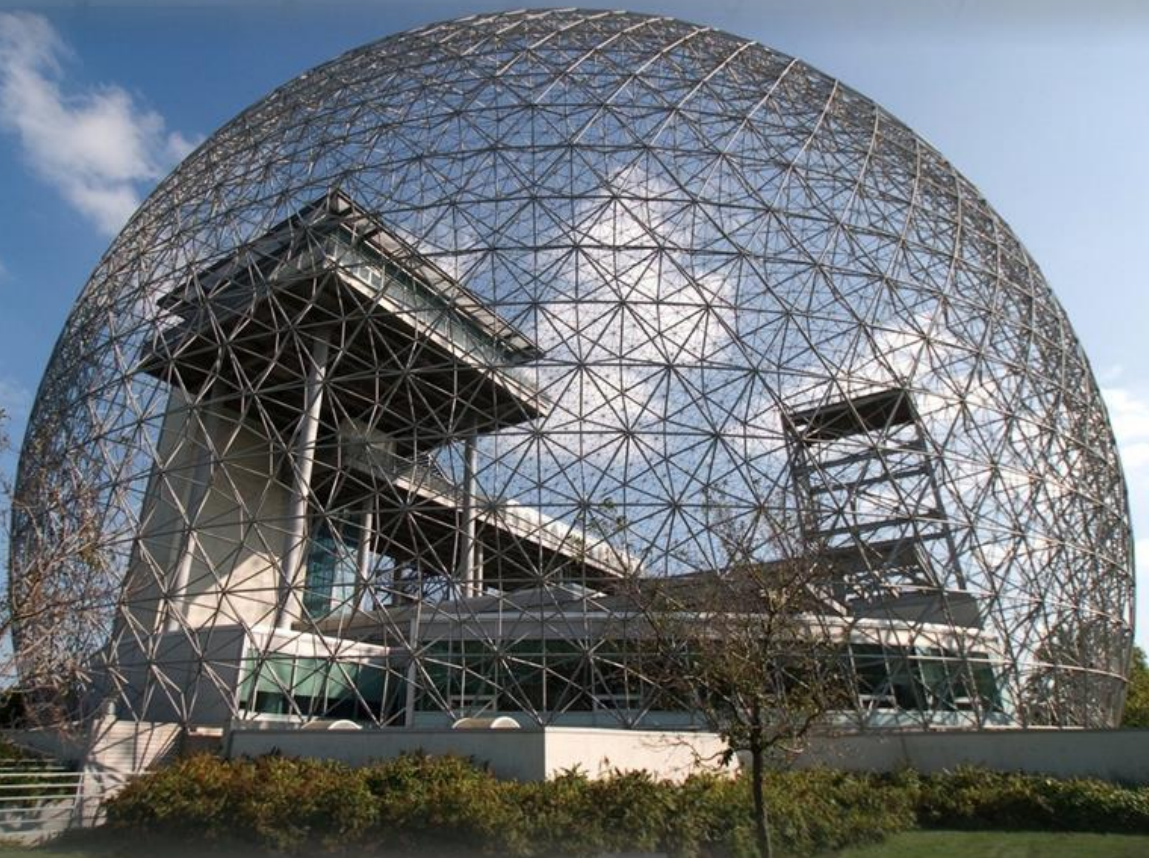
Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ.

Σ.Τ.ΕΦ. Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Τ.Ε.



# Πτυχιακή εργασία

Η Γεωμετρία των γεωδαιτικών θόλων



Εκπόνηση: Μαρία Θεοδωροπούλου (Α.Μ. 42661)

Επίβλεψη: Γεώργιος Μιχαήλ Εξαρχάκος - Παναγιώτης Νικολαΐδης

Νοέμβριος 2016



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο/Η κάτωθι υπογεγραμμένος/η ΘΕΟΔΩΡΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ του ΣΟΦΟΚΛΗ φοιτητής του Τμήματος ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

του Α.Ε.Ι Πειραιά Τ.Τ, πριν αναλάβω την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μου, δηλώνω ότι ενημερώθηκα για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο του συγγραφέα, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικός υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας της Π.Ε, ο οποίος φέρει και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών του συγγραφέα, σε περίπτωση που το Ίδρυμα του έχει απονεμίσει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφασή της, μετά από αίτηση του ενδιαφερόμενου, του αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση Π.Ε με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε πρέπει να ολοκληρώσει εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού 6μήνου από την ημερομηνία ανάθεσής της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18. παρ.5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού».

Ο Δηλών

Ημερομηνία

01/11/2016



# *Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων*

*στην οικογένειά μου*



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## Περιεχόμενα

<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</b> .....	5
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b> .....	6
<b>Abstract</b> .....	8
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	9
<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: ΥΠΑΡΧΟΝΤΕΣ ΘΟΛΟΙ</b> .....	11
Κεφάλαιο 2ο: ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΘΟΛΩΝ .....	22
Κεφάλαιο 3ο: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΥ ΘΟΛΟΥ .....	24
Σφαιρικές πλακοστρώσεις και πολύεδρα .....	24
«Τριγωνισμός» σφαιρικού πολυγώνου .....	27
1 <sup>η</sup> Λύση (πρβλ. Coxeter 1971, pp. 98-101).....	29
2 <sup>η</sup> Λύση (Wenninger 1999, p. 92).....	31
3 <sup>η</sup> Λύση (εφαρμογή DOMES).....	31
«Δυϊκές» των σφαιρικών πλακοστρώσεων .....	32
<b>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ DOMES</b> .....	34
<b>Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b> .....	45
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Σφαιρικές Πλακοστρώσεις και Πολύεδρα</b> .....	46
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	50
Έντυπη: .....	50
Ξενόγλωσση: .....	50
Ελληνική: .....	50
Ηλεκτρονική: .....	51
Ξενόγλωσση: .....	51
Ελληνική: .....	51



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους κκ. Νικολαΐδη Παναγιώτη και Εξαρχάκο Γεώργιο, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή τους στην επίλυση διάφορων θεμάτων.

Ιδιαίτερα οφείλω (και επιθυμώ) για μία ακόμα φορά να ευχαριστήσω τον κ. Νικολαΐδη ο οποίος παρότι δεν είχε σύμβαση με το Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. (ενώ όταν ξεκίνησε την εργασία αυτή δίδασκε στο ίδρυμα) μου παρείχε αφειδώς το χρόνο του και τις πολύτιμες συμβουλές και καθοδήγησή του σε όποιο θέμα προέκυπτε. Η βοήθειά του στην εργασία αυτή είναι όχι μόνο πολύτιμη αλλά κρίσιμη και θα ήθελα να τονίσω ότι χωρίς την ατέρμονη αρωγή του δεν θα ήτο δυνατή.

Αισθάνομαι επίσης την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου, Σοφοκλή και Παναγιώτα, τα αδέρφια μου, Κώστα και Μαρίνο, αλλά και το σύντροφό μου Ευθύμη, για όλα όσα μου έχουν προσφέρει στη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων και για την αμέριστη υποστήριξή τους σε κάθε μου επιλογή.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η έρευνα των τεχνικών «τριγωνισμού» της σφαιρικής επιφάνειας, μιας διαδικασίας η οποία προαπαιτείται κατά τη σχεδίαση ενός γεωδαιτικού θόλου. Όπως επίσης και ο υπολογισμός των απαραίτητων δομικών στοιχείων (ακμών-ράβδων, κορυφών-κόμβων), ως προς το πλήθος και ως προς τα λοιπά τους χαρακτηριστικά, για την κατασκευή ενός γεωδαιτικού θόλου.

Η ενασχόλησή μου με τους γεωδαιτικούς θόλους ξεκίνησε από την περιέργειά μου για τη γεωμετρική δομή και τις ιδιότητες αυτών των εντυπωσιακών κατασκευών. Συνέβη ο ένας από τους εισηγητές, ο κ. Παναγιώτης Νικολαΐδης, να έχει ασχοληθεί στο παρελθόν με τη γεωμετρία των γεωδαιτικών θόλων, σε επαγγελματικό επίπεδο. Έχει μάλιστα αναπτύξει τις εφαρμογές λογισμικού TILES και DOMES. Και οι δύο εφαρμογές είναι γραμμένες στη γλώσσα Visual LISP, για το περιβάλλον του AutoCAD, και τα αντικείμενα που παράγουν είναι πλήρως επεξεργάσιμα και αξιοποιήσιμα.

Η εφαρμογή TILES, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει όλες τις κανονικές και ημικανονικές πλακοστρώσεις στην επιφάνεια της σφαίρας, τις δυϊκές τους, καθώς και τα αντίστοιχα των πλακοστρώσεων πολύεδρα, εφόσον ζητηθεί. Η εφαρμογή DOMES κατασκευάζει γεωδαιτικούς θόλους επιθυμητής συχνότητας (frequency), με αφετηρία τυχούσα κανονική ή ημικανονική πλακόστρωση στην επιφάνεια της σφαίρας. Κατασκευάζει επίσης, εφόσον ζητηθεί, τον δυϊκό θόλο του αρχικού, στην επιφάνεια της ίδιας ή διαφορετικής (αλλά ομόκεντρης της αρχικής) σφαίρας, ώστε να προκύπτει θόλος διπλού κελύφους. Οι δύο εφαρμογές συνεργάζονται, με την έννοια ότι οι πλακοστρώσεις που παράγει η TILES αναγνωρίζονται και χρησιμοποιούνται ως αφετηρία από την DOMES.

Ο κ. Νικολαΐδης έθεσε στη διάθεσή μου τις δύο αυτές εφαρμογές, οι οποίες αξιοποιήθηκαν ευρύτατα στην έρευνα των γεωμετρικών ιδιοτήτων των γεωδαιτικών θόλων, στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας και από την θέση αυτή θα ήθελα να τον ευχαριστήσω θερμά.

Η εργασία αυτή αποτελείται από μία εισαγωγή, από 5 κεφάλαια και από ένα παράρτημα. Στην εισαγωγή παρουσιάζεται η έννοια γεωδαιτικός θόλος και η γεωμετρική της περιγραφή. Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένες υφιστάμενες κατασκευές. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται η τυπολογία των γεωδαιτικών θόλων. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τεχνικές σχεδιασμού των γεωδαιτικών θόλων. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα σχεδιασμού γεωδαιτικών θόλων, με χρήση της εφαρμογής DOMES. Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται συμπεράσματα. Τέλος, στο παράρτημα παρουσιάζονται οι



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

κανονικές και ημικανονικές σφαιρικές πλακοστρώσεις και τα αντίστοιχά τους πολύεδρα.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## Abstract

The purpose of this work is to research the techniques of «triangulation» of the spherical surface, in the design of a geodesic dome this process is prerequisites. In addition the calculation of the necessary components (edges- rods, vertices-nodes) in number and in their other characteristics, that are needed for a geodesic dome to be constructed.

The impressive structures called geodesic domes, got my curiosity up due to their geometric structure and properties that define them and that is how my occupation with this project started. One of the rapporteurs, Mr. Panagiotis Nikolaidis, has dealt in the past with the geometry of the geodesic domes professionally. He has even developed the software applications TILES and DOMES. Both applications are written in Visual LISP language for the AutoCAD environment, and the objects that they produce are fully editable and utilizable.

The application TILES constructs all regular and semi-regular tessellations on the surface of the sphere, their duals and, if requested, the corresponding polyhedra. The application DOMES constructs geodesic domes of desired frequency, starting with any regular or semi-regular tessellation on the surface of the sphere. It also constructs, on request, the dual dome of the original, on the surface of the exact same or another (but concentric to the initial) sphere, such as a double-shell dome will be produced. These two applications work with each other, which means that DOMES can recognize and make use of the produced tessellations of TILES, as a starting point.

Mr. Nikolaidis gave me these two applications, which were widely utilized in the investigation of the geometric properties of geodesic domes as part of this work, and from this position I would like to warmly thank him.

This work consists of an introduction, of five chapters and of an appendix. The introduction presents the geodesic dome and its geometric description. The first chapter presents some existing structures. The second one presents the typology of geodesic domes. In the third chapter are presented the design techniques of the geodesic domes. In the fourth chapter are given examples about the design of the geodesic domes, by using the application DOMES. In the fifth chapter are presented the conclusions. Finally the appendix presents all spherical regular and semi-regular tessellations and the corresponding polyhedra.





# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχουν και άλλες εφαρμογές οι οποίες παράγουν γεωδαιτικούς θόλους, όπως για παράδειγμα το πρόγραμμα winDOME (<http://ir.lib.uth.gr/bitstream/handle/11615/13298/P0013298.pdf?sequence=1&isAllowed=y>).

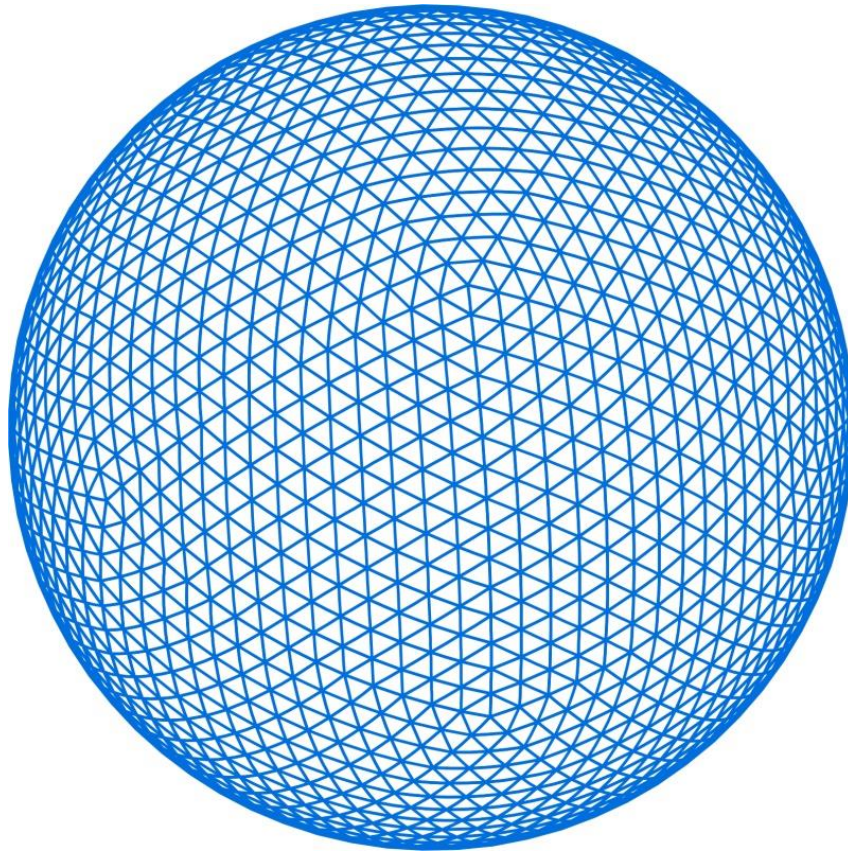
Ο λόγος για τον οποίο επέλεξα να χρησιμοποιήσω τις εφαρμογές λογισμικού TILES και DOMES είναι γιατί ήταν αρκετά δύσκολη η εύρεση άλλων εφαρμογών αλλά και γιατί οι εφαρμογές αυτές δεν διατίθενται δωρεάν. Ενώ τις εφαρμογές TILES και DOMES, αφενός μου τις διέθεσε ο κ. Νικολαΐδης δωρεάν, ούτως ώστε να υλοποιήσω την πτυχιακή μου εργασία, αφετέρου υπήρξε μια «εκπαίδευση» στη χρήση τους η οποία απεδείχθη πολύτιμη.

Γεωδαιτικός θόλος είναι ένα χωροδικτύωμα, το οποίο βασίζεται σε ένα δίκτυο μεγίστων κύκλων στην επιφάνεια μιας σφαίρας ή ενός τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας. Οι μέγιστοι κύκλοι (γεωδαιτικές γραμμές) της σφαίρας διασταυρώνονται για να σχηματίσουν ένα σύμπλεγμα σφαιρικών τριγώνων, τα οποία με τη σειρά τους θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι συνθέτουν τη σφαιρική επιφάνεια. Στις κορυφές αυτού του συμπλέγματος σφαιρικών τριγώνων τοποθετούνται κόμβοι διαφόρων τύπων, οι οποίοι συνδέουν μεταλλικές ράβδους. Οι ράβδοι υλοποιούν τις χορδές των τόξων μεγίστων κύκλων που συμβάλλουν στην αντίστοιχη κορυφή και συνδέουν εκάστη κορυφή με τις γειτονικές της. Με αυτό τον τρόπο συντίθεται ο θόλος.

Οι ράβδοι αυτών των χωροδικτυωμάτων θεωρείται ότι συνδέονται αρθρωτά στους κόμβους, ώστε να μεταφέρουν τα φορτία αποκλειστικά μέσω αξονικών δυνάμεων, ενώ τα τρίγωνα επιδρούν θετικά πάνω στον θόλο δίνοντάς του ακαμψία. Οι κατασκευές που προκύπτουν είναι εξαιρετικά ανθεκτικές. Όσο πιο πυκνό είναι το σύμπλεγμα των τριγώνων, τόσο περισσότερο ο θόλος προσεγγίζει τη μορφή της σφαίρας (Εικόνα 1).



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 1 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: ΥΠΑΡΧΟΝΤΕΣ ΘΟΛΟΙ

Θα περιγράψουμε με συντομία μερικούς υπάρχοντες γεωδαιτικούς θόλους.

1. Ο γεωδαιτικός θόλος του Buckminster Fuller (1895-1983). Είναι από τους πιο διάσημους γεωδαιτικούς θόλους και κατασκευάστηκε για να αποτελέσει το περίπτερο των ΗΠΑ στη διεθνή έκθεση του Montreal το 1967 (Εικόνες 2-3). Πρόκειται για θόλο τριών τετάρτων μιας σφαίρας διαμέτρου 76 μέτρων ([https://en.wikipedia.org/wiki/Montreal\\_Biosph%C3%A8re](https://en.wikipedia.org/wiki/Montreal_Biosph%C3%A8re)). Είναι θόλος διπλού κελύφους, κατασκευασμένος από χαλύβδινες ράβδους. Το εξωτερικό του κέλυφος συντίθεται από τρίγωνα και το εσωτερικό από εξάγωνα. Στις 20 Μαΐου 1976 και κατά την διάρκεια επισκευών, ο θόλος αυτός τυλίχθηκε στις φλόγες, με αποτέλεσμα να καεί το πλαστικό του περίβλημα (Εικόνα 4). Ύστερα από το γεγονός αυτό, η περιοχή παρέμεινε κλειστή μέχρι το 1990. Από το 1995 έως και σήμερα, η κατασκευή αυτή χρησιμοποιείται ως μουσείο.

Διαπιστώνουμε ότι ο θόλος ουσιαστικά δεν υπέστη σοβαρές ζημιές από την πυρκαγιά, επομένως μπορούμε να πούμε ότι οι γεωδαιτικοί θόλοι έχουν μεγαλύτερη αντίσταση στη φωτιά απ' ό,τι άλλες κατασκευές.



Εικόνα 2 (<http://photocamel.com/forum/architecture-cityscapes/101501-geodesic-dome-us-pavillion.html>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 3 (<http://photocamel.com/forum/architecture-cityscapes/101501-geodesic-dome-us-pavillion.html>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 4 (<http://hearthisyoucreators.blogspot.gr/2012/10/geometric-structures-at-montreal-expo-67.html>)

2. Θερμοκήπιο Climatron στο Missouri Botanical Gardens, στις ΗΠΑ, που σχεδιάστηκε από τους αρχιτέκτονες της St. Louis, Murphy και Mackey. Η κατασκευή του ολοκληρώθηκε το 1960 (<http://www.missouribotanicalgarden.org/gardens-gardening/our-garden/gardens-conservatories/conservatories/climatron.aspx>) (Εικόνα 5). Φαίνεται ότι πρόκειται για θόλο τριπλού κελύφους, ο οποίος είναι κατασκευασμένος από αλουμίνιο. Η κατασκευή αυτή είναι διαμέτρου 53 μέτρων και ύψους 21 μέτρων. Το θερμοκήπιο παρέμεινε κλειστό για επισκευές από το 1988 έως το 1990.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

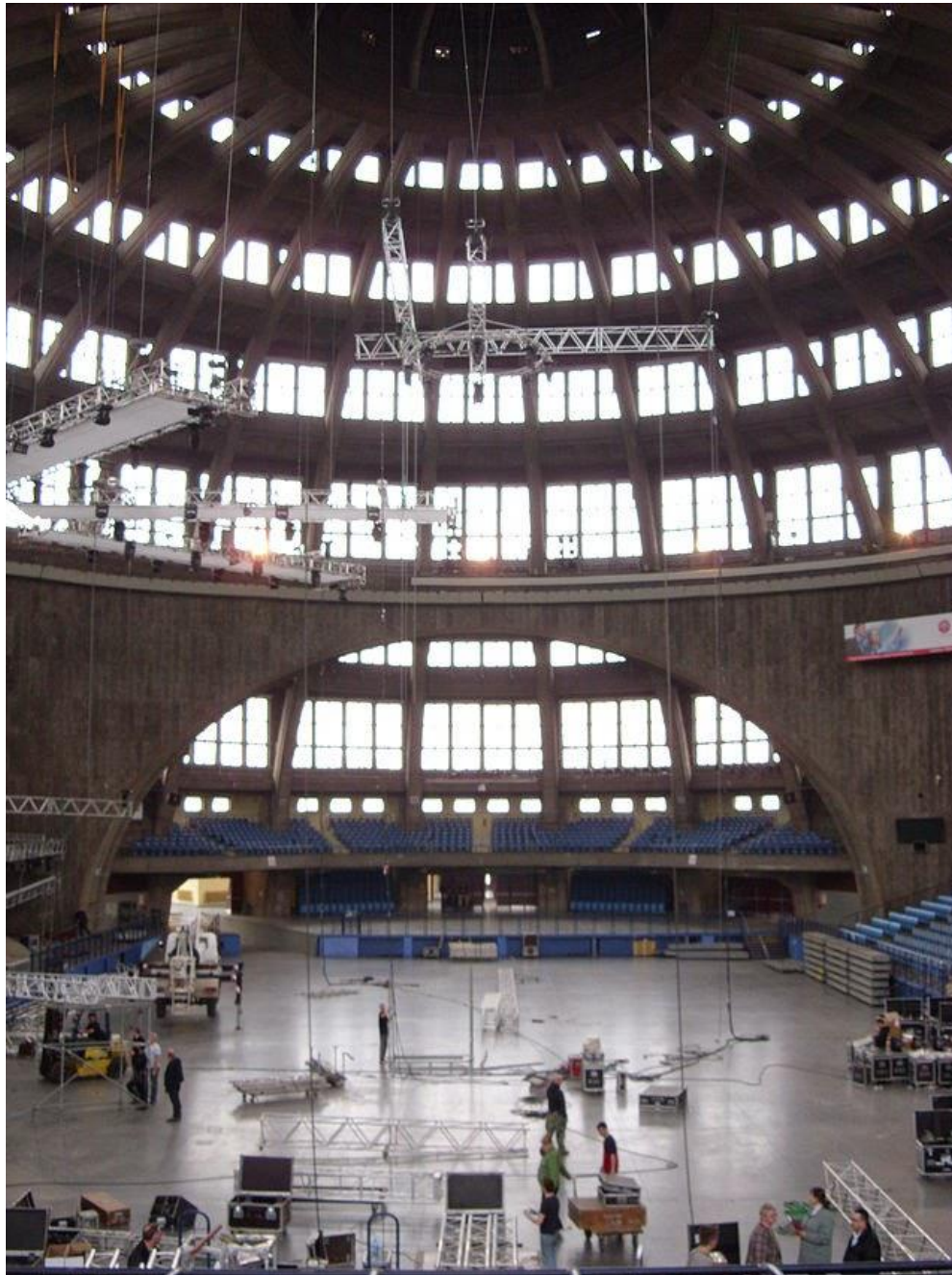


Εικόνα 5 (<https://www.flickr.com/photos/mbgarchives/4464331181/>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

3. Οι γεωδαιτικοί θόλοι κατασκευάζονται κατά κανόνα από μεταλλικές ράβδους. Υπάρχουν όμως και παραδείγματα θόλων από οπλισμένο σκυρόδεμα. Ένας από τους πρώτους είναι ο διάσημος θόλος που κτίστηκε το 1911-1913 και ονομάζεται Αίθουσα της Εκατονταετίας (Εικόνα 6). Βρίσκεται στο Wroclaw της Πολωνίας, σχεδιάστηκε από τον Max Berg, και κατασκευάστηκε από οπλισμένο σκυρόδεμα. Καλύπτει μια περιοχή 65 μέτρων σε διάμετρο και από το 2006 ανήκει στα μνημεία της διεθνούς πολιτιστικής κληρονομιάς της UNESCO.



Εικόνα 6 (<http://unescopireas.gr/2010/05/20/mnimeia-politistikis-klironomias-diethnos/>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

4. Υπάρχουν και παραδείγματα θόλων με βασικό υλικό το ξύλο. Το σπίτι αυτό του Kevin Shea (Εικόνα 7), κατασκευασμένο από ξύλο, βρίσκεται στο Long Island της Νέας Υόρκης (<http://inhabitat.com/nyc/long-island-green-dome-is-the-worlds-largest-wooden-residential-dome/>). Είναι ύψους 13,70 μέτρων και υποτίθεται πως είναι ο μεγαλύτερος γεωδαιτικός θόλος του κόσμου με χρήση κατοικίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι λειτουργεί με ηλιακή, γεωθερμική και αιολική ενέργεια.



Εικόνα 7 (<http://inhabitat.com/nyc/long-island-green-dome-is-the-worlds-largest-wooden-residential-dome/>)

5. Στις Εικόνες 8-9 βλέπουμε κατοικία, η οποία περικλείεται από γεωδαιτικό θόλο, κατασκευασμένο από αλουμίνιο και γυαλί (<http://inhabitat.com/gorgeous-solar-geodesic-eco-dome-crowns-cob-house-in-the-arctic-circle/>). Βρίσκεται στο νησί Sandhornøga της βόρειας Νορβηγίας και η κατασκευή του ολοκληρώθηκε μόλις μέσα σε 3 εβδομάδες, τον Αύγουστο του 2012, από την εταιρεία Solardome Industries. Ο θόλος, εκτός από την ικανότητά του να αντέχει στη χιονόπτωση, στις ακραίες θερμοκρασίες της Αρκτικής και στους ανέμους, είναι και φιλικός προς το περιβάλλον, γιατί περιλαμβάνει μια τεχνολογία ηλιακών πάνελ και ανακυκλώσιμων δομικών υλικών.





# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 8 (<http://inhabitat.com/gorgeous-solar-geodesic-eco-dome-crowns-cob-house-in-the-arctic-circle/>)



Εικόνα 9 (<http://inhabitat.com/gorgeous-solar-geodesic-eco-dome-crowns-cob-house-in-the-arctic-circle/>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

6. Γεωδαιτικός θόλος στην πλατεία Δημοκρατίας στο Περιστερί (<http://www.ametro.gr/page/default.asp?la=1&id=38&pl=4953&pk=169&ap=261>), κατασκευασμένος από μεταλλικές ράβδους και γυαλί (Εικόνες 10-11). Ο θόλος είναι ελάχιστα μικρότερος από ημισφαίριο και στη βάση του έχει διάμετρο 14 μέτρων. Η κατασκευή ολοκληρώθηκε το 2010 και σκοπός της, εκτός του αισθητικού της ενδιαφέροντος, είναι να φωτίζει το σταθμό μετρό του Περιστερίου. Είναι εντυπωσιακή η θέα του θόλου από τον κεντρικό χώρο του σταθμού (Εικόνες 12-13).



Εικόνα 10 (φωτογραφία Μ. Θεοδωροπούλου)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 11 (Φωτογραφία Μ. Θεοδοροπούλου)



Εικόνα 12 (Φωτογραφία Μ. Θεοδοροπούλου)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 13 (Φωτογραφία Μ. Θεοδοροπούλου)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

7. Ο New Orleans Superdome είναι ο μεγαλύτερος παγκοσμίως θόλος με μια διάμετρο 213 μέτρων (Εικόνες 14-15). Βρίσκεται στην Νέα Ορλεάνη των Ηνωμένων Πολιτειών και έχει σχεδιαστεί από το αρχιτεκτονικό γραφείο Curtis and Davis, το 1967 (<https://en.wikipedia.org/wiki/Superdome>). Σκοπός του θόλου ήταν να φιλοξενεί διάφορες εκδηλώσεις, όπως για παράδειγμα αθλητικές. Το 2005 ήρθε αντιμέτωπος με τον τυφώνα Katrina, με αποτέλεσμα να υποστεί βλάβες, χωρίς ωστόσο να καταρρεύσει. Οι επισκευές του είχαν ολοκληρωθεί μέσα σε ένα χρόνο.



Εικόνα 14 (<http://wno.org/post/new-orleans-superdome-symbol-citys-spirit>)



Εικόνα 15 (<http://www.destination360.com/north-america/us/louisiana/new-orleans/superdome>)



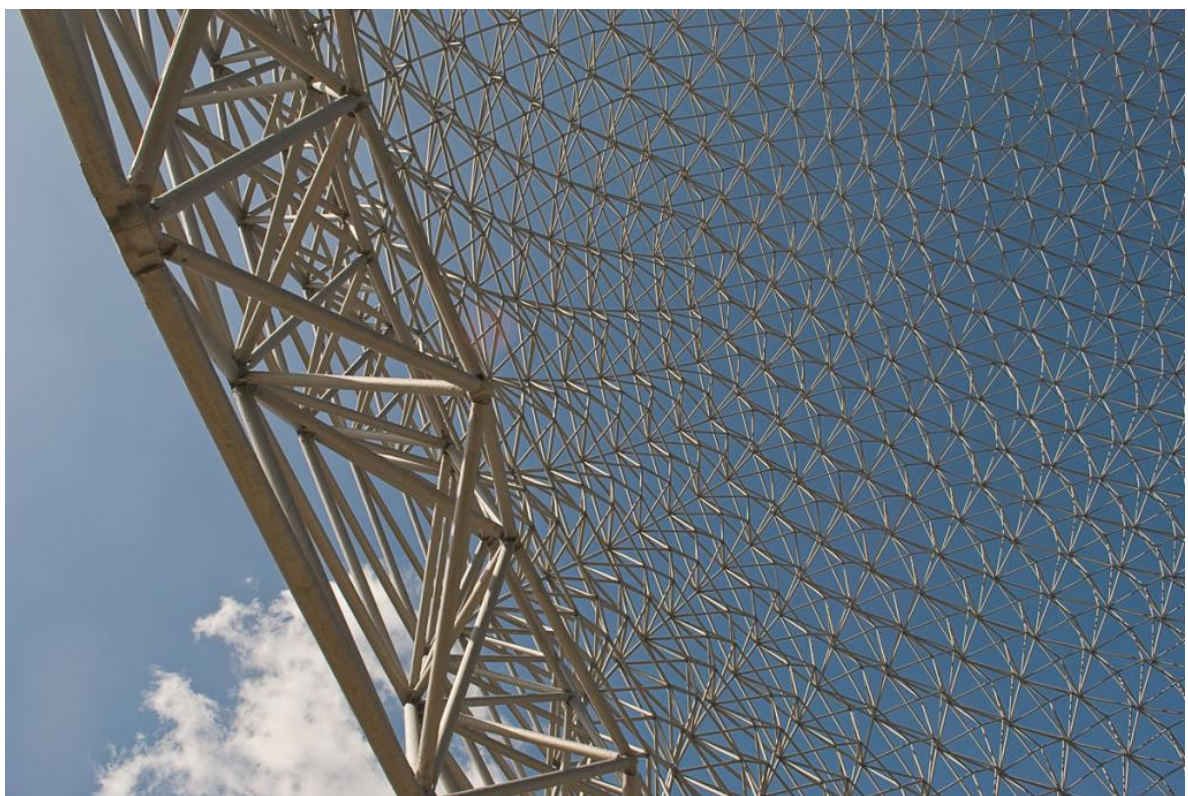
# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## Κεφάλαιο 2ο: ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΘΟΛΩΝ

Με βάση διαφορετικά κριτήρια, οι γεωδαιτικοί θόλοι μπορεί να ταξινομηθούν με διαφορετικούς τρόπους.

**1.** Συνήθως οι ράβδοι που συνθέτουν ένα γεωδαιτικό θόλο διατάσσονται κατά μήκος γεωδαιτικών γραμμών, δηλαδή διαδρομών μεγίστων κύκλων. Αλλά έχουν κατασκευαστεί μικροί γεωδαιτικοί θόλοι, πολλές από τις ράβδους των οποίων ακολουθούν διαδρομές παραλλήλων κύκλων. Χαρακτηριστική περίπτωση αυτού του τύπου είναι ο θόλος του σταθμού του Μετρό στο Περιστέρι (Εικόνες 10-13). Λόγω του μικρού τους μεγέθους, οι θόλοι αυτοί είναι συνήθως μονού κελύφους.

**2.** Μονού κελύφους είναι συχνά και ορισμένοι μέσου ή μεγάλου μεγέθους θόλοι. Προκύπτουν από ορισμένο «τριγωνισμό» της σφαιρικής επιφανείας, με χρήση τεχνικών οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω. Οι μεγάλοι γεωδαιτικοί θόλοι είναι συνήθως διπλού ή και πολλαπλού κελύφους. Ο γεωδαιτικός θόλος του Buckminster Fuller στο Montreal (Εικόνες 16-17) είναι διπλού κελύφους, ενώ εκείνος του θερμοκηπίου Climatron στο Missouri (Εικόνα 5) είναι πολλαπλού κελύφους.



Εικόνα 16 (<http://photocamel.com/forum/architecture-cityscapes/101501-geodesic-dome-us-pavillion.html>)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων



Εικόνα 17 (<http://photocamel.com/forum/architecture-cityscapes/101501-geodesic-dome-us-pavillion.html>)

**3.** Οι γεωδαιτικοί θόλοι στεγάζουν χώρους ανθρωπίνων δραστηριοτήτων, επομένως δεν πρόκειται για πλήρεις αιωρούμενες σφαίρες. Με κριτήριο το ποσοστό της σφαιρικής επιφάνειας που αξιοποιούν, ταξινομούνται σε θόλους ενός τετάρτου (Εικόνα 5) και τριών τετάρτων (Εικόνες 2-3).

**4.** Μια άλλη ταξινόμηση προκύπτει με κριτήριο την «πλακόστρωση» αφετηρίας. Η ταξινόμηση αυτή έχει να κάνει με το αν ξεκινάμε από την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσάεδρο, η οποία είναι η συνήθης περίπτωση, ή από την πλακόστρωση που αντιστοιχεί σε κάποιο άλλο κανονικό ή ημικανονικό πολύεδρο. Στα επόμενα θα δώσουμε παραδείγματα και της συνήθους αλλά και άλλων περιπτώσεων.

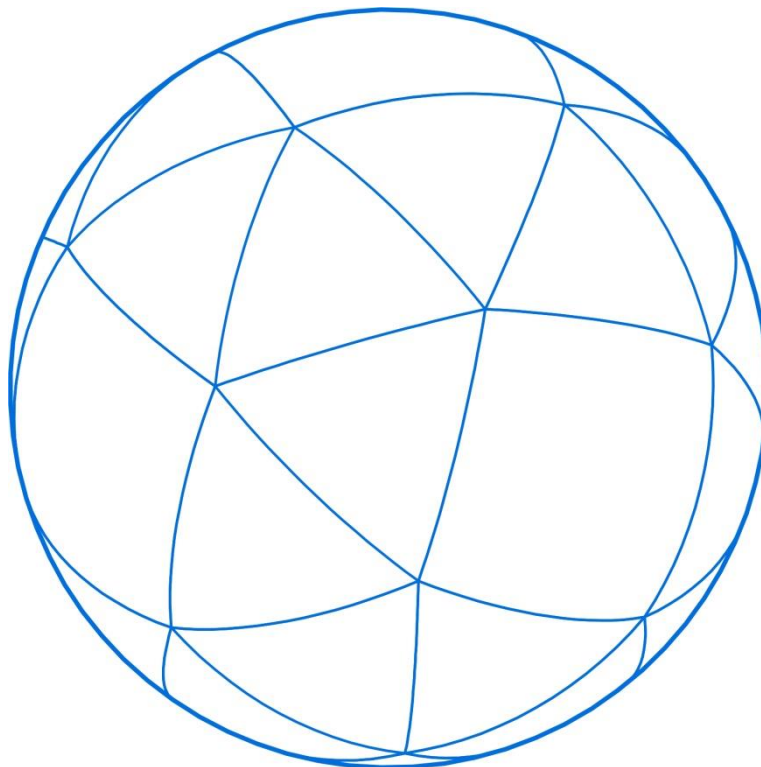


# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## Κεφάλαιο 3ο: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΥ ΘΟΛΟΥ

### Σφαιρικές πλακοστρώσεις και πολύεδρα

Οι γεωδαιτικοί θόλοι μπορούν να θεωρηθούν εφαρμογές των πλακοστρώσεων στην επιφάνεια της σφαίρας. Ο όρος *πλακόστρωση* (tessellation) έχει να κάνει με το διαμερισμό μιας επιφάνειας σε ένα σύνολο χωρίων, τα οποία καλύπτουν την επιφάνεια αυτή χωρίς κενά. Τα χωρία αυτά, τα οποία συνθέτουν την πλακόστρωση, θα τα ονομάζουμε *πλακίδια* (tiles) ή *έδρες* (faces) της πλακόστρωσης (Εικόνα 18).



Εικόνα 18 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής TILES)

Θα ασχοληθούμε με πλακοστρώσεις στην επιφάνεια της σφαίρας, των οποίων τα πλακίδια είναι κανονικά και κυρτά σφαιρικά πολύγωνα. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα ένας τύπος πλακοστρώσεων στην επιφάνεια της σφαίρας, οι οποίες ονομάζονται *πλευρά-με-πλευρά* πλακοστρώσεις και διαθέτουν την εξής ιδιότητα: Για κάθε δύο τυχόντα πλακίδια της πλακόστρωσης ισχύει μόνο μία από τις παρακάτω τρεις σχέσεις:

- A) Τα πλακίδια έχουν κοινή κορυφή.
- B) Τα πλακίδια έχουν κοινή πλευρά.
- Γ) Τα πλακίδια δεν έχουν κοινό σημείο.





# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

Για τις πλευρά-με-πλευρά πλακοστρώσεις του είδους που μας ενδιαφέρει ισχύουν και οι εξής ιδιότητες. Επειδή τα πλακίδια τους είναι κυρτά, κάθε κορυφή πλακιδίου είναι και κορυφή τουλάχιστον δύο ακόμα πλακιδίων. Τις κορυφές των πλακιδίων θα τις θεωρούμε και *κορυφές* (vertices) της πλακόστρωσης. Επίσης, κάθε πλευρά πλακιδίου είναι κοινή πλευρά αυτού του πλακιδίου και ενός και μόνο γειτονικού του. Τις πλευρές των πλακιδίων θα τις ονομάζουμε και *ακμές* (edges) της πλακόστρωσης – πρόκειται για τόξα μεγίστων κύκλων της σφαίρας.

Θεωρούμε μία πλευρά-με-πλευρά πλακόστρωση στην επιφάνεια της σφαίρας, αποτελούμενη από κανονικά σφαιρικά πολύγωνα. Επειδή οι κορυφές κάθε σφαιρικού κανονικού πολυγώνου είναι συνεπίπεδες, αποτελούν κορυφές ενός επίπεδου κανονικού πολυγώνου. Τα επίπεδα αυτά πολύγωνα είναι οι *έδρες* ενός πολυέδρου *εγγεγραμμένου* στη σφαίρα. Οι κορυφές του πολυέδρου συμπίπτουν με τις κορυφές της πλακόστρωσης, ενώ οι ακμές του είναι οι χορδές των ακμών της πλακόστρωσης.

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε πλευρά-με-πλευρά πλακόστρωση στην επιφάνεια της σφαίρας, αποτελούμενη από κανονικά σφαιρικά πολύγωνα, υπάρχει και ένα αντίστοιχο της πολυέδρου, του οποίου οι έδρες είναι κανονικά (επίπεδα) πολύγωνα. Από την πλακόστρωση μεταβαίνουμε στο πολυέδρου με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Αντιστρόφως, αν δοθεί το πολυέδρου, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε την πλακόστρωση ως εξής: Θεωρούμε την περιγεγραμμένη στο πολυέδρου σφαίρα ή οποιαδήποτε ομόκεντρή της. Από το κέντρο της σφαίρας προβάλλουμε τις έδρες του πολυέδρου στην επιφάνειά της (ακτινική προβολή). Κάθε έδρα του πολυέδρου προβάλλεται σε ένα κανονικό σφαιρικό πολύγωνα. Το σύνολο των πολυγώνων που προκύπτουν συνθέτει την αντίστοιχη του πολυέδρου πλακόστρωση.

Στα επόμενα, θα περιοριστούμε σε ένα υποσύνολο των σφαιρικών, κυρτών και πλευρά-με-πλευρά πλακοστρώσεων: στις *κανονικές* και *ημικανονικές* σφαιρικές πλακοστρώσεις και στα αντίστοιχά τους *κανονικά* και *ημικανονικά* πολυέδρα. Κανονικά είναι τα πολυέδρα των οποίων οι έδρες είναι κανονικά πολύγωνα του αυτού τύπου, ενώ οι στερεές γωνίες στις κορυφές τους είναι κανονικές και ίσες. Οι αντίστοιχές τους πλακοστρώσεις είναι επίσης κανονικές.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

Ημικανονικά είναι τα πολύεδρα των οποίων οι έδρες είναι κανονικά πολύγωνα, όχι του ίδιου τύπου, ενώ οι στερεές γωνίες στις κορυφές τους είναι ίσες<sup>1</sup>. Οι αντίστοιχές τους πλακοστρώσεις ονομάζονται επίσης ημικανονικές.

Είναι γνωστό, ότι τα κυρτά κανονικά πολύεδρα είναι πέντε, γνωστά από την αρχαιότητα, που στις μέρες μας αναφέρονται και ως *πλατωνικά*. Υπάρχουν επίσης 13 ημικανονικά, που αναφέρονται και ως *αρχιμήδεια* καθώς ανακαλύφθηκαν από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.). Αιώνες μετά τον Αρχιμήδη ο Kepler (1571-1630) πρόσθεσε στην ομάδα και τις απειρομελείς οικογένειες των *πρισμάτων* και *αντιπρισμάτων* (Πίνακας 1). Έχει αποδειχθεί ότι πέραν αυτών δεν υπάρχουν άλλα κυρτά κανονικά ή ημικανονικά πολύεδρα.

Ως συνέπεια αυτού του γεγονότος καθώς και του διπλού γεωμετρικού μηχανισμού παραγωγής πλακοστρώσεων από κυρτά κανονικά ή ημικανονικά πολύεδρα και αντιστρόφως, βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι μόνες εφικτές κυρτές κανονικές ή ημικανονικές πλακοστρώσεις στην επιφάνεια της σφαίρας είναι είκοσι: Οι πέντε είναι κανονικές και αντιστοιχούν στα πέντε πλατωνικά πολυέδρα, οι δεκατρείς ημικανονικές και αντιστοιχούν στα δεκατρία αρχιμήδεια πολυέδρα, και ακολουθούν οι δύο ομάδες πλακοστρώσεων που αντιστοιχούν στα ημικανονικά πρίσματα και αντι-πρίσματα.

---

<sup>1</sup> Για να χαρακτηριστεί ένα πολύεδρο ημικανονικό, απαιτείται να ισχύει και ένα τρίτο κριτήριο, το οποίο συχνά παραλείπεται στη βιβλιογραφία: Να υπάρχει μετασχηματισμός, ο οποίος να μετασχηματίζει τυχούσα κορυφή του πολυέδρου σε τυχούσα άλλη, ενώ το πολύεδρο να παραμένει αναλλοίωτο ως όλο. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται ως *μεταθετότητα κορυφών* (vertex transitivity). Την ισχύ του τρίτου κριτηρίου επέβαλε η ανακάλυψη του λεγόμενου *στερεού του Miller*, το οποίο, ενώ ως προς τις δύο πρώτες ιδιότητες ταυτίζεται με το Ρομβο-κυβοκτάεδρο (Πίνακας 1), δεν ικανοποιεί την τρίτη (Cromwell 1997, pp. 89-91, Martin 1982, pp. 208-209). Τα πολύεδρα που διαθέτουν μεταθετότητα κορυφών αναφέρονται ως *ομαλά* (uniform).



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## «Τριγωνισμός» σφαιρικού πολυγώνου

Διαπιστώσαμε ότι μεταξύ των κυρτών κανονικών ή ημικανονικών πολυέδρων και των κυρτών κανονικών ή ημικανονικών πλακοστρώσεων στην επιφάνεια της σφαίρας υπάρχει μία σαφής σχέση, ώστε αν δοθεί η πλακόστρωση να ορίζεται το πολύεδρο και αντιστρόφως. Με δεδομένη αυτή τη σχέση και από γεωμετρική άποψη, θα επιχειρήσουμε μια προσέγγιση στους γεωδαιτικούς θόλους. Ως αφετηρία για το γεωμετρικό ορισμό ενός γεωδαιτικού θόλου μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε σφαιρική, κυρτή, κανονική ή ημικανονική πλακόστρωση, αλλά συνήθως χρησιμοποιείται εκείνη που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσάεδρο (Εικόνα 19).



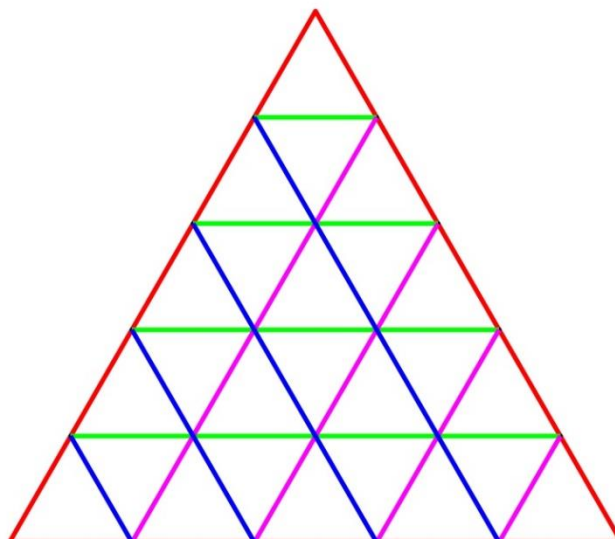
Εικόνα 19 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής TILES)

Αυτό γίνεται διότι αποτελεί τον πυκνότερο από τους τρεις πλευρά-με-πλευρά διαμερισμούς της σφαιρικής επιφάνειας με διάταξη ισόπλευρων τριγωνικών πλακιδίων (οι άλλοι 2 αντιστοιχούν στο Κανονικό Τετράεδρο και στο Κανονικό Οκτάεδρο, με 4 και 8 ισόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα αντιστοίχως). Αλλά για σχετικά μεγάλους γεωδαιτικούς θόλους ο διαμερισμός αυτός δεν είναι αρκετά πυκνός, οπότε πρέπει να εφαρμοστεί ένας πρόσθετος τριγωνισμός για κάθε ένα από τα είκοσι τριγωνικά πλακίδια αφετηρίας. Το αποτέλεσμα αυτού του πρόσθετου τριγωνισμού δεν είναι προφανώς μια κανονική πλακόστρωση, ανεξάρτητα από την τεχνική που θα χρησιμοποιηθεί, αν και ορισμένα πλακίδια δεν αποκλείεται να είναι ισόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα. Για να εντοπίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην επιφάνεια της σφαίρας και στο επίπεδο, θα διαμερίσουμε ένα επίπεδο ισόπλευρο τρίγωνο σε μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα. Ένας τρόπος να το επιτύχουμε είναι ο εξής: Χρησιμοποιούμε τρεις ομάδες τεμνουσών. Κάθε μια από αυτές διαιρεί ένα ζεύγος πλευρών του τριγώνου σε  $n$  ίσα μέρη. Οι τέμνουσες μιας ομάδας είναι



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

παράλληλες μεταξύ τους και προς την τρίτη πλευρά. Διαπιστώνουμε ότι, αν μια τέμνουσα που ανήκει σε μια ομάδα συναντά τέμνουσα άλλης ομάδας, από το σημείο τομής διέρχεται και τέμνουσα της τρίτης ομάδας. Προκύπτει ένας διαμερισμός του αρχικού τριγώνου σε ισόπλευρα και ίσα μεταξύ τους τρίγωνα, πλήθους έστω  $N$  (Εικόνα 20).



Εικόνα 20 (Σχεδίαση Μ. Θεοδωροπούλου)

Προφανώς το πλήθος των τριγώνων που προκύπτει από το διαμερισμό είναι  $1+3+5+\dots$ . Πρόκειται για *αριθμητική πρόοδο* με πρώτο όρο το 1 και λόγο 2 (στην βιβλιογραφία ο λόγος μιας αριθμητικής προόδου αναφέρεται και ως *διαφορά*). Επομένως, το πλήθος  $N$  ισούται με το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, όπου  $n$  είναι το πλήθος των τμημάτων στα οποία διαιρείται η κάθε πλευρά του τριγώνου.

Με εφαρμογή του τύπου του αθροίσματος των  $n$  πρώτων όρων αριθμητικής προόδου (Ντζιώρας 1975, σελ. 180), έχουμε <sup>2</sup>:

$$N = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)\omega] = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο της Εικόνας 20 έχουμε επιλέξει  $n=5$ , επομένως παράγεται ένας διαμερισμός σε  $5^2 = 25$  ισόπλευρα τρίγωνα. Η παραπάνω τεχνική εφαρμόζεται ακόμη και αν το τρίγωνο αφετηρίας δεν είναι ισόπλευρο, αλλά τα  $n^2$  τρίγωνα που

---

<sup>2</sup> Για έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του πλήθους  $N$ , που βασίζεται σε σύγκριση εμβαδών, βλέπε Βενέρης 2011, σελ. 512.



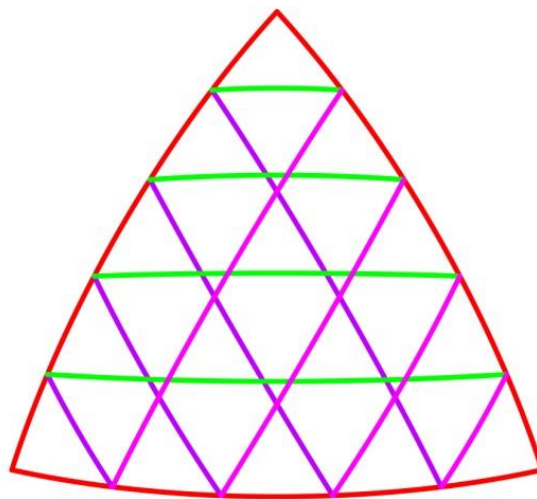
# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

προκύπτουν δεν είναι ισόπλευρα. Παραμένουν όμως ίσα μεταξύ τους και όμοια ως προς το αρχικό.

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια τεχνική με ένα ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, έστω το αντίστοιχο της έδρας του Κανονικού Εικοσαέδρου. Ο τρόπος για να πραγματοποιήσουμε κάτι τέτοιο είναι ο εξής:

Διαιρούμε τις πλευρές σε  $n$  ίσα μέρη και στη συνέχεια συνδέουμε τα αντίστοιχα σημεία με «κατάλληλες» τέμνουσες. Το  $n$ , στην ορολογία των γεωδαιτικών θόλων, αναφέρεται ως *συχνότητα* (frequency). Επειδή ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων της σφαιρικής επιφάνειας είναι το μικρότερο από τα τόξα μεγίστου κύκλου της σφαίρας που διέρχεται από τα σημεία αυτά, οι κατάλληλες τέμνουσες είναι τόξα μεγίστων κύκλων. Ο μέγιστος κύκλος είναι το αντίστοιχο της ευθείας στη σφαιρική επιφάνεια και είναι γνωστό ότι, για κάθε δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία στη επιφάνεια της σφαίρας, υπάρχει ένας και μόνο μέγιστος κύκλος που διέρχεται από αυτά.

Παρατηρούμε όμως ότι οι τέμνουσες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο (Εικόνα 21) και αυτό αποτελεί μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην επιφάνεια της σφαίρας και στο επίπεδο. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος έχουν προταθεί οι παρακάτω λύσεις.



Εικόνα 21 (Σχεδίαση Μ. Θεοδωροπούλου)

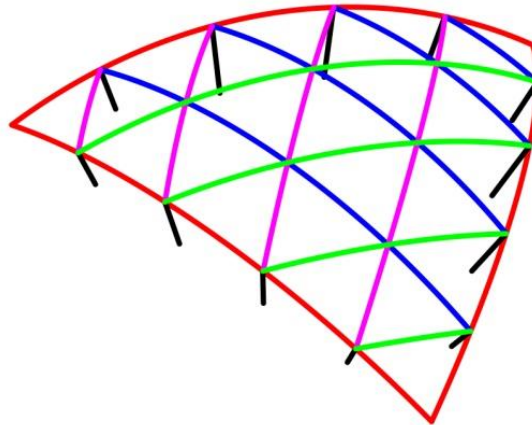
[1<sup>η</sup> Λύση \(πρβλ. Coxeter 1971, pp. 98-101\)](#)

Αρχίζουμε με το διαμερισμό του επίπεδου τριγώνου, έδρα του Κανονικού Εικοσαέδρου, σε  $n^2$  ισόπλευρα τρίγωνα. Έπειτα προβάλλουμε ακτινικά τον παραπάνω διαμερισμό στο σφαιρικό τρίγωνο. Οι  $3(n-1)$  τέμνουσες προβάλλονται σε τόξα μεγίστων κύκλων, τα οποία τέμνονται με τον προσδοκώμενο τρόπο, αλλά οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου δεν διαιρούνται σε ίσα μέρη (Εικόνα 22). Ακόμη, η



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

απόκλιση του μήκους των πλευρών των τριγώνων του διαμερισμού είναι μεγαλύτερη από το μέσο μήκος και αυξάνεται όσο αυξάνει η συχνότητα  $n$ .



Εικόνα 22 (Σχεδίαση Μ. Θεοδωροπούλου)

Ο H.S.M. Coxeter, στο άρθρο του *Virus Macromolecules and Geodesic Domes*, pp. 98-99, περιγράφει έναν υποθετικό τρόπο εργασίας εκ μέρους του B. Fuller. Γράφει ότι ο Fuller διαμερίζει ένα μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο σε μικρά ισόπλευρα τρίγωνα και επαναλαμβάνει αυτό το μοτίβο σε κάθε έδρα ενός Κανονικού Εικοσαέδρου. Στη συνέχεια μεταφέρει το επαναλαμβανόμενο μοτίβο με ακτινική προβολή στην επιφάνεια της περιγεγραμμένης σφαίρας<sup>3</sup>.

Αλλά σημειώνει (p. 106), ότι κατά δήλωση του Fuller (η οποία προφανώς ισχύει), δεν πρόκειται για ακτινική προβολή τριγωνικών εδρών διαμερισμένων σε ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, αλλά για ένα μετασχηματισμό ο οποίος εξασφαλίζει την ισότητα των τμημάτων, στα οποία διαιρούνται οι πλευρές των σφαιρικών τριγώνων της πλακόστρωσης που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσαέδρο.

Το πρόβλημα που προκύπτει με αυτή την τεχνική διαμερισμού, δηλαδή η μεγάλη απόκλιση του μήκους των πλευρών των σφαιρικών τριγώνων που προκύπτουν από το μέσο μήκος, είναι σημαντικό από στατική και από αισθητική σκοπιά. Ο τρόπος για να αμβλυνθεί αυτό το πρόβλημα είναι να επιμείνουμε στη διαίρεση των πλευρών των αρχικών σφαιρικών τριγώνων σε ίσα μέρη και να χρησιμοποιήσουμε ένα είδος «διόρθωσης», κατάλληλης δηλαδή αντικατάστασης με σημεία των μικρών σφαιρικών τριγώνων στην περιοχή συνάντησης των τεμνουσών.

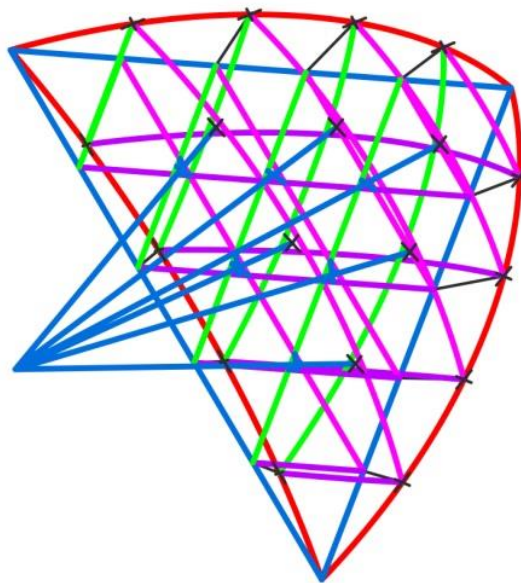
<sup>3</sup> Ο B. Fuller έχει ασχοληθεί και με τη χαρτογραφία, ακολουθώντας μια αντίστροφη τεχνική: Προβάλλει ακτινικά το ομοίωμα της υδρογείου στις έδρες ενός εγγεγραμμένου Κανονικού Εικοσαέδρου, στη συνέχεια κόβει το Εικοσαέδρο κατά μήκος ενός καταλλήλου συνόλου ακμών και αναπτύσσει την επιφάνειά του στο επίπεδο (Gardner 1975, pp. 123-124, Coxeter 1971, pp. 98-99)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

2<sup>η</sup> Λύση (Wenninger 1999, p. 92)

Ο M.J. Wenninger, επί της έδρας του Κανονικού Εικοσαέδρου, μετασχηματίζει τα μικρά σφαιρικά τρίγωνα σε επίπεδα, μέσω ακτινικής προβολής. Στη συνέχεια, βρίσκει τα κέντρα βάρους των επιπέδων τριγώνων και τα προβάλλει πάλι ακτινικά στην επιφάνεια της σφαίρας. Τα σημεία που προκύπτουν αντικαθιστούν τα σφαιρικά τρίγωνα (Εικόνα 23).



Εικόνα 23 (Σχεδίαση Μ. Θεοδοροπούλου)

3<sup>η</sup> Λύση (εφαρμογή DOMES)

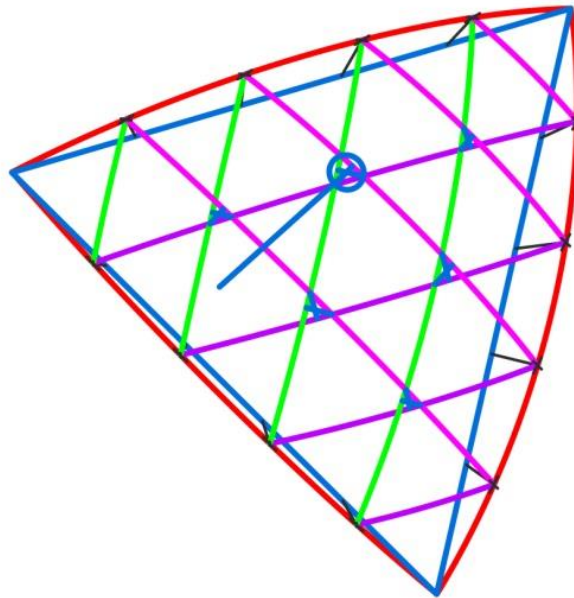
Η λύση είναι να παραμείνουμε στην επιφάνεια της σφαίρας και να αντικαταστήσουμε τα μικρά σφαιρικά τρίγωνα με το σημείο τομής των *διαμέσων* τους. Είναι γνωστό ότι οι διάμεσοι κάθε σφαιρικού τριγώνου, δηλαδή τα τόξα μεγίστων κύκλων, από τις κορυφές του στα μέσα των απέναντι πλευρών διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Η εφαρμογή DOMES χρησιμοποιεί την τελευταία αυτή μέθοδο «διόρθωσης». Η εφαρμογή ξεκινάει από τυχούσα κυρτή κανονική ή ημικανονική πλακόστρωση στην επιφάνεια της σφαίρας, όπως αυτή παράγεται από την εφαρμογή TILES. Η DOMES ελέγχει αρχικά αν υπάρχουν μη τριγωνικά πλακίδια. Αν υπάρχουν, τότε προχωρεί σε έναν πρώτο τριγωνισμό τους συνδέοντας το κέντρο καθενός με τις κορυφές του. Κατά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας η εφαρμογή έχει να διαχειριστεί ένα σύνολο σφαιρικών τριγώνων. Πρόκειται για ισόπλευρα τρίγωνα αν υπήρχαν στην αρχική πλακόστρωση, ή για ισοσκελή τρίγωνα αν προέκυψαν από τριγωνισμό άλλων σφαιρικών πολυγώνων. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα μέσω



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

διαλόγου να ορίζει την επιθυμητή συχνότητα και η εφαρμογή να προχωρεί στον τριγωνισμό των σφαιρικών τριγώνων και στην κατασκευή του γεωδαιτικού θόλου. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση τεμνουσών που διαιρούν τις πλευρές κάθε αρχικού σφαιρικού τριγώνου σε  $n$  ίσα μέρη. Η «διόρθωση» προκύπτει αντικαθιστώντας τα μικρά σφαιρικά τρίγωνα, στην περιοχή συνάντησης των τεμνουσών, με τα σημεία τομής των διαμέσων τους (Εικόνα 24).



Εικόνα 24 (Σχεδίαση Μ. Θεοδωροπούλου)

## «Δυϊκές» των σφαιρικών πλακοστρώσεων

Θεωρούμε τώρα τα κέντρα των εδρών που διατάσσονται περί μια κορυφή κυρτής, πλευρά-με-πλευρά πλακόστρωσης στην επιφάνεια της σφαίρας και κατασκευάζουμε κυρτό σφαιρικό πολύγωνο με κορυφές στα κέντρα αυτά. Αν αυτό επαναληφθεί σε κάθε κορυφή της πλακόστρωσης, προκύπτει μια νέα πλευρά-με-πλευρά πλακόστρωση, η οποία αναφέρεται ως η *δυϊκή* (dual) της αρχικής. Οι δύο πλακοστρώσεις σχετίζονται, με τρόπο ώστε κάθε έδρα της μιας να αντιστοιχεί σε κορυφή της άλλης.

Στην περίπτωση που η αρχική πλακόστρωση είναι κανονική, είναι και η δυϊκή της κανονική. Αν η αρχική πλακόστρωση δεν είναι κανονική ή ημικανονική, τότε δεν είναι μοναδικός ο τρόπος κατασκευής της δυϊκής της, επειδή τα μη κανονικά σφαιρικά πολύγωνα έχουν πολλών ειδών «κέντρα», επομένως στις πλακοστρώσεις αυτές αντιστοιχούν πολλών ειδών δυϊκές.

Κυρτές, πλευρά-με-πλευρά αλλά μη κανονικές ή ημικανονικές πλακοστρώσεις της σφαιρικής επιφάνειας είναι εκείνες που προκύπτουν με





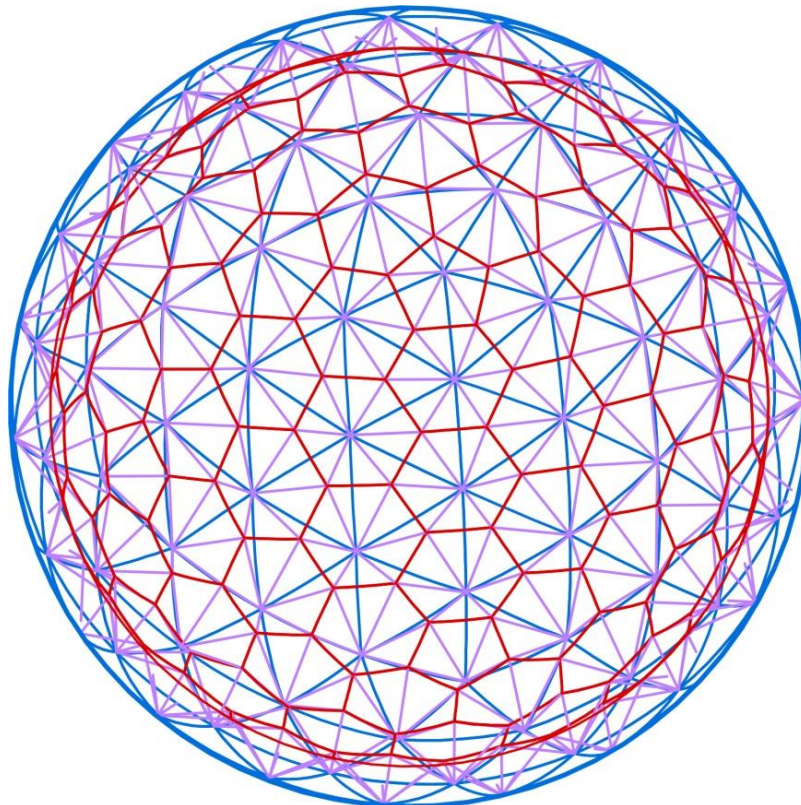
# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

«τριγωνισμό» των εδρών μιας κανονικής ή ημικανονικής πλακόστρωσης, ώστε να προκύψει ένας γεωδαιτικός θόλος. Η εφαρμογή DOMES κατασκευάζει τις δυϊκές αυτών των πλακοστρώσεων, θεωρώντας ως κέντρα των τριγωνικών πλακιδίων της τα σημεία τομής των διαμέσων τους.

Στους γεωδαιτικούς θόλους διπλού κελύφους, ως δεύτερο κέλυφος χρησιμοποιείται συνήθως η δυϊκή της αρχικής γεωδαιτικής σφαίρας, εφαρμοσμένη σε σφαίρα κατά τι μεγαλύτερης ή μικρότερης ακτίνας (Εικόνες 5,16).

Το χωροδικτύωμα που προκύπτει, με κατάλληλη σύνδεση των κόμβων των δύο σφαιρών, έχει σημαντικά υψηλότερη ακαμψία και αντοχή, σε σύγκριση με το αρχικό απλό κέλυφος.

Η εφαρμογή DOMES κατασκευάζει και θόλους διπλού κελύφους, αν ζητηθεί. Το δεύτερο κέλυφος αποτελείται από την δυϊκή της αρχικής πλακόστρωσης και εγγράφεται σε σφαίρα μεγαλύτερης ή μικρότερης ακτίνας, σύμφωνα με τις επιλογές του χρήστη. Τα δύο κελύφη συνδέονται με ράβδους με τον εξής τρόπο: Κάθε κορυφή της δυϊκής σφαίρας συνδέεται με τρεις ράβδους με τις τρεις κορυφές του τριγωνικού πλακιδίου στο οποίο αντιστοιχεί (Εικόνα 25 και Εικόνες 5,16).



Εικόνα 25 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ DOMES

Σε αυτή την ενότητα θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο γεωδαιτικών θόλων, με χρήση της εφαρμογής DOMES. Θα εργαστούμε στο σύνολο της σφαιρικής επιφανείας. Στην Εικόνα 26 βλέπουμε έναν γεωδαιτικό θόλο συχνότητας 6, όπως έχει παραχθεί από την εφαρμογή DOMES. Έχει ως αφετηρία την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσάεδρο. Η τελευταία αποτελείται από 20 σφαιρικά τρίγωνα. Επομένως το πλήθος, έστω  $F$ , των τριγωνικών πλακιδίων του θόλου είναι:

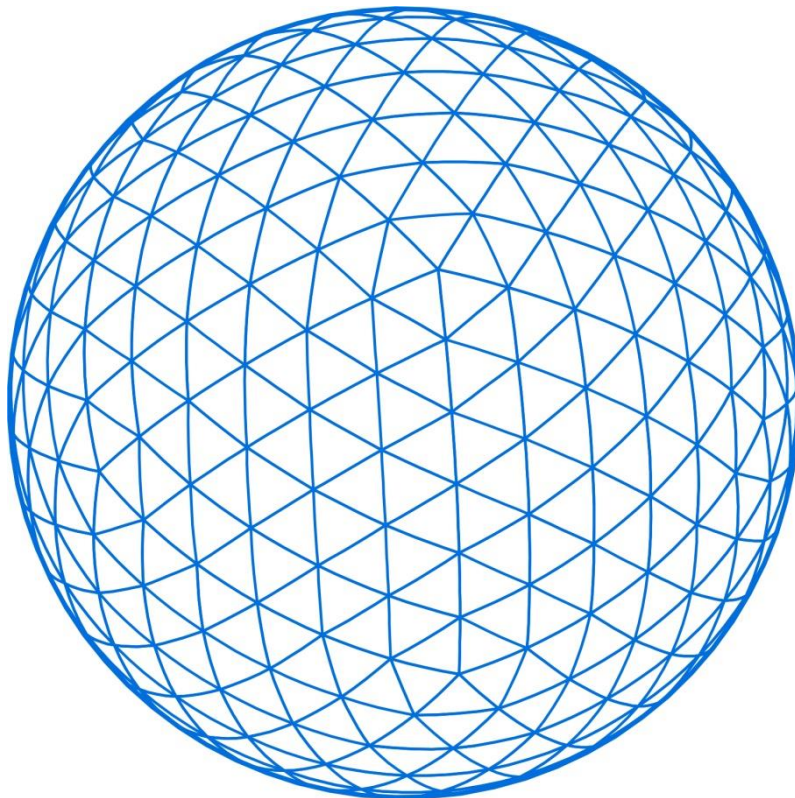
$$F = 20 \times 6^2 = 720$$

Θα υπολογίσουμε το πλήθος, έστω  $E$ , των ακμών των τριγωνικών πλακιδίων του θόλου. Σε κάθε πλακίδιο αντιστοιχούν τρεις ακμές. Επειδή όμως κάθε ακμή είναι κοινή δύο παρακειμένων πλακιδίων, το σύνολο των ακμών είναι προφανώς:

$$E = \frac{3F}{2} = \frac{3 \times 720}{2} = 1080$$

Το πλήθος, έστω  $V$ , των κορυφών της πλακόστρωσης είναι δυνατόν να υπολογιστεί με χρήση του τύπου του *Euler* (Πάμφιλος 2012, σελ. 456-457):  $V - E + F = 2$ .

$$V = E - F + 2 = \frac{3F}{2} - F + 2 = \frac{F}{2} + 2 = \frac{720}{2} + 2 = 362$$



Εικόνα 26 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

Στην Εικόνα 27 βλέπουμε τη γεωδαιτική σφαίρα τη δυϊκή εκείνης της Εικόνας 26. Αποτελείται από εξαγωνικά πλακίδια με εξαίρεση τα 12 πενταγωνικά πλακίδια που αντιστοιχούν στις κορυφές της αρχικής πλακόστρωσης, αυτής δηλαδή που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσάεδρο. Το πλήθος  $F$  των πλακιδίων στις δυϊκές αυτές γεωδαιτικές σφαίρες συμπίπτει με το πλήθος των κορυφών των κύριων πλακοστρώσεων, από τις οποίες και προέκυψαν, επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει:

$$F = 362$$

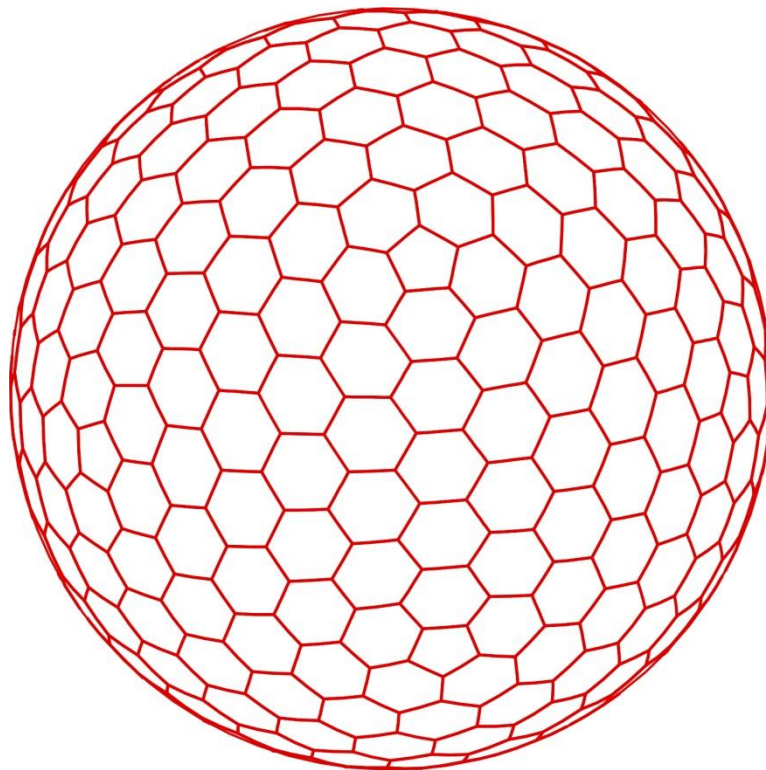
Από τις 362 έδρες, οι 12 είναι πενταγωνικές και οι υπόλοιπες 350 είναι εξαγωνικές. Το πλήθος  $E$  των ακμών είναι:

$$E = \frac{5 \times 12}{2} + \frac{6 \times 350}{2} = 1080$$

Το πλήθος των κορυφών, σύμφωνα με τον τύπο του Euler, είναι:

$$V = E - F + 2 = 1080 - 362 + 2 = 720$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα αναμενόμενα. Εξαιτίας του τρόπου κατασκευής της δυϊκής πλακόστρωσης, το πλήθος των εδρών της μιας σφαίρας συμπίπτει με το πλήθος των κορυφών της άλλης, ενώ οι δύο σφαίρες έχουν το αυτό πλήθος ακμών.

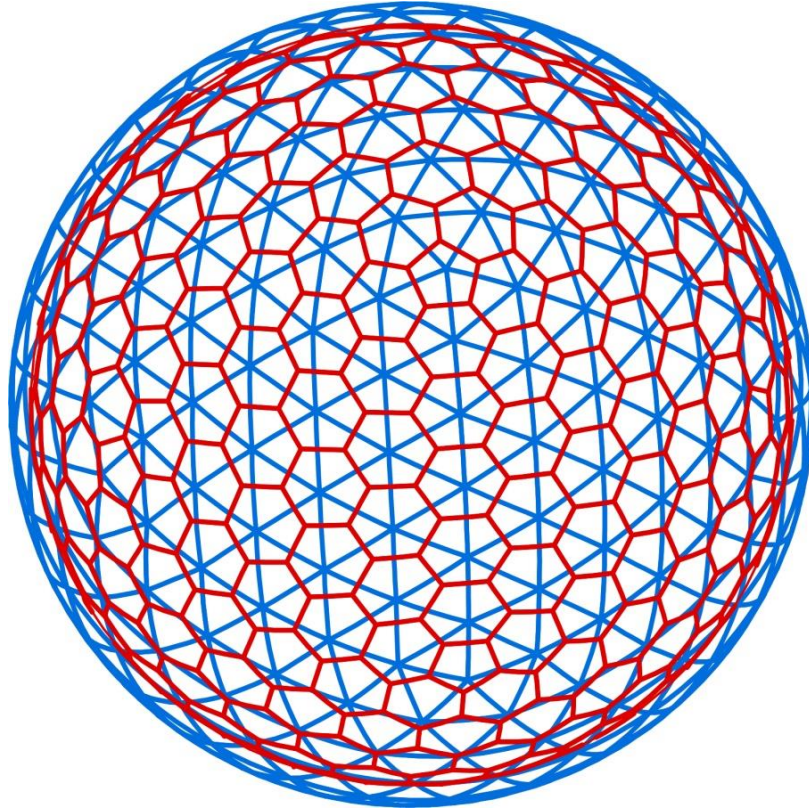


Εικόνα 27 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Ο θόλος της Εικόνας 28 έγινε με αφετηρία την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στο Κανονικό Εικοσάεδρο και έχει συχνότητα 6, αλλά αυτή τη φορά είναι διπλού κελύφους. Η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας είναι κατά 5% μικρότερη της ακτίνας της εξωτερικής.



Εικόνα 28 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)

Μια άλλη κατασκευή είναι ο θόλος της Εικόνας 29, συχνότητας 12, με αφετηρία την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στο Αμβλύ Δωδεκάεδρο (Πίνακας 1). Το Αμβλύ Δωδεκάεδρο διαθέτει 80 τριγωνικές και 12 πενταγωνικές έδρες (Πίνακας 2). Η εφαρμογή DOMES καλείται τώρα να εφαρμόσει έναν πρώτο τριγωνισμό στις πενταγωνικές έδρες. Από κάθε πενταγωνική έδρα θα προκύψουν 5 ισοσκελή σφαιρικά τρίγωνα, επομένως έχει να διαχειριστεί  $80 + 5 \times 12 = 140$  σφαιρικά τρίγωνα. Οι πλευρές των σφαιρικών τριγώνων θα διαιρεθούν σε 4 ίσα μέρη και το εσωτερικό τους θα διαμεριστεί κατά τα γνωστά.

Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο συχνότητα με μια ευρύτερη έννοια, ως το ελάχιστο πλήθος δηλαδή βημάτων από μια πενταμερή κορυφή έως μια άλλη πενταμερή κορυφή. Προκύπτουν σφαιρικά τρίγωνα πλήθους  $F$  όπου:

$$F = 140 \times 4^2 = 2240$$

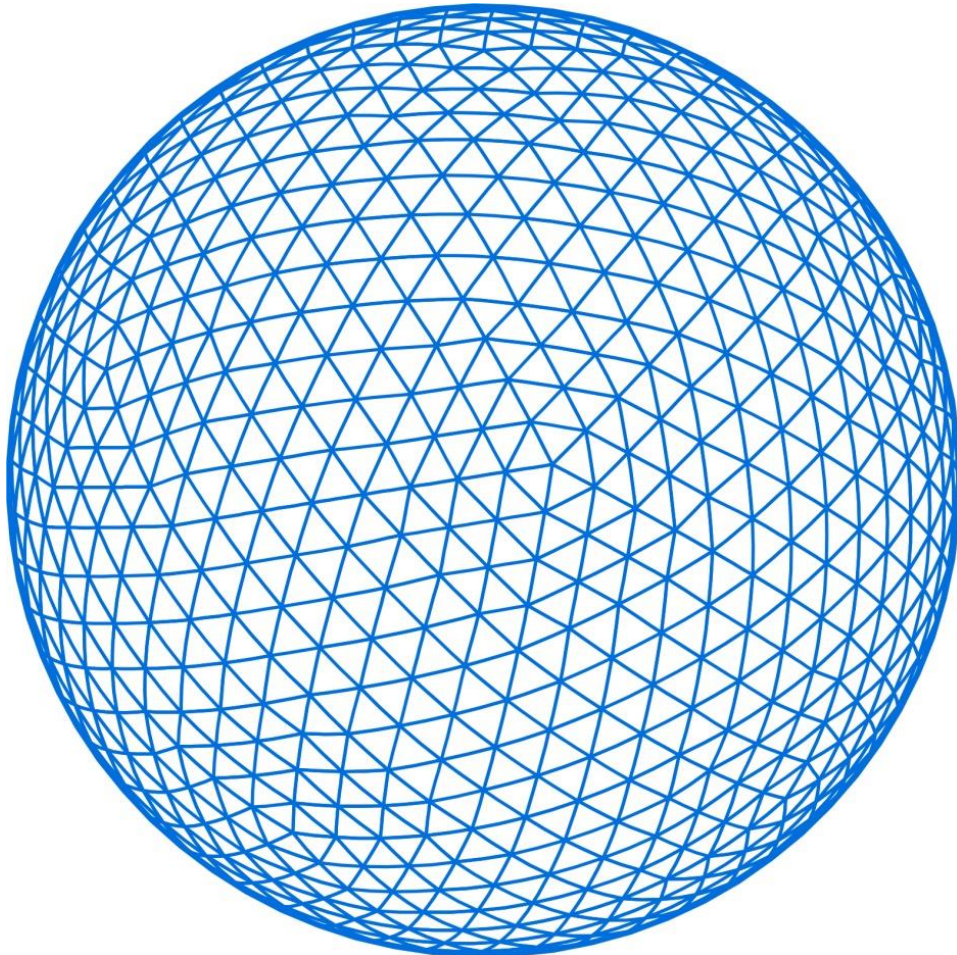


# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Θα υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο, όπως και παραπάνω, το πλήθος  $E$  των ακμών και το πλήθος  $V$  των κορυφών της πλακόστρωσης. Θα έχουμε:

$$E = \frac{3F}{2} = \frac{3 \times 2240}{2} = 3360$$

$$V = \frac{F}{2} + 2 = \frac{2240}{2} + 2 = 1122$$



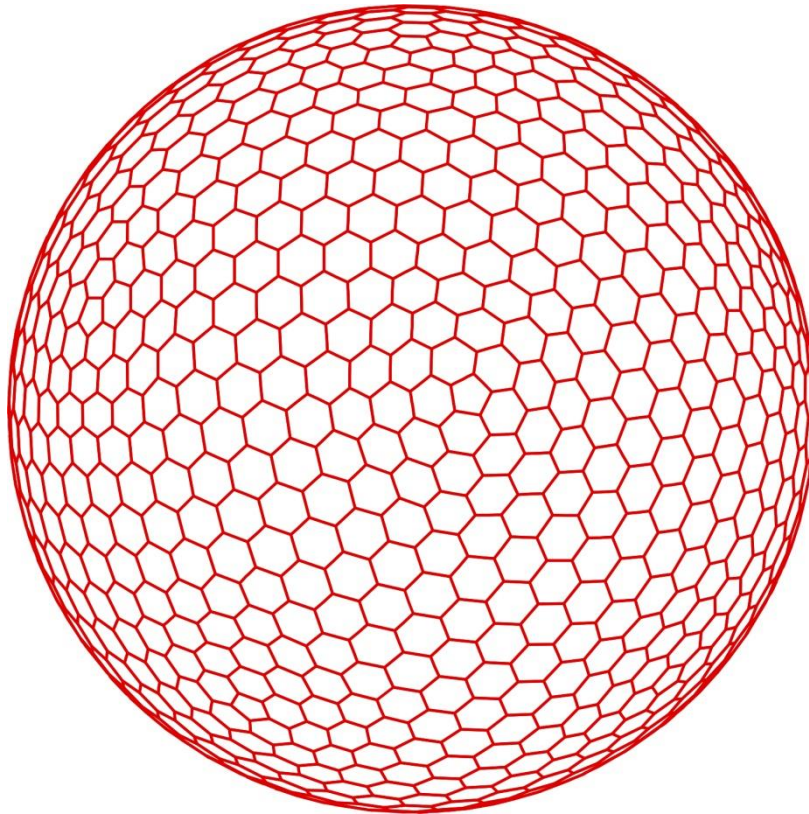
Εικόνα 29 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

Στην Εικόνα 30 βλέπουμε τον δυϊκό του θόλου της Εικόνας 29. Αποτελείται από σφαιρικά εξάγωνα, όχι εν γένει κανονικά, με εξαίρεση 12 πλακίδια, τα οποία είναι κανονικά σφαιρικά πεντάγωνα και αντιστοιχούν στα κέντρα των πενταγωνικών εδρών της αρχικής πλακόστρωσης. Και πάλι, αν  $V$  το πλήθος των κορυφών,  $E$  το πλήθος των ακμών και  $F$  το πλήθος των εδρών της κύριας πλακόστρωσης, η δυϊκή της διαθέτει  $F$  κορυφές,  $E$  ακμές και  $V$  έδρες. Επομένως για τη δυϊκή ισχύει:

$$F = 1122, \quad E = 3360 \quad \text{και} \quad V = 2240$$



Εικόνα 30 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)

Μια άλλη κατασκευή είναι ο θόλος της Εικόνας 31, συχνότητας 15, με αφετηρία την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στον Αμβλύ Κύβο (Πίνακας 1). Ο Αμβλός Κύβος διαθέτει 32 τριγωνικές και 6 τετραγωνικές έδρες (Πίνακας 2). Η εφαρμογή DOMES προχωρεί σε έναν πρώτο τριγωνισμό των τετραγωνικών εδρών από τον οποίο θα προκύψουν  $6 \times 4 = 24$  ισοσκελή και ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα. Επομένως έχει να διαχειριστεί  $32 + 24 = 56$  σφαιρικά τρίγωνα. Οι πλευρές εκάστου διαιρούνται σε 5 ίσα μέρη και ο διαμερισμός προχωρεί κατά τα γνωστά. Και πάλι η συχνότητα δεν συμπίπτει με το πλήθος των τμημάτων στα οποία διαιρούμε τις πλευρές των αρχικών τριγώνων αλλά με το ελάχιστο πλήθος βημάτων από τετραμερή σε τετραμερή κορυφή.



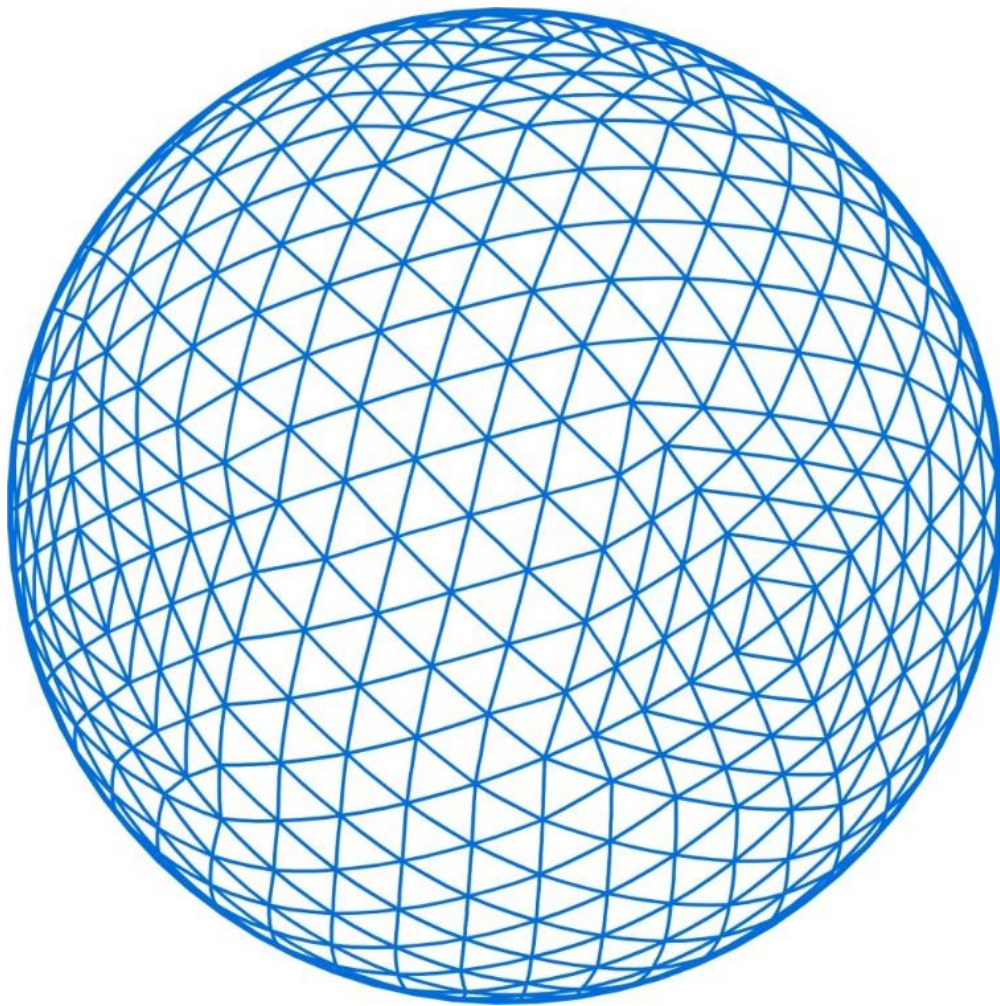
# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Θα υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο, όπως και παραπάνω, το πλήθος  $F$  των τριγωνικών πλακιδίων, το πλήθος  $E$  των ακμών και το πλήθος  $V$  των κορυφών της πλακόστρωσης. Θα έχουμε:

$$F = 56 \times 5^2 = 1400$$

$$E = \frac{3F}{2} = \frac{3 \times 1400}{2} = 2100$$

$$V = \frac{F}{2} + 2 = \frac{1400}{2} + 2 = 702$$



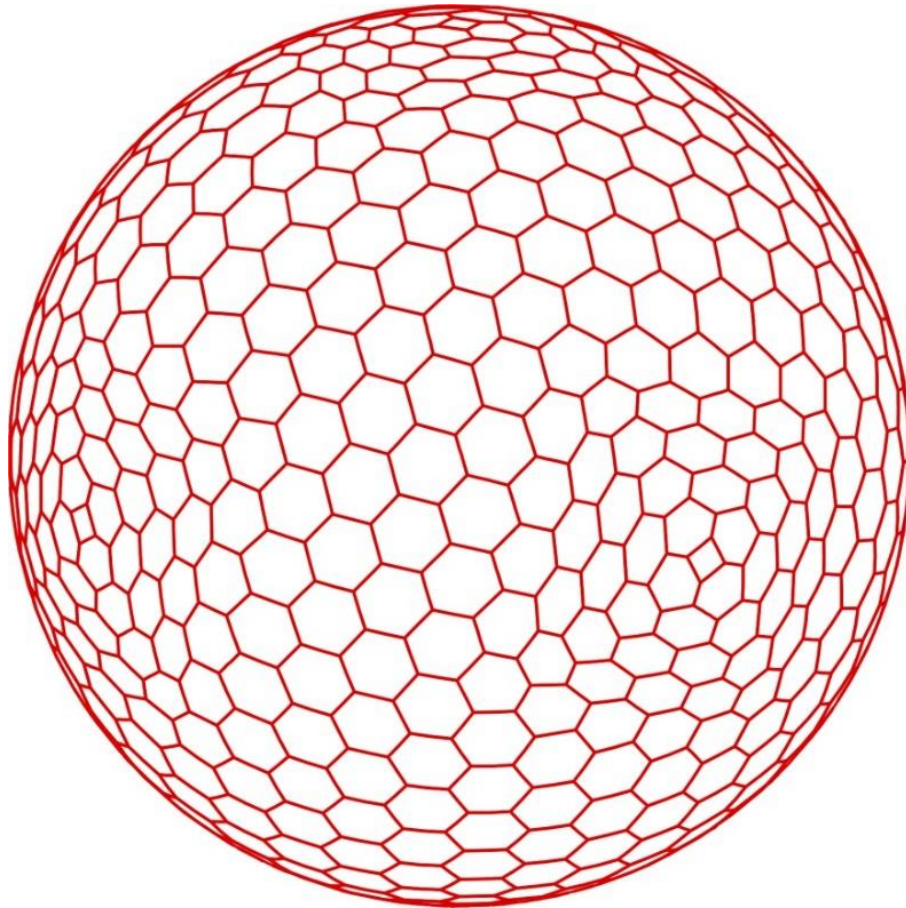
Εικόνα 31 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Η δυϊκή της τελευταίας πλακόστρωσης εμφανίζεται στην Εικόνα 32. Αποτελείται από εξαγωνικές έδρες, με εξαίρεση 6 τετραγωνικές έδρες που αντιστοιχούν στα κέντρα των 6 τετραγωνικών εδρών της αρχικής πλακόστρωσης. Και πάλι, αν  $V$  το πλήθος των κορυφών,  $E$  το πλήθος των ακμών και  $F$  το πλήθος των εδρών της κύριας πλακόστρωσης, η δυϊκή της διαθέτει  $F$  κορυφές,  $E$  ακμές και  $V$  έδρες. Επομένως για τη δυϊκή ισχύει:

$$F = 702, E = 2100 \text{ και } V = 1400$$



Εικόνα 32 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)

Μια άλλη κατασκευή είναι ο θόλος της Εικόνας 33, συχνότητας 8, με αφετηρία την πλακόστρωση που αντιστοιχεί στο Εικοσιδωδεκάεδρο. Το Εικοσιδωδεκάεδρο διαθέτει 20 τριγωνικές και 12 πενταγωνικές έδρες. Η εφαρμογή DOMES προχωρεί σε έναν πρώτο τριγωνισμό των πενταγωνικών εδρών από τον οποίο θα προκύψουν  $12 \times 5 = 60$  ισοσκελή και ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα. Επομένως έχει να διαχειριστεί  $60 + 20 = 80$  σφαιρικά τρίγωνα. Οι πλευρές εκάστου διαιρούνται σε 4 ίσα μέρη και ο διαμερισμός προχωρεί κατά τα γνωστά. Και πάλι η συχνότητα δεν συμπίπτει με το πλήθος των τμημάτων στα οποία διαιρούμε τις πλευρές των αρχικών τριγώνων αλλά με το ελάχιστο πλήθος βημάτων από πενταμερή σε πενταμερή κορυφή.





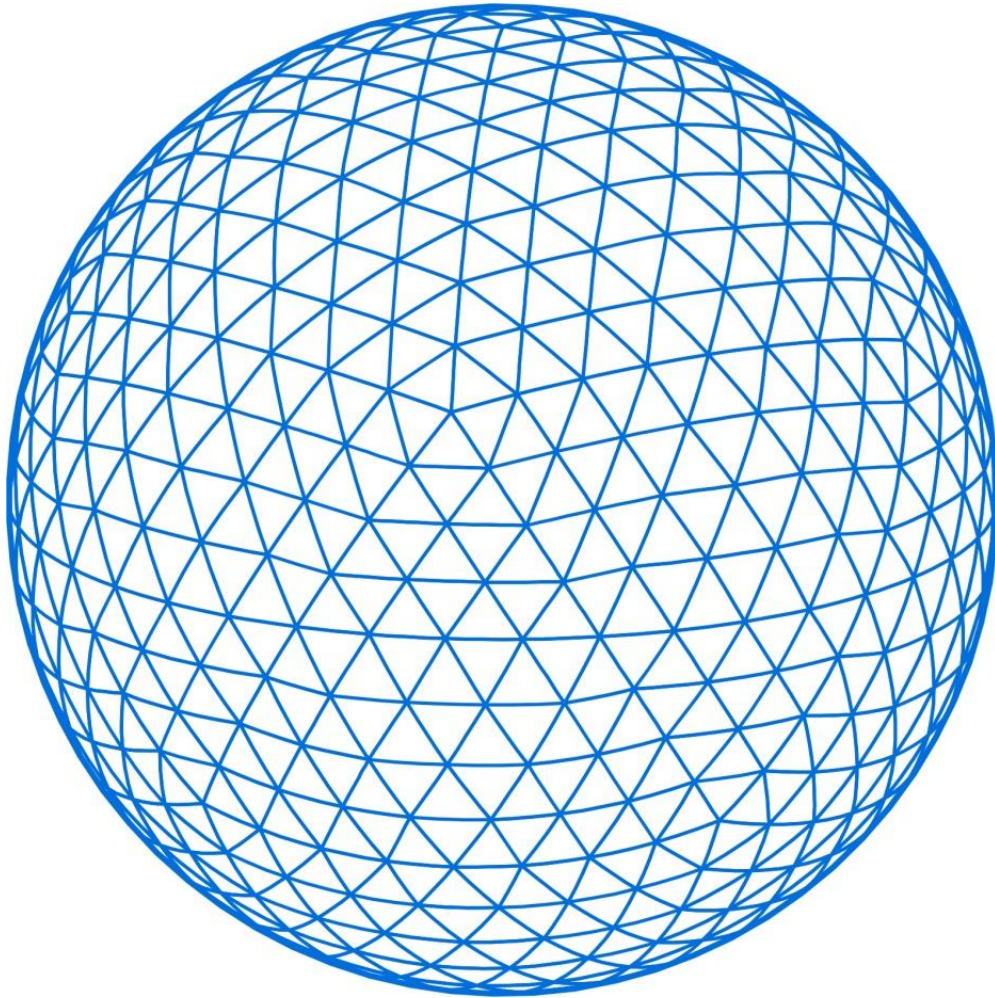
# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Θα υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο, όπως και παραπάνω, το πλήθος  $F$  των τριγωνικών πλακιδίων, το πλήθος  $E$  των ακμών και το πλήθος  $V$  των κορυφών της πλακόστρωσης. Θα έχουμε:

$$F = 80 \times 4^2 = 1280$$

$$E = \frac{3F}{2} = \frac{3 \times 1400}{2} = 2100$$

$$V = \frac{F}{2} + 2 = \frac{1400}{2} + 2 = 702$$



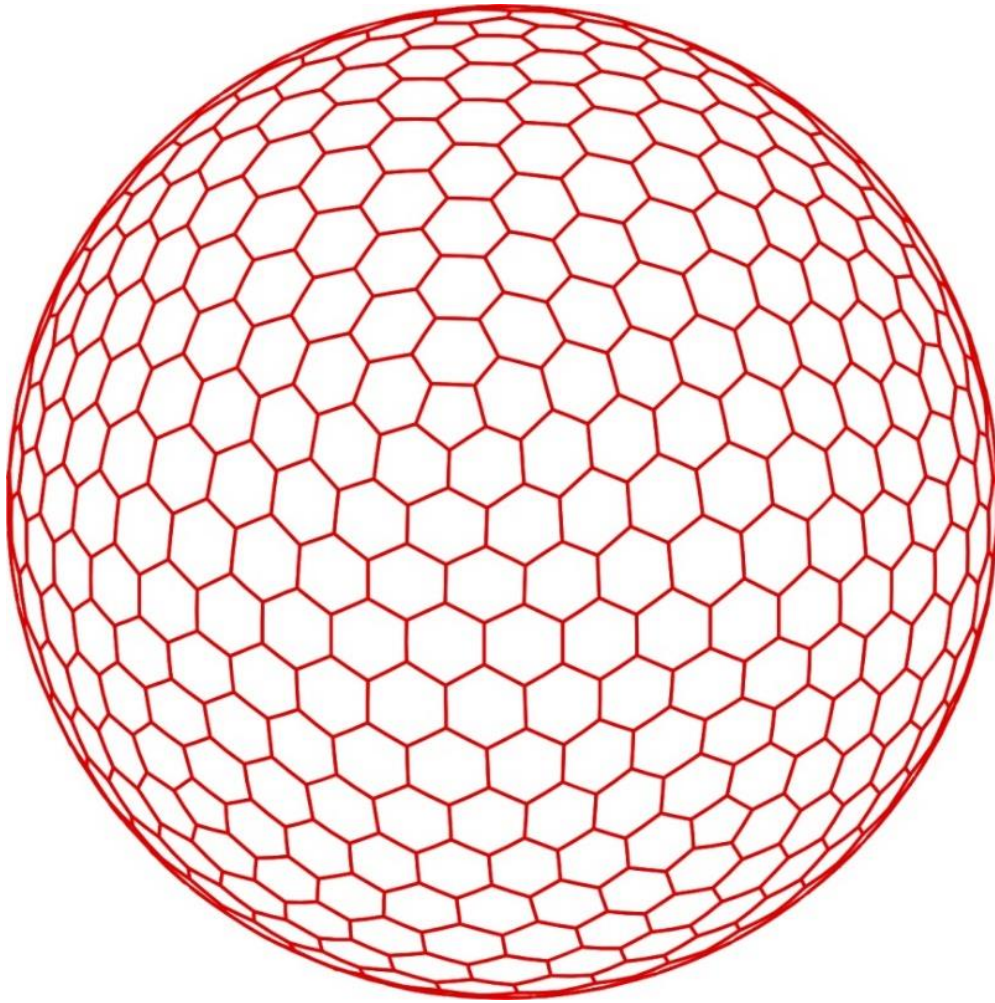
Εικόνα 33 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Η δυϊκή της τελευταίας πλακόστρωσης εμφανίζεται στην Εικόνα 34. Αποτελείται από εξαγωνικές έδρες, με εξαίρεση 12 πενταγωνικές έδρες που αντιστοιχούν στα κέντρα των πενταγωνικών εδρών της αρχικής πλακόστρωσης. Και πάλι, αν  $V$  το πλήθος των κορυφών,  $E$  το πλήθος των ακμών και  $F$  το πλήθος των εδρών της κύριας πλακόστρωσης, η δυϊκή της διαθέτει  $F$  κορυφές,  $E$  ακμές και  $V$  έδρες. Επομένως για τη δυϊκή ισχύει:

$$F = 702, E = 2100 \text{ και } V = 1400$$



Εικόνα 34 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)

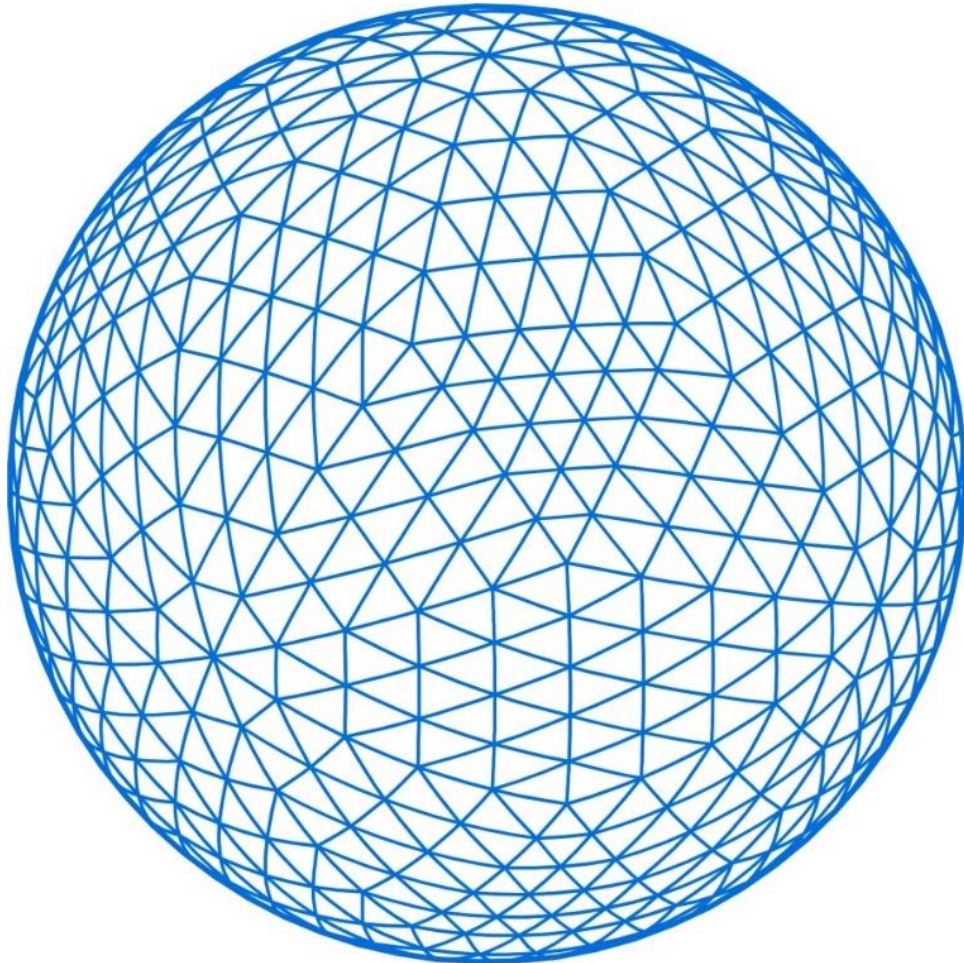
Θα μελετήσουμε τώρα μια πλακόστρωση συχνότητας 10, που δεν θεωρείται ιδιαίτερα «όμορφη». Πρόκειται για την πλακόστρωση, που ως αφητηρία έχει τον Κολοβό Κύβο (Πίνακας 1). Ο Κολοβός Κύβος διαθέτει 6 οκταγωνικές και 8 τριγωνικές έδρες (Πίνακας 2). Η DOMES προχωρεί επομένως με έναν πρώτο τριγωνισμό των οκταγωνικών εδρών από τον οποίο θα προκύψουν  $6 \times 8 = 48$  ισοσκελή και ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα. Άρα θα έχει να διαχειριστεί  $8 + 48 = 56$  σφαιρικά τρίγωνα. Οι πλευρές εκάστου διαιρούνται σε 5 ίσα μέρη και ο διαμερισμός προχωρεί όπως παραπάνω. Η συχνότητα και εδώ δεν συμπίπτει με το πλήθος των τμημάτων, στα οποία διαιρούνται οι πλευρές των αρχικών τριγώνων, αλλά με το



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

ελάχιστο πλήθος βημάτων από οκταμερή σε οκταμερή κορυφή (Εικόνα 35). Θα υπολογίσουμε ξανά το πλήθος  $F$  των τριγωνικών πλακιδίων, το πλήθος  $E$  των ακμών και το πλήθος  $V$  των κορυφών της πλακόστρωσης. Θα έχουμε:

$$F = 56 \times 5^2 = 1400, \quad E = \frac{3F}{2} = \frac{3 \times 1400}{2} = 2100, \quad V = \frac{F}{2} + 2 = \frac{1400}{2} + 2 = 702$$



Εικόνα 35 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)

Η δυϊκή της τελευταίας πλακόστρωσης (Εικόνα 36) αποτελείται από εξαγωνικές έδρες, με εξαίρεση 24 πενταγωνικές έδρες, που αντιστοιχούν στις κορυφές της αρχικής πλακόστρωσης, και 6 οκταγωνικές έδρες, που αντιστοιχούν στα κέντρα των 6 οκταγωνικών εδρών της αρχικής πλακόστρωσης. Και πάλι, αν  $V$  το πλήθος των κορυφών,  $E$  το πλήθος των ακμών και  $F$  το πλήθος των εδρών της κύριας πλακόστρωσης, η δυϊκή της διαθέτει  $F$  κορυφές,  $E$  ακμές και  $V$  έδρες. Πράγματι:

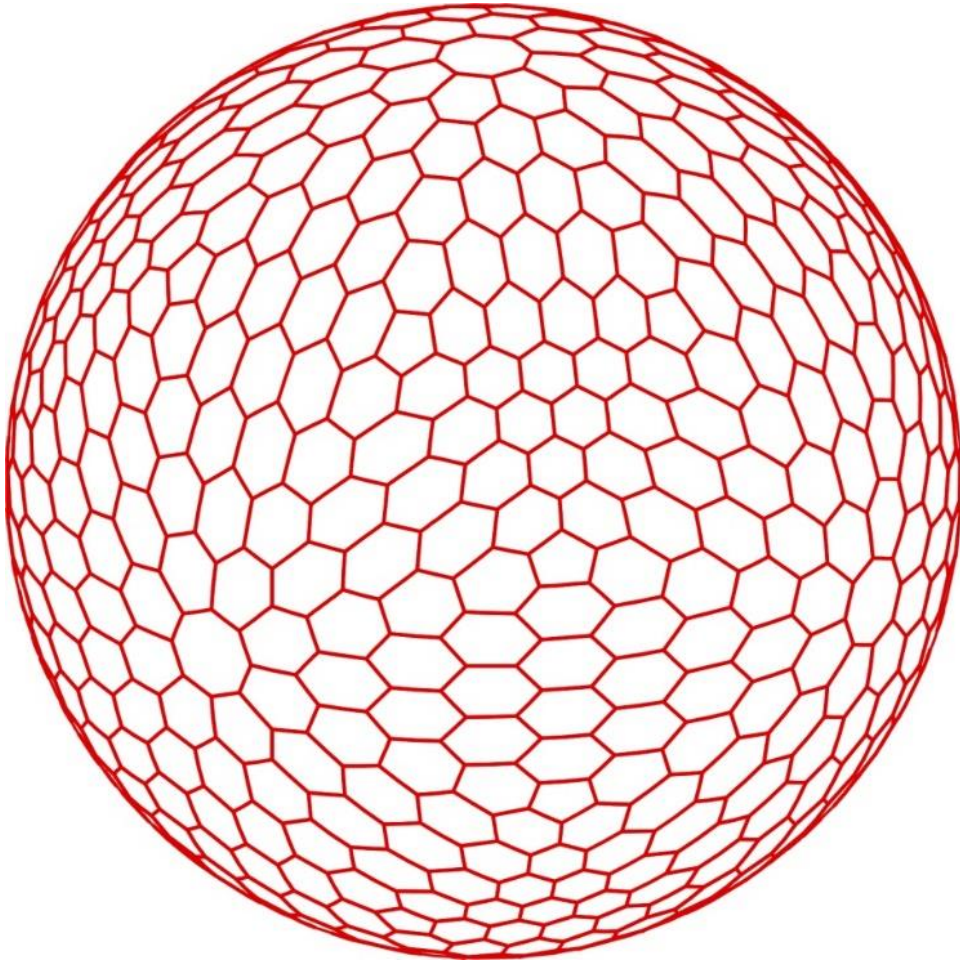


# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

$$F = 702$$

$$E = \frac{8 \times 6}{2} + \frac{6 \times 672}{2} + \frac{5 \times 24}{2} = 2100$$

$$V = E - F + 2 = 2100 - 702 + 2 = 1400$$



Εικόνα 36 (Παράχθηκε μέσω της εφαρμογής DOMES)



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα πλεονεκτήματα των γεωδαιτικών θόλων, είναι καταρχήν ότι σαν κατασκευές είναι αρκετά ελαφρές, εύκολες στην εφαρμογή και ιδιαίτερα ευσταθείς. Η ευστάθειά τους αποδίδεται στο γεγονός ότι υπάρχουν πολλαπλά αλληλοσυνδεόμενα τρίγωνα, με συνέπεια τη δημιουργία άκαμπτης κατασκευής. Είναι δε ακόμα πιο ευσταθείς, αν είναι διπλού ή πολλαπλού κελύφους. Ένα άλλο πλεονέκτημα του θόλου έγκειται στο γεγονός ότι είναι αεροδυναμικός, έτσι η κατασκευή μπορεί να αντιστέκεται στα φορτία ανέμου που ασκούνται πάνω της.

Ακόμα, λόγω του μικρού βάρους τους και της ελαστικής συμπεριφοράς των μεταλλικών στοιχείων που τους συνθέτουν, οι γεωδαιτικοί θόλοι έχουν άριστη συμπεριφορά σε περίπτωση σεισμού. Αλλά και σε περίπτωση πυρκαγιάς οι κατασκευές αυτές είναι ιδιαίτερα ανθεκτικές.

Αξίζει να τονιστεί, ότι το ίδιο βάρος των χωροδικτυωμάτων και των γεωδαιτικών θόλων ειδικά είναι πολύ μικρότερο από τις αντίστοιχες κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα. Για αυτό το λόγο, εκτός της οικονομίας σε υλικό, έχουμε και οικονομία από τη χρήση θεμελιώσεων μικρότερων διαστάσεων. Πέραν αυτών, οι γεωδαιτικοί θόλοι επιτρέπουν την κάλυψη χώρων πολύ μεγάλων διαστάσεων, χωρίς τη χρήση ενδιάμεσων υποστυλωμάτων.

Μια δυσκολία στην κατασκευή των γεωδαιτικών θόλων είναι η εξής. Τα στοιχεία τους έρχονται μεν προκατασκευασμένα στο εργοτάξιο, αλλά είναι αδύνατη η πλήρης τυποποίηση, γιατί υπάρχουν διαφορετικές ομάδες ράβδων και κόμβων, εξαρτώμενες από το μέγεθος του θόλου, από την πλακόστρωση αφετηρίας, από τη συχνότητα και από τη χρησιμοποιούμενη τεχνική τριγωνισμού.

Επίσης, σε ένα θόλο με μεγάλο ύψος είναι δυνατόν ένα μεγάλο μέρος του χώρου να μείνει ανεκμετάλλευτο, λόγω της θολωτής στέγης. Και ακόμα ενδέχεται να χρειαστεί περισσότερη ώρα για να θερμανθεί, με αποτέλεσμα μεγαλύτερο κόστος λειτουργίας.





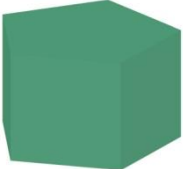
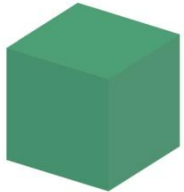


Τελικά όμως οι γεωδαιτικοί θόλοι είναι έξυπνες, χαμηλού κόστους και εντυπωσιακές κατασκευές.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων













## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Σφαιρικές Πλακοστρώσεις και Πολύεδρα

Στον επόμενο Πίνακα, έχουμε την παράσταση των κυρτών κανονικών και ημικανονικών πολυέδρων, όπως παράγονται από την εφαρμογή TILES. Από τις απειρομελείς οικογένειες των ημικανονικών πρισμάτων και αντιπρισμάτων, δίνονται ενδεικτικά το Ημικανονικό Πενταγωνικό Πρίσμα και το Ημικανονικό Πενταγωνικό Αντιπρίσμα. Ο Κύβος είναι μέλος της πρώτης οικογένειας (για  $n = 4$ ) και το Κανονικό Οκτάεδρο είναι μέλος της δεύτερης (για  $n = 3$ ).

Πίνακας 1: Κυρτά Κανονικά και Ημικανονικά Πολύεδρα					
1	Κανονικό Τετράεδρο		2	Κολοβό Τετράεδρο	
3	Κολοβός Κύβος		4	Κολοβό Δωδεκάεδρο	
5	Ημικανονικό 5-γωνικό Πρίσμα		5a	Κανονικό Εξάεδρο (Κύβος)	
6	Κολοβό Οκτάεδρο		7	Κολοβό Κυβοκτάεδρο	



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

8	Κολοβό Εικοσι- δωδεκάεδρο		9	Κανονικό Δωδεκάεδρο	
10	Κολοβό Εικοσάεδρο		11	Ημικανονικό 5-γωνικό Αντιπρίσμα	
11a	Κανονικό Οκτάεδρο		12	Κυβοκτάεδρο	
13	Ρομβο- κυβοκτάεδρο		14	Ρομβο-εικοσι- δωδεκάεδρο	
15	Εικοσι- δωδεκάεδρο		16	Κανονικό Εικοσάεδρο	
17	Αμβλύς Κύβος		18	Αμβλύ Δωδεκάεδρο	



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Στον επόμενο Πίνακα βλέπουμε το πλήθος των διακριτών στοιχείων, δηλαδή των κορυφών ( $V$ ), ακμών ( $E$ ) και εδρών ( $F$ ), των κυρτών κανονικών και ημικανονικών πολυέδρων και των αντιστοιχών τους σφαιρικών πλακοστρώσεων.

Εκτός από το όνομα κάθε πολυέδρου, δίνεται και ένας συμβολισμός. Επειδή σε κάθε κορυφή του πολυέδρου και της αντίστοιχης του πλακόστρωσης συναντώνται οι ίδιες, ως προς το πλήθος, το είδος και τη διάταξη, έδρες, είναι εύλογος ο συμβολισμός  $(n_1 n_2 \dots n_r)$ , για την πλακόστρωση και το πολύεδρο σε κάθε κορυφή των οποίων διατάσσονται  $r$  έδρες, με πλήθος ακμών  $n_1, n_2, \dots, n_r$ .

Το σύμβολο  $F_n$  αναφέρεται στο πλήθος  $n$ -γωνικών εδρών ενός πολυέδρου και της αντίστοιχης του πλακόστρωσης.

Πίνακας 2: Πλήθος Διακριτών Στοιχείων Πλακοστρώσεων και Πολυέδρων											
Πολύεδρο		$V$	$E$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_8$	$F_{10}$	$F_n$	$F$
1	Κανονικό Τετράεδρο (3 3 3)	4	6	4							4
2	Κολοβό Τετράεδρο (6 6 3)	12	18	4			4				8
3	Κολοβός Κύβος (3 8 8)	24	36	8				6			14
4	Κολοβό Δωδεκάεδρο (3 10 10)	60	90	20					12		32
5	Ημικανονικό $n$ -γωνικό Πρίσμα (4 4 $n$ )	$2n$	$3n$		$n$					2	$n+2$
5a	Κανονικό Εξάεδρο (Κύβος) (4 4 4)	8	12		6						6
6	Κολοβό Οκτάεδρο (4 6 6)	24	36		6		8				14
7	Κολοβό Κυβοκτάεδρο (4 6 8)	48	72		12		8	6			26
8	Κολοβό Εικοσιδωδεκάεδρο (4 6 10)	120	180		30		20		12		62
9	Κανονικό Δωδεκάεδρο (5 5 5)	20	30			12					12





# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

10	Κολοβό Εικοσάεδρο (5 6 6)	60	90			12	20				32
11	Ημικανονικό $n$ -γωνικό Αντιπρίσμα (3 3 3 $n$ )	$2n$	$4n$	$2n$						2	$2n + 2$
11a	Κανονικό Οκτάεδρο (3 3 3 3)	6	12	8							8
12	Κυβοκτάεδρο (3 4 3 4)	12	24	8	6						14
13	Ρομβο-κυβοκτάεδρο (3 4 4 4)	24	48	8	18						26
14	Ρομβο-εικοσιδωδεκάεδρο (3 4 5 4)	60	120	20	30	12					62
15	Εικοσιδωδεκάεδρο (3 5 3 5)	30	60	20		12					32
16	Κανονικό Εικοσάεδρο (3 3 3 3 3)	12	30	20							20
17	Αμβλύς Κύβος (3 3 3 3 4)	24	60	32	6						38
18	Αμβλύ Δωδεκάεδρο (3 3 3 3 5)	60	150	80		12					92



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών Θόλων

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Έντυπη:

Ξενόγλωσση:

1. Baggott J.: *Perfect Symmetry - The Accidental Discovery of Buckminsterfullerene*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
2. Coxeter H.S.M.: "Virus Macromolecules and Geodesic Domes", in J.C. Butcher (ed.) *A spectrum of mathematics: Essays presented to H.G. Forder*, Oxford University Press, Oxford, 1971, pp. 98-107.
3. Cromwell P.R.: *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
4. Gardner M.: "On map projections (with special reference to some inspired ones)" in *Scientific American*, November 1975, Vol. 233, Nr. 5, pp. 120-125.
5. Kepler J.: *The Harmony of the World*, American Philosophical Society, Philadelphia 1997 (Harmonices Mundi, Translated into English with an Introduction and Notes by E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field).
6. Martin G.E.: *Transformation Geometry – An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1982.
7. Wenninger M.J.: *Polyedron Models*, Cambridge University Press, Cambridge 1971.
8. Williams R.: *The Geometrical Foundation of Natural Structures – A Source Book of Design*, Dover Publications, New York 1979.

Ελληνική:

9. Βενέρης Ι.: *Πληροφορική και Αρχιτεκτονική – Έννοιες και Τεχνολογίες*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2011.
10. Ντζιώρας Η.Β.: *Μαθηματικά – Ε΄ Γυμνασίου, Τόμος πρώτος*, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1975.
11. Πάμφιλος Π.: *Έλασσον Γεωμετρικόν*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2012.
12. Τζουρμακλιώτου Δ.: "Χωροκατασκευές – Εισβολή στον Κόσμο των Τριών Διαστάσεων", *Τεχνικά Χρονικά* (έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδας), Τεύχος 5, Σεπτέμβριος-Οκτώβριος 2007, σελ. 1-24.



# Η γεωμετρία των Γεωδαιτικών θόλων

Ηλεκτρονική:

Ξενόγλωσση:

13. <http://inhabitat.com/nyc/long-island-green-dome-is-the-worlds-largest-wooden-residential-dome/> (26/10/2016).
14. <http://inhabitat.com/gorgeous-solar-geodesic-eco-dome-crowns-cob-house-in-the-arctic-circle/> (26/10/2016).
15. <http://www.missouribotanicalgarden.org/gardens-gardening/our-garden/gardens-conservatories/conservatories/climatron.aspx> (26/10/2016)
16. [https://en.wikipedia.org/wiki/Montreal\\_Biosph%C3%A8re](https://en.wikipedia.org/wiki/Montreal_Biosph%C3%A8re) (26/10/2016)
17. <https://en.wikipedia.org/wiki/Superdome> (26/10/2016).
18. <http://unescopeireas.gr/2010/05/20/mnimeia-politistikis-klironomias-diethnos/> (18/07/2016)
19. <http://photocamel.com/forum/architecture-cityscapes/101501-geodesic-dome-us-pavillion.html> (26/10/2016)
20. <http://hearthisyoucreators.blogspot.gr/2012/10/geometric-structures-at-montreal-expo-67.html> (26/10/2016)
21. <https://www.flickr.com/photos/mbgarchives/4464331181/> (26/10/2016)

Ελληνική:

22. <http://www.ametro.gr/page/default.asp?la=1&id=38&pl=4953&pk=169&ap=261> (10/04/2016)
23. <http://ir.lib.uth.gr/bitstream/handle/11615/13298/P0013298.pdf?sequence=1&isAllowed=y> (26/10/2016)