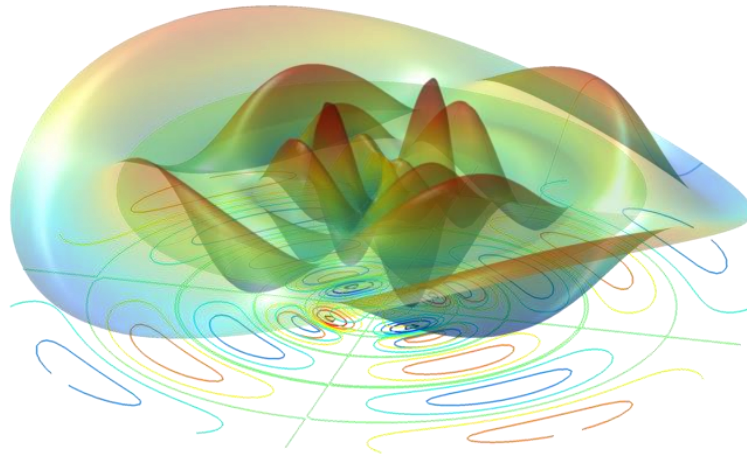




ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΠΙΤΣΑΔΙΩΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΡΟΣΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ Τ.Ε.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

Τμήμα Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε.

Π. Ράλλη & Θηβών 250, Αιγάλεω, Αθήνα-Ελλάδα

Τηλ. 210-5381488

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο / Η κάτωθι υπογεγραμμένος / η,

του, με αριθμό μητρώου φοιτητής / τρια του Τμήματος **Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε.** του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. πριν αναλάβω την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μου, δηλώνω ότι ενημερώθηκα για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε.) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο του συγγραφέα, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικός υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας της Π.Ε., ο οποίος φέρει και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών του συγγραφέα σε περίπτωση που το Ίδρυμα του έχει απονείμει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφαση της, μετά από αίτηση του ενδιαφερόμενου, του αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση της Π.Ε. με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε. πρέπει να ολοκληρωθεί εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού βμήνου από την ημερομηνία ανάθεσης της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18, παρ. 5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού.»

Επίσης δηλώνω υπεύθυνα ότι έχω παρακολουθήσει το σεμινάριο συγγραφής και εκπόνησης πτυχιακής εργασίας που διοργανώνεται από το Τμήμα Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε. κατά το Χειμερινό/Εαρινό Εξάμηνο του Ακ. Έτους

Ο Δηλών

Ημερομηνία

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη.....	1
Εισαγωγή.....	2
Κεφάλαιο 1 Βασικές έννοιες	3
1.1 Σύστημα.....	3
1.2 Κατηγοριοποίηση συστημάτων.....	6
1.3 Έλεγχος.....	6
1.4 Μοντέλο.....	7
1.5 Κατηγορίες μοντέλων.....	7
1.6 Τεχνικές εύρεσης μοντέλου.....	8
1.7 Η έννοια της μοντελοποίησης και προσομοίωσης.....	8
1.8 Αστοχίες της μοντελοποίησης και προσομοίωσης.....	11
Κεφάλαιο 2 Βασικά μαθηματικά και χρήσιμοι μέθοδοι	11
2.1 Παράγωγος.....	11
2.2 Ολοκληρώματα.....	13
2.3 Διαφορικές εξισώσεις.....	13
2.4 Νόμοι φυσικής.....	14
2.5 Μέθοδος Lagrange.....	16
2.6 Γραμμικοποίηση.....	17
2.7 Γραμμική άλγεβρα.....	18
2.8 Μιγαδικοί αριθμοί.....	21
2.9 Μετασχηματισμός Laplace.....	22
2.10 Παραδείγματα.....	25
Κεφάλαιο 3 Συνάρτηση μεταφοράς και χρονική απόκριση	27
3.1 Συνάρτηση μεταφοράς.....	27
3.2 Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς σε ηλεκτρικό κύκλωμα.....	28
3.3 Λειτουργικά διαγράμματα.....	35
3.4 Διαγράμματα ροής.....	37
3.5 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.....	39

3.6 Χρονική απόκριση συστήματος.....	41
3.7 Χρονική απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξης.....	42
3.8 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	45
3.9 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	54
3.10 Παραδείγματα.....	55
Κεφάλαιο 4 Χώρος κατάστασης	60
4.1 Μεταβλητές κατάστασης και εξισώσεις κατάστασης.....	60
4.2 Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από τον χώρο κατάστασης.....	62
4.3 Απόκριση των μεταβλητών κατάστασης και πίνακας μετάβασης	63
4.4 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του συστήματος.....	64
4.5 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα.....	66
4.6 Παραδείγματα.....	67
Κεφάλαιο 5 Προσομοίωση με MATLAB και Simulink.....	75
5.1 Συνάρτηση μεταφοράς και χώρος κατάστασης.....	75
5.2 Απόκριση συστημάτων 1 ^{ης} και 2 ^{ης} τάξης.....	80
5.3 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα.....	91
5.4 Προσομοίωση με Simulink.....	92
5.5 Συμπεράσματα.....	100
Βιβλιογραφία	101
Ελληνόγλωσση.....	101
Ξενόγλωσση.....	101
Πηγές από το διαδίκτυο	102
Εικόνες.....	103
Πίνακες	106
Παράρτημα	108

Λίστα εικόνων

Εικόνα 1.1 Σύστημα.....	3
Εικόνα 1.2 Σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων.....	4
Εικόνα 1.3 Σύστημα με ελεγκτή σε σειρά.....	6
Εικόνα 1.4 Σύστημα με ανάδραση.....	6
Εικόνα 1.5 Λευκό κουτί.....	8
Εικόνα 1.6 Μαύρο κουτί.....	8
Εικόνα 1.7 Γκρι κουτί.....	8
Εικόνα 1.8 Εξομοίωση.....	10
Εικόνα 1.9 Προσομοίωση.....	10
Εικόνα 2.1 Μιγαδικός αριθμός σε άξονα x-y.....	22
Εικόνα 2.2 Μάζα-ελατήριο.....	25
Εικόνα 2.3 Εκκρεμές.....	26
Εικόνα 3.1 Σύστημα.....	27
Εικόνα 3.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο εντάσεων βρόχων.....	29
Εικόνα 3.3 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο τάσεων κόμβων.....	32
Εικόνα 3.4 Σύμβολα και τυπικές ιδιότητες λειτουργικών διαγραμμάτων.....	36
Εικόνα 3.5 Αντιστοιχία μεταξύ λειτουργικών διαγραμμάτων και διαγραμμάτων ροής.....	37
Εικόνα 3.6 Λειτουργικό διάγραμμα.....	38
Εικόνα 3.7 Διάγραμμα ροής.....	38
Εικόνα 3.8 Πολικό διάγραμμα συστήματος 1 ^{ης} τάξης με ένα πραγματικό πόλο.....	42
Εικόνα 3.9 Χρονική απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξης με μοναδιαία βηματική είσοδο.....	43
Εικόνα 3.10 Χρονική απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο.....	44

Εικόνα 3.11 Χρονική απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξης με μοναδιαία αναρρίχηση ως είσοδο	45
Εικόνα 3.12 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta > 1$	46
Εικόνα 3.13 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta > 1$	47
Εικόνα 3.14 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta = 1$	48
Εικόνα 3.15 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta = 1$	49
Εικόνα 3.16 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta < 1$	49
Εικόνα 3.17 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta < 1$	51
Εικόνα 3.18 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta = 0$	52
Εικόνα 3.19 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για $\zeta = 0$	53
Εικόνα 3.20 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης	54
Εικόνα 3.21 Μάζα-ελατήριο	55
Εικόνα 3.22 Λειτουργικό διάγραμμα παραδείγματος	56
Εικόνα 3.23 Διάγραμμα ροής παραδείγματος	57
Εικόνα 3.24 Χρονική απόκριση παραδείγματος	59
Εικόνα 4.1 Δύο κυλιόμενα βαγόνια	67
Εικόνα 4.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC	69
Εικόνα 4.3 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης $x_1(t), x_2(t)$	72
Εικόνα 4.4 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης	74
Εικόνα 5.1 Μηχανικό σύστημα	75
Εικόνα 5.2 Σύστημα στάθμης υγρού	81
Εικόνα 5.3 Χρονικές αποκρίσεις συστήματος 1 ^{ης} τάξης με βηματική και κρουστική είσοδο	83
Εικόνα 5.4 Λειτουργικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	83
Εικόνα 5.5 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης με βηματική είσοδο.....	85

Εικόνα 5.6 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο.....	85
Εικόνα 5.7 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	86
Εικόνα 5.8 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2 ^{ης} τάξης με βηματική είσοδο	87
Εικόνα 5.9 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2 ^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο	87
Εικόνα 5.10 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ με βηματική είσοδο.....	89
Εικόνα 5.11 Χρονική απόκριση συστήματος 2 ^{ης} τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ με κρουστική είσοδο.....	91
Εικόνα 5.12 Παράθυρο ορισμού παραμέτρων βηματικής εισόδου.....	93
Εικόνα 5.13 Προσομοίωση συστήματος στο Simulink.....	93
Εικόνα 5.14 Απόκριση εξόδου του συστήματος.....	93
Εικόνα 5.15 Λειτουργικό διάγραμμα κινητήρα DC.....	94
Εικόνα 5.16 Προσομοίωση του κινητήρα DC.....	94
Εικόνα 5.17 Απόκριση εξόδου του κινητήρα DC.....	95
Εικόνα 5.18 Σύστημα αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα ...	95
Εικόνα 5.19 Προσομοίωση συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα.....	96
Εικόνα 5.20 Απόκριση εξόδου συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα.....	97
Εικόνα 5.21 Προσομοίωση μοντέλου θηρευτής και θήραμα.....	99
Εικόνα 5.22 Απόκριση εξόδου μοντέλου θηρευτής και θήραμα.....	100
Εικόνα παραρτήματος 1 Διεπαφή του MATLAB.....	108
Εικόνα παραρτήματος 2 Διεπαφή του MATLAB μαζί με το Editor.....	109
Εικόνα παραρτήματος 3 Αρχική σελίδα του Simulink.....	110

Εικόνα παραρτήματος 4 Simulink.....	110
Εικόνα παραρτήματος 5 Βιβλιοθήκη του Simulink.....	111

Λίστα πινάκων

Πίνακας 2.1 Βασικά φαινόμενα και βασικούς νόμους φυσικής	15
Πίνακας 2.2 Γενικές πληροφορίες για τις ενέργειες φυσικών φαινομένων της εξίσωσης Lagrange	17
Πίνακας 2.3 Γενικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace	23
Πίνακας 2.4 Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace.....	24
Πίνακας 1 Συνηθισμένες μαθηματικές συναρτήσεις.....	111
Πίνακας 2 Εντολές δημιουργίας διαγραμμάτων	112
Πίνακας 3 Συναρτήσεις μορφοποίησης διαγράμματος	112
Πίνακας 4 Συναρτήσεις του MATLAB.....	112

Περίληψη

Η πτυχιακή εργασία πραγματεύεται τη μοντελοποίηση και προσομοίωση, δηλαδή θα περιγραφούν βασικές έννοιες συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, μοντελοποίησης και προσομοίωσης και βασικοί νόμοι φυσικής και βασικά μαθηματικά και στη συνέχεια θα αναλυθούν βασικές μέθοδοι μοντελοποίησης όπως είναι η συνάρτηση μεταφοράς, τα λειτουργικά διαγράμματα, τα διαγράμματα ροής, τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και την χρονική απόκριση της εξόδου συστήματος 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και εύρεση του χώρου κατάστασης δηλαδή, θα βρεθούν οι μεταβλητές κατάστασης, εξισώσεις κατάστασης, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, η ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα ενός συστήματος. Θα αναλυθούν και μέθοδοι προσομοίωσης με το MATLAB και το Simulink σε ηλεκτρονικό υπολογιστή .

Abstract

This thesis deals modeling and simulation, namely will describe basic meanings of automatic control systems, modeling and simulation as well as and basic laws of physics and basic mathematics and subsequently will analyze basic methods of modeling as it is the transfer function, block diagrams, flow diagrams, inverse Laplace and time response of the first and second order system output and the computation of state space namely, will find the state variables, state equations, eigenvalues, eigenvectors , the controllability and observability of a system. Will analyze and methods of simulation with MATLAB and Simulink in computer.

Εισαγωγή

Σε αυτή τη πτυχιακή που πραγματεύεται μια πολύ καινούργια επιστήμη που είναι τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου είναι μια διαδεδομένη επιστήμη και η μοντελοποίηση και προσομοίωση που αποτελεί ένα κομμάτι των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου και έχει ως σκοπό τη μοντελοποίηση(μαθηματική περιγραφή) ενός συστήματος, που το σύστημα έχει οριστεί από έναν επιστήμονα ή μηχανικό για την παρατήρηση της λειτουργίας του συστήματος και η προσομοίωση έχει ως σκοπό τη ακριβή αναπαράσταση του μοντέλου ενός συστήματος με ειδικό πρόγραμμα στον υπολογιστή για την καλύτερη δυνατή μελέτη ενός μοντέλου. Αυτή η πτυχιακή έχει ως στόχο την ανάλυση και την κατανόηση των μεθόδων μοντελοποίησης και προσομοίωσης όπως και η εφαρμογή των μεθόδων μοντελοποίησης και προσομοίωσης.

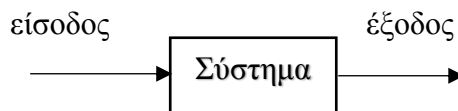
Κεφάλαιο 1 Βασικές έννοιες

Στο πρώτο κεφάλαιο θα εξηγηθούν βασικές έννοιες για την κατανόηση της μοντελοποίησης και προσομοίωσης

Κεφάλαιο 1.1 Σύστημα

Μια πολύ βασική έννοια είναι το σύστημα. **Το σύστημα** με βάση τους ορισμούς που δόθηκαν από τους Δ.Καλλιγερόπουλος και Σ.Βασιλειάδου το 2005 είναι ένα σύνολο στοιχείων που σχηματίζουν μια ενότητα και δρουν σαν μια ενότητα, το σύστημα καθορίζεται από **2 χαρακτηριστικά** και από τα **μεγέθη επικοινωνίας**, το πρώτο χαρακτηριστικό είναι **η δομή** που αποτελεί την εσωτερική διάταξη των στοιχείων του και το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι **η δυναμική λειτουργία** και καθορίζει τη σχέση που συνδέει τα στοιχεία μεταξύ τους αλλά και με το περιβάλλον του συστήματος, τα μεγέθη επικοινωνίας είναι **η είσοδος** και **η έξοδος** του συστήματος, η είσοδος είναι η επίδραση που δέχεται το σύστημα από το περιβάλλον ενώ η έξοδος είναι το αποτέλεσμα που απευθύνει το σύστημα προς το περιβάλλον.

Η παρουσίαση ενός συστήματος γραφικά γίνεται με τη δημιουργία ενός ορθογωνίου που διαθέτει δυο βελάκια, το βελάκι αριστερά είναι η είσοδος και το βελάκι δεξιά είναι η έξοδος όπως διακρίνεται στην εικόνα 1.1 .



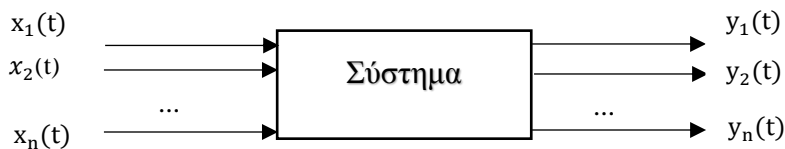
Εικόνα 1.1 Σύστημα

Ένας επιστήμονας ή μηχανικός καθορίζει το σύστημα που τον ενδιαφέρει όπως και τα μεγέθη επικοινωνίας δηλαδή την είσοδο και την έξοδο. Για παράδειγμα μπορεί να οριστεί ως σύστημα μια μάζα συνδεδεμένη με ένα ελατήριο στερεωμένο σε ένα επίπεδο, αν εισαχθεί μια δύναμη στη μάζα τότε η μάζα θα μετατοπιστεί, επομένως η δύναμη είναι η είσοδος μας και το αποτέλεσμα της δύναμης που είναι η μετατόπιση είναι η έξοδος. Ένα άλλο τυπικό παράδειγμα για τον καθορισμό ενός συστήματος είναι ένα κύκλωμα RLC σε σειρά που η είσοδος είναι η τάση πηγής και η έξοδος η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Πέρα από συστήματα μηχανολογικά και ηλεκτρολογικά μπορούμε να ορίσουμε και ως σύστημα τον άνθρωπο προσβεβλημένο από κάποιον ιό και να καθορίσουμε ως είσοδο τα φάρμακα για την αντιμετώπιση του ιού και να καθορίσουμε ως έξοδο την αποτελεσματικότητα των φαρμάκων. Με λίγα λόγια δεν υπάρχει περιορισμός στον καθορισμό ενός συστήματος αλλά χρειάζεται προσοχή στα μεγέθη

επικοινωνίας επειδή ένα σύστημα δεν διαθέτει μόνο μία είσοδο και μια έξοδο διότι υπάρχουν πάρα πολλά αίτια(είσοδοι) που ασκούνται σε ένα σύστημα και τα οποία έχουν διάφορα αποτελέσματα(έξοδοι) πάνω στο σύστημα αλλά συνήθως ως είσοδος-οι και ως έξοδος-οι διαλέγονται αυτές που έχουν ενδιαφέρον ή που παρουσιάζουν κάποια αντίδραση σε μικρό χρονικό διάστημα.

Όπως ανέφεραν οι Δ.Καλλιγερόπουλος και Σ.Βασιλειάδου το 2005, ένα σύστημα που αποτελείται από παραπάνω από μια εισόδους ή εξόδους ονομάζεται πολλαπλό σύστημα και ανάλογα με τον αριθμό εισόδων και εξόδων χωρίζεται σε 4 κατηγορίες, που είναι:

- Μονής εισόδου-μονής εξόδου(Single Input-Single Output,SISO)
- Μονής εισόδου-πολλαπλής εξόδου(Single Input-Multiple Output,SIMO)
- Πολλαπλής εισόδου-μονής εξόδου(Multiple Input-Single Output,MISO)
- Πολλαπλή εισόδου-πολλαπλής εξόδου(Multiple Input-Multiple Output,MIMO)



Εικόνα 1.2 Σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ο Μαλατέστας Β. Παντελής το 2011 αναφέρει ότι τα συστήματα αναλόγως με τη σύνθεσή τους κατηγοριοποιούνται σε:

❖ Δυναμικά-στατικά συστήματα

Δυναμικά είναι τα συστήματα που λόγω διέγερσης της εισόδου παρουσιάζουν μεταβολή στην έξοδο μετά από κάποια χρονική καθυστέρηση και περιγράφονται από εξισώσεις που περιέχουν ολοκληρώματα και διαφορίση. Ενώ τα **στατικά συστήματα** είναι συστήματα που οι έξοδοι τους εξαρτώνται αποκλειστικά από τις εισόδους τους την ίδια χρονική στιγμή και περιγράφονται από αλγεβρικές εξισώσεις. Τα δυναμικά συστήματα είναι και συστήματα με μνήμη διότι η έξοδος τους εξαρτάται και από τις προηγούμενες τιμές που είχε η είσοδος τους σε αντίθεση με τα στατικά συστήματα που η έξοδος τους εξαρτάται μόνο από τις τιμές που παίρνει η είσοδος τους μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή γι' αυτό τα στατικά συστήματα ονομάζονται συστήματα χωρίς μνήμη. Συνήθως αν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον ένα δυναμικό στοιχείο τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό.

❖ Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

Γραμμικά συστήματα, είναι τα συστήματα στα οποία ισχύει η αρχή της υπέρθεσης (principle of superposition). Η αρχή της υπέρθεσης αναφέρει ότι η συνολική απόκριση ενός συστήματος ισούται με τις επιμέρους αποκρίσεις της κάθε μιας εισόδου ξεχωριστά παίρνοντας κάθε φορά τις υπόλοιπες εισόδους να είναι ίσες με τον μηδέν. Ενώ **μη γραμμικά συστήματα**, είναι τα συστήματα στα οποία δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.

❖ Χρονικά μεταβλητά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Χρονικά μεταβλητά συστήματα (time variant systems), είναι τα συστήματα τα οποία η μορφή της εξόδου εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφή της εισόδου για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που εφαρμόζεται η είσοδος στην έξοδο. Ενώ τα **χρονικά αμετάβλητα συστήματα (time invariant systems)**, είναι τα συστήματα που η μορφή της εξόδου εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφή της εισόδου αλλά χωρίς να υπάρχει συγκεκριμένο χρονικό διάστημα για την εφαρμογή της εισόδου.

❖ Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου συστήματα

Οι Averill M. Law και W. David Kelton το 1991 ανέφεραν τους ορισμούς για τα συστήματα **διακριτού χρόνου (discrete time)** και **συνεχούς χρόνου (continues time)**. Στο σύστημα διακριτού χρόνου, οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν στιγμιαία σε ξεχωριστά χρονικά διαστήματα ενώ στο σύστημα συνεχούς χρόνου, οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν συνεχώς σε σχέση με το χρόνο.

❖ Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα

Αιτιατά συστήματα (casual systems) είναι τα συστήματα που η έξοδος του εξαρτάται από παραπάνω από μια τιμή της εισόδου σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά και από τις προηγούμενες τιμές της εισόδου. Από την άλλη πλευρά **μη αιτιατά συστήματα (non casual systems)** είναι αυτά που η έξοδος εξαρτάται από τις μελλοντικές τιμές της εισόδου του συστήματος.

❖ Ντετερμινιστικά και στοχαστικά συστήματα

Τα ντετερμινιστικά συστήματα είναι αυτά τα συστήματα στα οποία γνωρίζουμε τις εισόδους τους ενώ στα **στοχαστικά συστήματα** οι εισοδοί είναι άγνωστες.

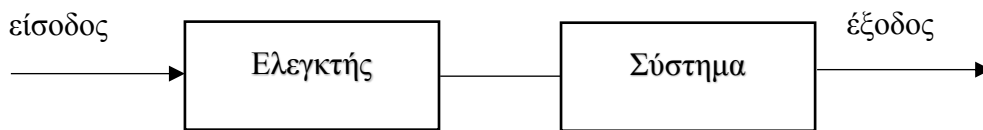
❖ Συστήματα συγκεντρωμένων και κατανεμημένων παραμέτρων

Τα συστήματα συγκεντρωμένων παραμέτρων (concentrated-parameters systems), είναι τα συστήματα που έστω μια παράμετρος δεν είναι διανεμημένη σε μια μεταβλητή (εκτός του χρόνου) ενώ τα **συστήματα κατανεμημένων παραμέτρων (distributed-parameters systems)**, είναι τα συστήματα που ακόμη και μια παράμετρος είναι διανεμημένη σε κάποια μεταβλητή εκτός του χρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.3 ΕΛΕΓΧΟΣ

Οι Raymond T.Stefani, Bahram Shahian,Clement J.Savant Jr και Gene H.Hostetter το 2002 ανέφεραν ότι **ελεγκτής** επιτυγχάνει την επιθυμητή συμπεριφορά ενός συστήματος καθορίζοντας το σήμα ή τα σήματα της εισόδου για την επίτευξη της επιθυμητής εξόδου. Επομένως ο **έλεγχος** είναι η διαδικασία που εφαρμόζει ο ελεγκτής στην είσοδο ή εισόδους τους συστήματος.

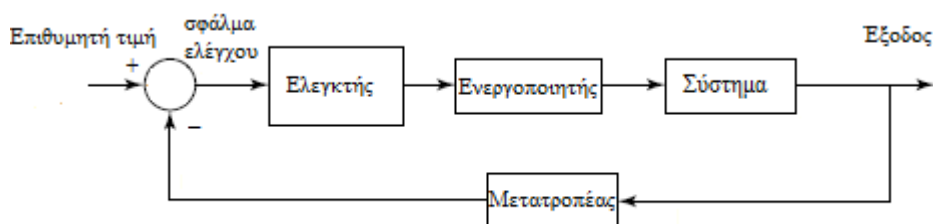
Επίσης οι Raymond T.Stefani, Bahram Shahian,Clement J.Savant Jr και Gene H.Hostetter ανέφεραν το 2002 ότι ένα σύστημα που ο ελεγκτής δεν συνδέεται με την έξοδο ή εξόδους του συστήματος, ονομάζεται **σύστημα ανοιχτού βρόχου(open loop system)**.



Εικόνα 1.3 Σύστημα με ελεγκτή σε σειρά

Επιπλέον οι Raymond T.Stefani, Bahram Shahian,Clement J.Savant Jr και Gene H.Hostetter το 2002 ανέφεραν ότι ένα ή περισσότερα σήματα της εξόδου κατευθύνονται ως σήματα εισόδου στον ελεγκτή, αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ανατροφοδότηση** και το σύστημα πλέον ονομάζεται **σύστημα κλειστού βρόχου(closed loop system)**.

Με βάση τους Hebert Sira-Ramirez, Carlos Garcia Rodriguez, John Cortes-Romero και Alberto Luviano-Juarez το 2014 ένα σύστημα κλειστού βρόχου αποτελείται από τον ελεγκτή, τον ενεργοποιητή που καθορίζει τις εντολές που θα σταλούν στο σύστημα και στην ανατροφοδότηση υπάρχει ο μετατροπέας που μετατρέπει το σήμα της εξόδου στην ίδια μορφή που είναι το σήμα της εισόδου. Στη συνέχεια γίνεται πρόσθεση των σημάτων μέσω αθροιστή για να καθοριστεί η δράση του ελεγκτή έτσι ώστε να μειώσει την διαφορά μεταξύ της εξόδου και της επιθυμητής τιμής. Η διαφορά μεταξύ της εξόδου του συστήματος και της επιθυμητής τιμής ονομάζεται **σφάλμα ελέγχου**.



Εικόνα 1.4 Σύστημα με ανάδραση

Επιπροσθέτως οι Hebert Sira-Ramirez, Carlos Garcia Rodriguez, John Cortes-Romero και Alberto Luviano-Juarez το 2014 πρότειναν τρεις λόγους για τη χρησιμότητα της ανατροφοδότησης:

- ✓ Ο ελεγκτής μπορεί να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά τις διαταραχές που επηρεάζουν το σύστημα διότι απορρίπτει την επίδραση των διαταραχών και προσπαθεί να διατηρήσει την έξοδο του συστήματος όσο πιο κοντά γίνεται στην επιθυμητή τιμή. Επομένως διαταραχή είναι το άγνωστο σήμα που επηρεάζει ανεπιθύμητα δημιουργώντας συνήθως δυσμενή αποτελέσματα στην έξοδο του συστήματος.
- ✓ Βελτιώνει την απόδοση του συστήματος ακόμη και στην αβεβαιότητα του μοντέλου. Η αβεβαιότητα εμφανίζεται όταν δεν γνωρίζουμε ή δεν μπορούμε να προβλέψουμε τις εισόδους του συστήματος λόγω διαταραχών και όταν δεν γνωρίζουμε την δυναμική ενός συστήματος.
- ✓ Σταθεροποιεί ένα ασταθές σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.4 Μοντέλο

Όπως αναφέρει ο B.Wayne Bequette το 1998, **μοντέλο** είναι μια μικρή αναπαράσταση ενός σχεδιαζόμενου ή υπάρχοντος αντικειμένου. Τα μοντέλα αποτελούνται από εξισώσεις:

- I. Αλγεβρικές
- II. Διαφορικές
- III. Μερικής διαφορίσης

Για την εύρεση του μοντέλου κάνουμε διάφορα πειράματα, δηλαδή διεγείρετε/διεγείρονται την/τις είσοδο/εισόδους ενός συστήματος και παρατηρούνται τα αποτελέσματα στην/στις έξοδο/εξόδους του συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.5 Κατηγορίες μοντέλων

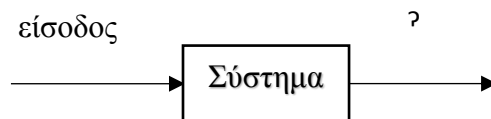
Ο Dan Neacsulescu το ανέφερε ότι τα μοντέλα χωρίζονται σε 3 κατηγορίες:

- 1. Μοντέλα συνεχούς χρόνου(continuous time models)**
Τα μοντέλα αυτά περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.
- 2. Μοντέλα διακριτού χρόνου(discrete time models)**
Σε αυτά τα μοντέλα ο χρόνος είναι χωρισμένος σε ίσα διαστήματα και περιγράφονται και αυτά με διαφορικές εξισώσεις.
- 3. Μοντέλα διακριτών συμβάντων(discrete events models)**
Τα μοντέλα αυτά αναπαριστούν μεταβολές μεταβλητών κατάστασης που γίνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.6 Τεχνικές εύρεσης μοντέλου

Όμως μπορεί να έχουμε κάποια προβλήματα για την εύρεση του μοντέλου, για παράδειγμα να μην γνωρίζουμε τις εισόδους ή τις εξόδους ή το ίδιο το σύστημα ή κάποιο συνδυασμό αυτών. Γι' αυτό οι Mohd. Ehmer Khan και Farmeena Khan το 2012 ανέλυσαν 3 τεχνικές:

- ❖ 1^η τεχνική είναι το **λευκό κουτί**(white box) στο οποίο είναι γνωστή η είσοδος και το σύστημα και αναζητείται η έξοδος, επομένως με τις πληροφορίες που συλλέγονται από την είσοδο και το σύστημα, μπορεί να βρεθεί η έξοδος.



Εικόνα 1.5 Λευκό κουτί

- ❖ 2^η τεχνική είναι το **μαύρο κουτί**(black box) στο οποίο είναι γνωστή η είσοδος και η έξοδος και ως ζητούμενο είναι το σύστημα, επομένως με τις πληροφορίες που συλλέγονται από την είσοδο και την έξοδο εντοπίζεται το σύστημα.



Εικόνα 1.6 Μαύρο κουτί

- ❖ 3^η τεχνική είναι το **γκρι κουτί**(grey box) στο οποίο ως γνωστά είναι η έξοδος και το σύστημα και άγνωστη είναι η είσοδος του συστήματος, άρα συλλέγοντας πληροφορίες από την έξοδο και το σύστημα μπορεί να βρεθεί η είσοδος.



Εικόνα 1.7 Γκρι κουτί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.7 Η έννοια της μοντελοποίησης και προσομοίωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει ανάλυση της μοντελοποίησης, της προσομοίωσης καθώς και θα εξηγηθεί η διαφορά μεταξύ προσομοίωσης και εξομοίωσης.

Συμπερασματικά, από τον ορισμό του μοντέλου μπορεί να ειπωθεί ο ορισμός **μοντελοποίηση (modeling)**, που είναι η διαδικασία εύρεσης του μοντέλου.

Ο Μ. Ρουμελιώτης το 2001 ανέφερε ότι, η δημιουργία μοντέλων για προσομοίωση, έχει ως στόχους:

1. Τη μελέτη και τη συμπεριφορά ενός συστήματος
2. Τον έλεγχο υποθέσεων ή θεωριών για την παρατηρούμενη συμπεριφορά ενός συστήματος
3. Την πρόβλεψη ή εκτίμηση της μελλοντικής συμπεριφοράς ενός συστήματος.

Ο Mc Graw-Hill το 2003 έδωσε τον ορισμό της **προσομοίωσης(simulation)** ως τη μίμηση της συμπεριφοράς ενός συστήματος συνήθως με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή ή με τη χρήση ειδικού εξοπλισμού.

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι το καλύτερο εργαλείο προσομοίωσης διότι υποστηρίζει πολλά προγράμματα που διαθέτουν πολλές δυνατότητες για προσομοίωση όπως είναι το matlab, mathematica, maple και υπάρχουν και άλλα πολλά, αλλά αυτά είναι τα πιο διαδεδομένα.

Όπως ανέφερε ο Μ. Ρουμελιώτης το 2001, η προσομοίωση αποτελείται από 3 φάσεις:

- 1) Η κατασκευή του μοντέλου προσομοίωσης στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.
- 2) Η εκτέλεση ή το τρέξιμο του μοντέλου στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.
- 3) Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης.

Με τη χρήση της προσομοίωσης¹ προκύπτουν κάποια θετικά χαρακτηριστικά, που είναι:

- ✓ Η προσομοίωση είναι οικονομική, ασφαλής και ηθική διότι μπορούν να διεξαχθούν επικίνδυνα πειράματα συστημάτων στον εικονικό κόσμο αντί στον πραγματικό.
- ✓ Η προσομοίωση πλέον ανταποκρίνεται όλο και πιο πολύ στη πραγματικότητα διότι επιτρέπει τη διαμόρφωση παραμέτρων του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται το σύστημα που αναπαρίσταται από το μοντέλο.
- ✓ Η προσομοίωση διεξάγεται πιο γρήγορα από τον πραγματικό χρόνο, που επιτρέπει αποτελεσματικότερη ανάλυση και δημιουργία εναλλακτικών λύσεων για τη βελτιστοποίηση του συστήματος που αναπαριστάται από το μοντέλο.
- ✓ Η προσομοίωση επιτρέπει την ανάλυση και ενσωμάτωση συστημάτων που ο συνδυασμός αυτών αποτελούν ένα τελικό σύστημα.

¹ Modeling and Simulation https://en.wikipedia.org/wiki/Modeling_and_simulation αναρτήθηκε 24 Απριλίου 2009 και πρόσβαση 17 Ιουνίου το 2017.

Η **εξομοίωση** είναι μια ιδεατή ή εικονική μηχανή που μπορεί να περιγράψει την συμπεριφορά ή λειτουργία μιας πραγματικής μηχανής ή διάταξης ή συστήματος μηχανής-περιβάλλοντος.

Για να επισημανθεί η διαφορά της προσομοίωσης και εξομοίωσης θα δοθεί ένα τυπικό παράδειγμα² εξομοίωσης και προσομοίωσης:

Το μηχάνημα στο οποίο οι πιλότοι αισθάνονται, σε μεγάλο βαθμό, ότι πιλοτάρουν ένα πραγματικό αεροπλάνο ονομάζεται **εξομοιωτής πτήσεων**(εικόνα 1.6), ενώ το λογισμικό που παρουσιάζει ένα βίντεο πτήσης και δεν δίνει την αίσθηση ότι πιλοτάρει το αεροπλάνο, ονομάζεται **προσομοιωτής πτήσεων**(εικόνα 1.7).



Εικόνα 1.8 Εξομοίωση



Εικόνα 1.9 Προσομοίωση

Αφού δόθηκε η εξήγηση της έννοιας μοντελοποίησης όπως και της προσομοίωσης και διαφοράς μεταξύ προσομοίωσης και εξομοίωσης, πλέον μπορεί να δοθεί ολοκληρωμένος ο ορισμός της μοντελοποίησης και προσομοίωσης.

Μοντελοποίηση και προσομοίωση³ είναι η χρήση μοντέλων για την αναπαράσταση ενός συστήματος σε εικονικό περιβάλλον. Με τη μοντελοποίηση και προσομοίωση επιτυγχάνεται η κατανόηση συμπεριφοράς ενός συστήματος χωρίς να δοκιμάζει το πραγματικό σύστημα στο πραγματικό κόσμο.

Η μοντελοποίηση και προσομοίωση επιτυγχάνει:

- **Μείωση του κόστους.** Μειώνει το κόστος όσον αφορά σε ακριβά πειράματα ενός συστήματος αφού οι δοκιμές διεξάγοντες σε εικονικό περιβάλλον.
- **Αύξηση ποιότητας προϊόντων και συστημάτων.** Επιτυγχάνεται αύξηση ποιότητας λόγω των διάφορων δοκιμών που μπορούν να γίνουν για βελτιστοποίηση σε ένα προϊόν και σε ένα σύστημα.
- **Ανάπτυξη επιχειρηματολογίας** για την ανάλυση ενός συστήματος που αναπαριστάτε από ένα μοντέλο.
- **Αρχειοθέτηση** όλων των δοκιμών που έγιναν σε ένα σύστημα, των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν στη φάση της προσομοίωσης και των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν.

² Εξομοίωση και προσομοίωση <http://users.sch.gr/symfo/sholio/sizitontas/o/17.exomiosi.htm> αναρτήθηκε 2 Ιουνίου 2010 και πρόσβαση 17 Ιουνίου 2017.

³ Modeling and Simulation https://en.wikipedia.org/wiki/Modeling_and_simulation αναρτήθηκε 24Απριλίου 2009 και πρόσβαση 17 Ιουνίου 2017.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.8 Αστοχίες της μοντελοποίησης και προσομοίωσης

Με βάση τον George S. Fishman το 2000 είπε ότι άσχετα με το χρόνο και τη προσπάθεια που θα αφιερώσει ένας ερευνητής για τη μοντελοποίηση μπορεί να μην συλλέξει χρήσιμα αποτελέσματα επομένως οδηγείται στην αποτυχία λόγω έλλειψης γνώσης του συστήματος, αλλά ο ερευνητής οδηγείται πάλι στην αποτυχία επειδή δίνει βαρύτητα στη γλώσσα προσομοίωσης και στα εργαλεία της αντί να τα αξιοποιήσει εφευρετικά, γι' αυτό με τη σωστή εξισορρόπηση της μοντελοποίησης και προσομοίωσης αυξάνεται η πιθανότητα επιτυχίας. Μια άλλη αστοχία της μοντελοποίησης και προσομοίωσης είναι ότι κατά τη προσομοίωση του μοντέλου δεν μπορεί να γίνει καλή πρόβλεψη πέρα από το εύρος του μοντέλου διότι το μοντέλο παράγει αναπόφευκτα αριθμούς που χρησιμεύουν ως προσέγγιση των πραγματικών τιμών των αγνώστων μέτρων απόδοσης. Επομένως ένας ερευνητής πρέπει να παρατηρήσει: 1) κατά πόσο οι παραγόμενες τιμές από το μοντέλο της προσομοίωσης υπερεκτιμούν ή υποτιμούν τις πραγματικές τιμές και 2) πόσο κοντά βρίσκονται οι παραγόμενες τιμές στις πραγματικές τιμές. Άρα με την αμέλεια των δυο παραπάνω παρατηρήσεων γίνεται κατάχρηση του μοντέλου στη προσομοίωση και δεν μπορεί να αναγνωρισθεί το εύρος εφαρμογής της εξόδου του μοντέλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Βασικά μαθηματικά και χρήσιμοι μέθοδοι

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα γίνει αναφορά στις παραγώγους και σε βασικούς τύπους αυτών, σε νόμους της φυσικής και σε φυσικά μεγέθη, στις διαφορικές εξισώσεις, στη μέθοδο LaGrange, στη γραμμικοποίηση με σειρά Taylor και στο μετασχηματισμό Laplace που ο συνδυασμός αυτών αποτελούν χρήσιμα εργαλεία και τα πρώτα βήματα για την εύρεση του μοντέλου που θα φανούν στα επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.1 Παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ με άγνωστη μεταβλητή το x , η **παράγωγος**⁴ της f στο x είναι η μεταβολή της μεταβλητής x που ως αποτέλεσμα έχει την αλλαγή της τιμής της συνάρτησης. Αν η $f(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση του x δηλαδή το γράφημα της

⁴ Παράγωγος <https://el.wikipedia.org/wiki/Παράγωγος> αναρτήθηκε 23 Αυγούστου 2007 και πρόσβαση 19 Ιουνίου 2017.

συνάρτησης $f(x)$ είναι μια ευθεία γραμμή, τότε η $f(x)$ είναι της μορφής: $f(x)=y=ax+b$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και το a είναι η κλίση.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Η παράγωγος συμβολίζεται με: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ή $f'(x)$

Και η μερική παράγωγος συμβολίζεται με: $\frac{\partial y}{\partial x}$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln(a)a^x$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- $f(x) = \eta\mu(x) \Rightarrow f'(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x) \Rightarrow f'(x) = -\eta\mu(x)$
- $f(x) = \varepsilon\varphi(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}$
- $f(x) = \tau\acute{o}\xi\omicron\eta\mu(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \tau\acute{o}\xi\omicron\sigma\upsilon\nu(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \tau\acute{o}\xi\omicron\varepsilon\varphi(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Βασικοί κανόνες παραγώγισης:

- **Κανόνας σταθερής συνάρτησης με $f(x)=a$** , με $f(x)$ σταθερή συνάρτηση και a πραγματικός αριθμός, τότε:
 $f'(x) = (a)' = 0$ (2.2)

- **Κανόνας αθροίσματος:**
 $(a + f(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$ (2.3)
Ισχύει για κάθε συνάρτηση f και g και για κάθε a, b πραγματικοί αριθμοί.

- **Κανόνας γινομένου:**

$$((f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2.4)$$

Ισχύει για κάθε συνάρτηση f και g.

- **Κανόνας πηλίκου:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (2.5)$$

Ισχύει για κάθε συνάρτηση f και g, με $g(x) \neq 0$.

- **Κανόνας αλυσίδας εάν $f(x)=h(g(x))$:**

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (2.6)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.2 Ολοκληρώματα

Έστω μια συνάρτηση f ανεξάρτητη από τη μεταβλητή x και βρίσκεται στο διάστημα D που το διάστημα έχει άκρα a και b τότε το ολοκλήρωμα⁵ συμβολίζεται:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (2.7)$$

Το παραπάνω ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** διότι έχει άκρα τα a και b. Ενώ **αόριστο ολοκλήρωμα** είναι το ολοκλήρωμα που δεν έχει άκρα αφού δεν προσδιορίζουμε σε πιο διάστημα ολοκληρώνουμε και συμβολίζεται:

$$\int F(x)dx \quad (2.8)$$

Ο όρος για το αόριστο ολοκλήρωμα μπορεί να σημαίνει και αντιπαράγωγο ή παράγουσα μιας συνάρτησης f δηλαδή:

- $\int_b^x f'(x)dx = f(x) + c$
- $(\int_b^x f(x)dx)' = f(x)$

Όπου C μια πραγματική σταθερά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.3 Διαφορικές εξισώσεις

Η γνώση στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι το επόμενο βήμα μετά την εφαρμογή των μεγεθών, νόμων και υλικών στοιχείων της φυσικής για την εύρεση του μοντέλου.

Ο Ζαγούρας Χαράλαμπος Γ. και Γεωργίου Δημήτριος Ν. το 2009 ανέφεραν τον ορισμό της **συνήθους διαφορικής εξίσωσης**, καλείται κάθε εξίσωση που συνδέει μια ανεξάρτητη μεταβλητή x και μια εξαρτημένη y(x) και τις παραγώγους της εξαρτημένης ως προς την ανεξάρτητη, δηλαδή μία σχέση της μορφής:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (2.9)$$

⁵ Ολοκλήρωμα <https://el.wikipedia.org/wiki/Ολοκλήρωμα> αναρτήθηκε 23 Αυγούστου 2007 και πρόσβαση 19 Ιουνίου 2017.

Όπου $n=1,2,\dots$ και $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n} \equiv \frac{d^n y}{dx^n}$ η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $y(x)$.

Επίσης ο Ζαγούρας Χαράλαμπος Γ. και Γεωργίου Δημήτριος Ν. το 2009 έδωσαν τους ορισμούς της τάξης και του βαθμού. **Τάξη** ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγωγίσις μιας διαφορικής εξίσωσης. **Βαθμός** ονομάζεται ο βαθμός της μεγαλύτερης τάξης παραγώγου που διαθέτει μια διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 12y = 4x$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι 4^{ης} τάξης και πρώτου βαθμού.

Επιπλέον, ο Ζαγούρας Χαράλαμπος Γ. και Γεωργίου Δημήτριος Ν. το 2009 ανέφεραν ότι μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμικής τάξεως n με άγνωστη συνάρτηση y και ανεξάρτητη μεταβλητή x και είναι της μορφής:

$$A_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_1(x) \frac{dy}{dx} + A_0(x)y = B(x) \quad (2.10)$$

Όπου A_0, A_1, \dots, A_n και B είναι γνωστές συναρτήσεις που εξαρτώνται μόνο από την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Παράδειγμα:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

Κεφάλαιο 2.4 Νόμοι φυσικής και φυσικά φαινόμενα

Αφού επιλέξουμε ένα σύστημα, στο σύστημα θα εμφανίζονται κάποια φυσικά φαινόμενα και για τον λόγο αυτό θα εφαρμόζονται κάποιοι νόμοι της φυσικής. Ως επιστήμη η μοντελοποίηση και προσομοίωση και γενικότερα τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου δεν μελετούν, ούτε περιγράφουν τους νόμους τη φυσικής και τα φυσικά φαινόμενα που δημιουργούνται στα συστήματα αλλά παρατηρούν την εμφάνιση των φυσικών φαινομένων και εφαρμόζουν τους νόμους της φυσικής.

Ο παρακάτω πίνακας (πίνακας 2.1) απεικονίζει βασικά φαινόμενα και βασικούς νόμους φυσικής που εφαρμόζονται στην εύρεση ενός μοντέλου.

Πίνακας 2.1 Βασικά φαινόμενα, βασικά μεγέθη και βασικοί νόμοι φυσικής

Φαινόμενο:		Μηχανικό	Περιστροφικό	Ηλεκτρικό	Μαγνητικό	Θερμικό	Υδραυλικό
Μεγέθη:	1. Ποσοτικό μέγεθος	Μετατόπιση x	Γωνία περιστροφής φ	Ηλεκτρικό Φορτίο Q	Μαγνητική Ροή Φ	Θερμότητα Q	Όγκος ρευστού Q
	1^η παράγωγος	Ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Ηλεκτρική ένταση $i = \frac{dQ}{dt}$	Τάση $u = \frac{d\Phi}{dt}$	Παροχή θερμότητας $q = \frac{dQ}{dt}$	Παροχή Ρευστού $q = \frac{dQ}{dt}$
	2^η παράγωγος	Επιτάχυνση $\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	-	-
	2. Ενεργειακό μέγεθος	Δύναμη $F = \frac{dW}{dx}$	Ροπή $M = \frac{dW}{d\varphi}$	Ηλεκτρική τάση $u = \frac{dW}{dQ}$	Ένταση $i = \frac{dW}{d\Phi}$	Θερμοκρασία $\theta = \frac{dW}{dQ}$	Πίεση $p = \frac{dW}{dQ}$
Νόμοι:	1. Ποσοτικός νόμος	-	-	$\sum i = 0$ σε κόμβο	$\sum u = 0$ σε βρόχο	$\sum q = 0$ σε σύστημα	$\sum q = 0$ σε σύστημα
	2. Ενεργειακός νόμος	$\sum F = 0$ σε σώμα	$\sum M = 0$ σε σώμα	$\sum u = 0$ σε βρόχο	$\sum i = 0$ σε κόμβο	-	$\sum p = 0$ σε επιφάνεια
Υλικά στοιχεία:	1. Στοιχείο απώλειας ενέργειας	Τριβή κίνησης $F = B v$	Τριβή περιστροφής $M = B \omega$	Ηλεκτρική αντίσταση $u = i R$	Αγωγιμότητα $i = \frac{1}{R} u$	Θερμική αντίσταση $\theta = R q$	Υδραυλική αντίσταση $p = R q$
	2. Στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας	Ελαστικότητα $F = Kx$ $= K \int v dt$	Ελαστικότητα $M = K\varphi$ $= K \int \omega dt$	Ηλεκτρική χωρητικότητα $u = \frac{Q}{C}$ $= \frac{1}{C} \int i dt$	Αυτεπαγωγή $i = \frac{1}{L} \Phi$ $= \frac{1}{L} \int u dt$	Θερμική χωρητικότητα $\theta = \frac{Q}{C}$	Υδραυλική χωρητικότητα $p = \frac{Q}{C}$
	3. Στοιχείο απόδοσης ενέργειας	Μάζα $F = M\gamma$ $= M \frac{du}{dt}$	Ροπή αδράνειας $M = J a = J \frac{d\omega}{dt}$	Ηλεκτρική αυτεπαγωγή $u = L \frac{di}{dt}$	Χωρητικότητα $i = C \frac{du}{dt}$	-	-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.5 Μέθοδος Lagrange

Ο Δ. Καλλιγερόπουλος και η Σ. Βασιλειάδου το 2005 ανέφεραν ότι ο Lagrange διαπίστωσε κάποιες αναλογίες μεταξύ των ενεργειών που αναπτύσσονται από τα φυσικά φαινόμενα και το αποδεικνύει δημιουργώντας μια εξίσωση από έναν ενιαίο νόμο που είναι παρόμοιος με το 1^ο νόμος του Νεύτωνα. Δηλαδή, Ο Νεύτωνα⁶ στον 1^ο νόμο διατύπωσε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με μηδέν, παρόμοια και ο Lagrange ανέφερε ότι η συνισταμένη των ενεργειών ενός σώματος ισούται με μηδέν.

$$\sum W = 0$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης του Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F \quad (2.11)$$

Εξήγηση των όρων της εξίσωσης του Lagrange :

Όπου x είναι μια μεταβλητή του συστήματος.

Όπου $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ είναι η μεταβολή στο χρόνο της μεταβλητής x .

Όπου $F = \frac{dW}{dx}$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκεί αλλαγή στη μεταβλητή x .

Όπου $D = D(\dot{x})$ είναι οι ενεργειακές απώλειες του συστήματος και ονομάζονται ισχύς.

Όπου $V = V(x)$ είναι η ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα.

Όπου $J = J(x, \dot{x})$ είναι η ενέργεια που ανάγει το σύστημα.

Η εξίσωση Lagrange γράφεται τόσες φορές όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας ενός συστήματος. Δηλαδή, εάν σε ένα σύστημα ο βαθμός ελευθερίας είναι n , τότε η γενικευμένη μεταβλητή x θα παίρνει τιμές n ανεξαρτήτων μεγεθών: x_1, x_2, \dots, x_n , το ίδιο ισχύει και για τη γενικευμένη δύναμη F , που θα παίρνει τιμές: F_1, F_2, \dots, F_n .

Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας⁷ είναι ο αριθμός των n συντεταγμένων που χρειάζονται για να καθοριστεί η θέση ενός συστήματος που αποτελείται είτε από ένα ή περισσότερα σώματα σε κάποιο χώρο.

Οι γενικές πληροφορίες για τα μεγέθη και τις ενέργειες φυσικών φαινομένων της εξίσωσης Lagrange φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

⁶ Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα https://el.wikipedia.org/wiki/Νόμοι_κίνησης_του_Νεύτωνα αναρτήθηκε 12 Αυγούστου 2006 και πρόσβαση 20 Ιουνίου 2017.

⁷ Βαθμός ελευθερίας συστήματος https://el.wikipedia.org/wiki/Βαθμός_ελευθερίας_συστήματος αναρτήθηκε 3 Μαρτίου 2008 και πρόσβαση 20 Ιουνίου 2017.

Πίνακας 2.2 Γενικές πληροφορίες για τις ενέργειες φυσικών φαινομένων της εξίσωσης LaGrange

Φαινόμενα:	Μηχανικό	Περιστροφικό	Ηλεκτρικό	Μαγνητικό	Θερμικό	Υδραυλικό
Γενικευμένη μεταβλητή χ	Μετατόπιση χ	Γωνία περιστροφής φ	Ηλεκτρικό φορτίο Q	Μαγνητική ροή Φ	Θερμότητα Q	Όγκος ρευστού Q
Γενικευμένη ταχύτητα $\dot{\chi}$	Ταχύτητα v	Γωνιακή ταχύτητα ω	Ηλεκτρική ένταση i	Τάση u	Παροχή θερμότητας q	Παροχή ρευστού q
Γενικευμένη δύναμη F	Δύναμη F	Ροπή M	Τάση u	Ένταση i	Θερμοκρασία θ	Πίεση p
Απώλειες ισχύος $D = D(\dot{\chi})$	$\frac{1}{2}Bv^2$	$\frac{1}{2}B\omega^2$	$\frac{1}{2}Ri^2$	$\frac{1}{2R}u^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$
Γενικευμένη δυναμική ενέργεια $V = V(x)$	$\frac{1}{2}Kx^2$	$\frac{1}{2}K\varphi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2L}\Phi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$
Γενικευμένη κινητική ενέργεια $J = J(x, \dot{x})$	$\frac{1}{2}Mv^2$	$\frac{1}{2}J\omega^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Cu^2$	-	-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.6 Γραμμικοποίηση

Όταν κάποια συστήματα είναι μη γραμμικά δηλαδή σε αυτά δεν ισχύει ο νόμος της υπέρθεσης, χρησιμοποιείτε μια μέθοδο που ονομάζεται γραμμικοποίηση για τη μετατροπή του μη γραμμικού συστήματος σε γραμμικό εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor.

Οι Δημητρακούδης Δ., Θεωδόρου Ι., Κικκιλιάς Π., Κουρής Ν. και Παλαμούρδας Δ. το 2001 ανέφεραν τον τύπο του Taylor:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + R_n(x) \quad (2.12)$$

Το $R_n(x)$ ονομάζεται υπόλοιπο Lagrange ή συμπληρωματικός όρος και δίνεται από τον τύπο:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (2.13)$$

Όπου $\xi = \alpha + \theta(x-\alpha)$ με $0 < \theta < 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.7 Γραμμική άλγεβρα

Ο Γεωργίου Δημήτριος μαζί με τους Κούγιας Ιωάννης και Μεγαρίτης Θανάσης το 2012 ανέφεραν τον ορισμό του πίνακα, που ένας πίνακας A είναι η ορθογώνια διάταξη $m \cdot n$ με πλήθος στοιχείων a_{ij} με $i=1, \dots, m$ και $j=1, \dots, n$. Όπου m γραμμές και όπου n στήλες και αποτελείται από ένα σώμα K που τα m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο Γεωργίου Δημήτριος μαζί με τους Κούγιας Ιωάννης και Μεγαρίτης Θανάσης το 2012 ανέφεραν ότι ένας πίνακας καλείται μοναδιαίος $n \times n$ όταν όλα τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου είναι ίσα με μονάδα.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ο Γεωργίου Δημήτριος μαζί με τους Κούγιας Ιωάννης και Μεγαρίτης Θανάσης το 2012 ανέφεραν ένας πίνακας A^T ονομάζεται ανάστροφος ενός πίνακα A όπου ο πίνακας A^T έχει ως γραμμές τις στήλες του πίνακα A και ως στήλες τις γραμμές του πίνακα A . Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ο Γεωργίου Δημήτριος μαζί με τους Κούγιας Ιωάννης και Μεγαρίτης Θανάσης το 2012 ανέφεραν **1) το άθροισμα** στο οποίο προστίθεται το κάθε στοιχείο ενός πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ που έχει $m \times n$ διαστάσεις με το κάθε στοιχείο ενός πίνακα $B = (\beta_{ij})$ που έχει $m \times n$ διαστάσεις, επομένως $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$, **2) τη διαφορά** μεταξύ ενός πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ με $m \times n$ διαστάσεις και ενός $B = (\beta_{ij})$ με $m \times n$ διαστάσεις, επομένως εφαρμόζεται η διαφορά των πινάκων: $A + (-B) = (\alpha_{ij} - \beta_{ij})$ και **3) το γινόμενο** που πολλαπλασιάζει έναν πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ με μια μεταβλητή k όπου $k \cdot A = (k \cdot \alpha_{ij})$ και

το γινόμενο μεταξύ του πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ με $m \times n$ διαστάσεις και

έναν πίνακα $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{np} \end{pmatrix}$ με $n \times p$ διαστάσεις και από το γινόμενο τους

προκύπτει ο πίνακας $\Gamma = (\gamma_{ij})$ με διαστάσεις $m \times p$ όπου $\gamma_{ij} = A_i \cdot B^j = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{in}\beta_{nj}$. Υπάρχουν και ιδιότητες του γινομένου που είναι: $A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$ και $A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$.

Παράδειγμα:

Έστω πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

1) Άθροισμα

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+3 \\ 5+6 & 7+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

2) Διαφορά

$$A + (-B) = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 3+(-4) \\ 5+(-6) & 7+(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Γινόμενο

Έστω $k=10$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 5 & 10 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 70 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$$

Ο Edminister Joseph A. το 1980 ανέφερε ότι η ορίζουσα $|A|$ ενός τετραγωνικού πίνακα A με $n \times n$ διαστάσεις όλων των $n!$ προσημασμένων γινομένων που σχηματίζονται από τα στοιχεία του πίνακα A . Για τον υπολογισμό της ορίζουσας παίρνοντας μια από τις γραμμές του πίνακα, τοποθετούνται πάνω από τα στοιχεία πρόσημα με την σειρά $+ - +$ και στη συνέχεια από τη γραμμή που επιλέγεται σβήνεται η υπάρχουσα γραμμή με τη στήλη που βρίσκεται το στοιχείο της συγκεκριμένης γραμμής και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα πολλαπλασιάζονται με χιαστί, εφαρμόζετε η ίδια διαδικασία για όλα τα στοιχεία της γραμμής που επιλέγεται από τον πίνακα. Παραδείγματα:

1) Έστω πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

Αυτός ο πίνακας είναι 2×2 επομένως η ορίζουσα θα είναι δεύτερης τάξης και θα πολλαπλασιαστούν τα στοιχεία του πίνακα A χιαστί.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

2) Έστω πίνακας $B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Ο πίνακας B είναι 3x3, άρα η ορίζουσα θα είναι τρίτης τάξης. Στη συνέχεια παίρνοντας την πρώτη γραμμή θα οριστούν τα πρόσημα πάνω από κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής τα + - + και μετά παίρνοντας το στοιχείο α_{11} και σβήνοντας την πρώτη γραμμή με τη πρώτη στήλη και τα στοιχεία που θα απομείνουν θα πολλαπλασιαστούν χιαστί και το γινόμενο τους θα πολλαπλασιαστεί με το α_{11} , για το στοιχείο α_{12} θα σβηστεί η πρώτη γραμμή και η δεύτερη στήλη και ότι στοιχεία μείνουν θα τα πολλαπλασιαστούν χιαστί και το γινόμενο τους θα πολλαπλασιαστεί με το α_{12} . Και τέλος για το στοιχείο α_{13} θα σβηστούν τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και της τρίτης στήλης και με τα στοιχεία που απομένουν θα πολλαπλασιαστούν χιαστί και το γινόμενο τους θα το πολλαπλασιαστεί με το α_{13} .

$$|B| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^+ & \alpha_{12}^- & \alpha_{13}^+ \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-\alpha_{12}) \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22})$$

Ο Edminister Joseph A. το 1980 ανέφερε τον κανόνα του Cramer και ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους, με την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα των γραμμικών εξισώσεων δεν είναι μηδέν. Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στη μεθοδολογία του κανόνα Cramer.

Έστω 3 γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους x_1, x_2, x_3 .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

Σε μιτροειδές μορφή είναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα με τα a είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Αν πολλαπλασιαστεί η πρώτη στήλη της ορίζουσας Δ με το x_1 . Θα γίνει:

$$x_1\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}x_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}x_1 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}x_1 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Αν την πρώτη στήλη της ορίζουσας $x_1\Delta$ προσθέτοντας τα στοιχεία της δεύτερης στήλης πολλαπλασιασμένα με x_2 και τα στοιχεία της τρίτης στήλης πολλαπλασιασμένα με x_3 , τότε:

$$x_1\Delta = \begin{vmatrix} (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3) & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ (\alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3) & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ (\alpha_{31}x_3 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3) & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ k_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ k_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Επομένως,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ k_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ k_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Φυσικά, πρέπει το $\Delta \neq 0$.

Όμοια θα για τα x_2, x_3 .

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & k_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & k_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & k_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & k_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & k_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Ο Γεωργίου Δημήτριος μαζί με τους Κούγιας Ιωάννης και Μεγαρίτης Θανάσης το 2012 ανέφεραν ότι η εύρεση για τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} γίνεται όταν η ορίζουσα ενός πίνακα A με διαστάσεις $m \times n$ είναι διάφορη του μηδενός δηλαδή $|A| \neq 0$ επομένως ο πίνακας A είναι

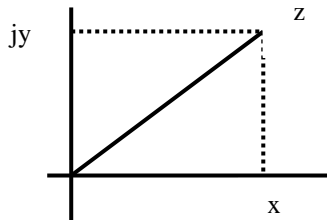
αντιστρέψιμος και υπολογίζεται ο A^{-1} από τον τύπο: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{12} & \cdots & \bar{\alpha}_{1n} \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & \cdots & \bar{\alpha}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{n1} & \bar{\alpha}_{n2} & \cdots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}^T$

όπου $\bar{\alpha}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|, i = 1 \dots m, j = 1 \dots, m$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.8 Μιγαδικοί αριθμοί

Ο Edminister Joseph A. το 1980 ανέφερε ότι ένας μιγαδικός αριθμός έχει ως μορφή $z=x+jy$ (όπως παρατηρούμε στην εικόνα 2.1) το x είναι το πραγματικό μέρος ενώ το y είναι το φανταστικό μέρος λόγω του συντελεστή j που αποδίδει έναν φανταστικό αριθμό. Το j ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και για το j ισχύει ότι $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, j^3 = j^2 \cdot j = -j, j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ και με παρόμοιο τρόπο κινείται για τις μεγαλύτερες δυνάμεις που μπορεί να παίρνει το j . Επίσης, μπορεί να γίνει άθροισμα μεταξύ μιγαδικών αριθμών, δηλαδή αν υπάρχουν 2

μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$, η πρόσθεση τους θα είναι $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$. Επιπλέον, ο πολλαπλασιασμός μεταξύ δυο μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$ γίνεται $z_1 z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + x_1 jy_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 =$
 $= x_1 x_2 + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) - y_1 y_2$. Και τέλος, μπορεί να γίνει και η διαίρεση μεταξύ μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$ που γίνεται ως εξής: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$.



Εικόνα 2.1 Μιγαδικός αριθμός σε διάγραμμα x-y

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.9 Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace⁸ πήρε το όνομα του από τον επιστήμονα που το ανακάλυψε, που ήταν ο Pierre Simon Laplace. Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace προσφέρει μια διαφορετική λειτουργική διατύπωση που διευκολύνει την ανάλυση της συμπεριφοράς ενός συστήματος αφού μετασχηματίζει τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια γραμμική απεικόνιση μιας συνάρτησης $f(t)$. Και τέλος, Ο μετασχηματισμός Laplace συμβολίζεται ως $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και μετατρέπει μια συνάρτηση $f(t)$ με πραγματικό πεδίο ορισμού $t(t \geq 0)$ σε $f(s)$ με όρισμα ένα μιγαδικό αριθμό s . Όπως φαίνεται στον παρακάτω ορισμό.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.14)$$

Στους παρακάτω πίνακες θα δοθούν οι γενικές ιδιότητες και βασικοί μετασχηματισμοί Laplace.

⁸ Laplace transform(Μετασχηματισμός Laplace) https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform αναρτήθηκε 26 Δεκεμβρίου 2001 και πρόσβαση 22 Ιουνίου 2017.

Πίνακας 2.3 Γενικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Επίπεδο t	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Επίπεδο s
Σταθερός συντελεστής	$ay(t)$		$aY(s)$
Άθροισμα	$y_1(t) + y_2(t)$		$Y_1(s) + Y_2(s)$
Πρώτη παράγωγος	$\frac{dy}{dt} = y(t)$		$sY(s) - y(0)$
Δεύτερη παράγωγος	$\frac{d^2y}{dt^2} = y(t)$		$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
n-οστή παράγωγος	$\frac{d^ny}{dt^n} = y^{(n)}(t)$		$s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$
Ολοκλήρωμα	$\int_0^t y(\tau) d\tau$		$\frac{1}{s}Y(s)$
Κλιμάκωση χρόνου	$y(\omega t)$		$\frac{1}{\omega}Y\left(\frac{s}{\omega}\right)$
Καθυστέρηση χρόνου	$y(t - T)$		$e^{-sT}Y(s)$
Εκθετική απόσβεση	$e^{-\sigma t}y(t)$		$Y(s + \sigma)$
Συνέλιξη	$\int_0^t y(t - \tau)x(\tau) d\tau$		$Y(s)X(s)$
Αρχική τιμή	$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t)$	=	$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$
Τελική τιμή	$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	=	$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$

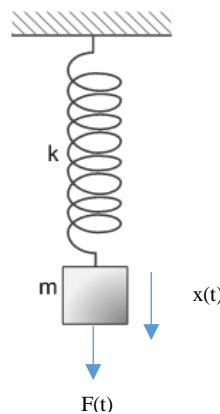
Πίνακας 2.4 Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Επίπεδο t	\mathcal{L} \rightarrow	Επίπεδο s
$\delta(t)$		1
1		$\frac{1}{s}$
t		$\frac{1}{s^2}$
t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\sigma t}$		$\frac{1}{s + \sigma}$
$te^{-\sigma t}$		$\frac{1}{(s+\sigma)^2}$
$\eta\mu\omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\eta\mu(\omega t + \varphi)$		$\frac{s\eta\mu\varphi + \omega\sigma\upsilon\nu\varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t}\eta\mu\omega t$		$\frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t}\sigma\upsilon\nu\omega t$		$\frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.10 Παραδείγματα

Ο Καλλιγερόπουλος Δ. και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα παράδειγμα για την εύρεση της διαφορικής εξίσωσης ενός μηχανικού συστήματος που αποτελείται από τη μάζα, τριβή και το ελατήριο όπως και ανέφεραν την εύρεση της διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο Lagrange και λύνεται ως εξής:

Σε σώμα μάζας m ασκείται μια εξωτερική δύναμη F η οποία προκαλεί μετατόπιση x στη μάζα m , άρα η είσοδος είναι η εξωτερική δύναμη F και η έξοδος το αποτέλεσμα της ασκούμενης δύναμης δηλαδή η μετατόπιση x . Λόγω της ταλάντωσης του σώματος μάζας m , το σώμα m αποκτά επιτάχυνση, τριβή κίνησης και λόγω του ελατηρίου έχουμε και την ελαστικότητα του ελατηρίου.



Εικόνα 2.2 Μάζα-ελατήριο

- Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα και με βάση τον πίνακα 2.1 ισχύει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με μηδέν, δηλαδή:

$$\sum F = 0$$

Επομένως

$$m\gamma + Bv + Kx = F$$

Και χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα 1.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx(t) &= F(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) &= \dot{F}(t) \end{aligned}$$

- Με τη μέθοδο Lagrange.
Υπάρχει $n=1$ βαθμός ελευθερίας και με βάση τον πίνακα 2.2 υπολογίζονται τα D, V και J .

$$\text{Απώλειες ισχύος: } D = \frac{1}{2} Bv^2 = \frac{1}{2} B\dot{x}^2(t)$$

$$\text{Δυναμική ενέργεια: } V = \frac{1}{2} Kx^2(t)$$

$$\text{Κινητική ενέργεια: } J = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2(t)$$

Από την εξίσωση του Lagrange(2.11)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F$$

Υπολογίζονται ξεχωριστά τα $\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}$, $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(t)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

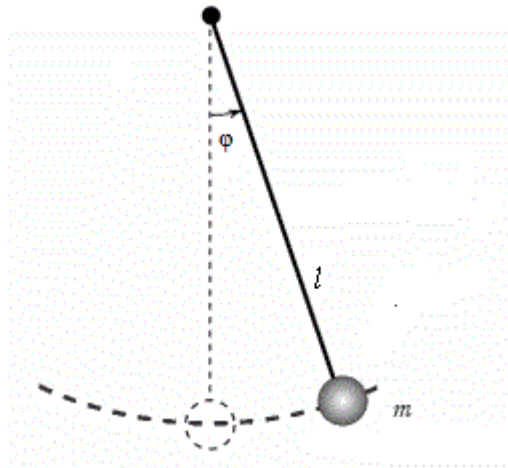
$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx(t)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = B\dot{x}(t)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση του Lagrange(2.11):

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ. και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα παράδειγμα γραμμικοποίησης του εκκρεμούς ως εξής:



Εικόνα 2.3 Εκκρεμές

Ένα εκκρεμές αποκτά κίνηση λόγω της ροπής M και δίνεται από την μη γραμμική εξίσωση:

$$M = mgl\sin\phi$$

Για να γίνει γραμμική εφαρμόζετε η σειρά Taylor(2.12) και γίνεται για αυτή τη περίπτωση:

$$M = M(\varphi_0) + M' \frac{\varphi - \varphi_0}{1!} \quad (2.15)$$

Και υπολογίζονται ξεχωριστά για $\varphi_0=0$.

$$M(\varphi_0) = mgl\eta\mu\varphi_0 = 0$$

$$M' = \frac{dM}{d\varphi} = mgl\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = mgl$$

$$\frac{\varphi - 0}{1} = \varphi$$

Άρα η εξίσωση(2.15) γίνεται γραμμική και έχει πλέον τη μορφή:

$$M = mgl\varphi$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Συνάρτηση μεταφοράς και χρονική απόκριση

Στο κεφαλαίο αυτό θα γίνει ανάλυση και εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς που αυτός είναι ο κύριος σκοπός της μοντελοποίησης.. Επίσης, θα εξηγηθούν οι μέθοδοι δημιουργίας λειτουργικών διαγραμμάτων και διαγραμμάτων ροής όπως και θα αναλυθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace. Στη συνέχεια, θα γίνει αναφορά στις αποκρίσεις των συστημάτων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης διότι είναι σκόπιμο να γίνει αναφορά σε μεγαλύτερης τάξης συστημάτων αφού έχουν παρόμοια συμπεριφορά με συστήματα 2^{ης} τάξης και τέλος θα λυθούν αναλυτικά παραδείγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.1 Συνάρτηση μεταφοράς

Η Αναστασία Ν. Βελώνη το 2011 ανέφερε ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου ενός συστήματος και ορίζεται ως το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου ως προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου με μηδενικές αρχικές συνθήκες.



Εικόνα 3.1 Σύστημα

Το σύστημα της εικόνας 3.1 που είναι μιας εισόδου και μιας εξόδου απεικονίζεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (3.1)$$

θα έχει ως συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.2)$$

Ορίζοντας τις αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου να είναι ίσες με μηδέν:

$$\left. \begin{aligned} y^{(k)}(0) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ x^{(i)}(0) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \right\}$$

Επίσης, η Αναστασία Ν. Βελώνη το 2011 ανέφερε ότι αν ονομαστούν μηδενικά(zeros) οι ρίζες του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς και πόλους(poles) οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, τότε η εξίσωση θα γίνει:

$$G(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (3.3)$$

Ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο(characteristic polynomial)** και η ανάλυση του έχει ως αποτέλεσμα τον έλεγχο προδιαγραφών του συστήματος. Αν θεωρηθεί ότι ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς είναι ίσος με το μηδέν τότε εμφανίζεται η **χαρακτηριστική εξίσωση(characteristic equation)** και από τις ρίζες της καθορίζεται η συμπεριφορά της απόκρισης του συστήματος. Τα z_1, z_2, \dots, z_m ονομάζονται **ρίζες** και τα p_1, p_2, \dots, p_n ονομάζονται **πόλοι** και το k είναι η **σταθερά ενίσχυσης ή κέρδος**.

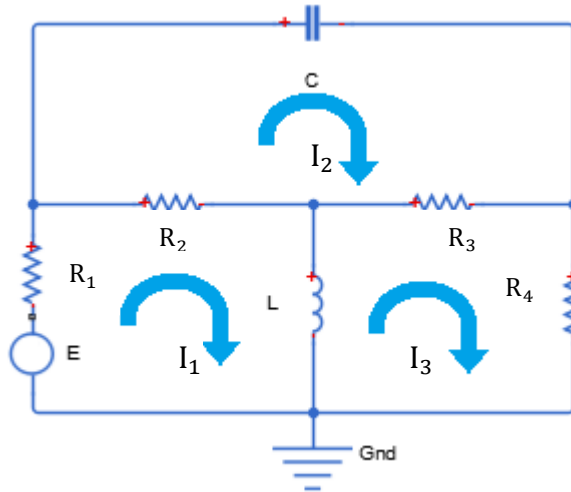
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.2 Εύρεση συνάρτηση μεταφοράς σε ηλεκτρικό κύκλωμα

Η εύρεση συνάρτηση μεταφοράς σε ηλεκτρικό κύκλωμα είναι μια περίπτωση πιο ξεχωριστή από την εύρεση συνάρτηση μεταφοράς σε ένα μηχανικό σύστημα γι' αυτό και θα αναλυθεί σε αυτό το κεφάλαιο.

Ο Καλλιγερόπουλος Δ. και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν 2 μεθόδους για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Η 1^η μέθοδος είναι η εντάσεων βρόχων και η 2^η είναι η τάσεων κόμβων. Μέσω παραδείγματος θα δοθεί η εφαρμογή των μεθόδων.

1^η μέθοδος εντάσεων βρόχων:

Η 1^η μέθοδος βασίζεται στον 2^ο νόμο Kirchhoff που λέει ότι σε ένα κύκλωμα, κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής(βρόχος) το άθροισμα των τάσεων ισούται με μηδέν. Στο παρακάτω κύκλωμα θα εφαρμοστεί η 1^η μέθοδο αναλυτικά. Στην εικόνα 3.2 διατίθεται ως είσοδος η πηγή εναλλασσόμενης τάσης V_A και ως έξοδος η τάση στα άκρα του πυκνωτή V_C . Όπου $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$ και E πηγή τάσης που είναι η είσοδος και η τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της αντίστασης R_4 είναι η έξοδος.



Εικόνα 3.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο εντάσεων βρόχων

Αφού υπάρχουν 3 βρόχοι επομένως θα εφαρμοστεί ο 2^ο νόμος Kirchhoff 3 φορές για κάθε βρόχο. Άρα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 2.1 για τους φυσικούς νόμους και τους πίνακες 2.3, 2.4 για το μετασχηματισμό Laplace,άρα οι εξισώσεις παίρνουν τις μορφές:

$$\begin{aligned}
 \text{1^{ος}βρόχος: } & I_1(t)R_1(t) + I_1(t)R_2(t) + L(t) \frac{dI_1}{dt} - I_2(t)R_2(t) - L(t) \frac{dI_3}{dt} = E(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \\
 & \rightarrow I_1(s)R_1(s) + I_1(s)R_2(s) + sI_1(s)L(s) - I_2(s)R_2(s) - sI_3(s)L(s) = \frac{E(s)}{s} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{2^{ος}βρόχος: } & I_2(t)R_2(t) + I_2(t)R_3(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I_2(t)dt - I_1(t)R_2(t) - I_3(t)R_3(t) = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \\
 & \rightarrow I_2(s)R_2(s) + I_2(s)R_3(s) + \frac{1}{sC(s)} I_2(s) - I_1(s)R_2(s) - I_3(s)R_3(s) = 0 \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3^{ος}βρόχος: } & I_3(t)R_3(t) + I_3(t)R_4(t) + L(t) \frac{dI_3}{dt} - I_2(t)R_3(t) - L(t) \frac{dI_1}{dt} = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \\
 & \rightarrow I_3(s)R_3(s) + I_3(s)R_4(s) + sI_3(s)L(s) - I_2(s)R_3(s) - sI_1(s)L(s) = 0 \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Όμως για τον πυκνωτή ισχύει: $i(t) = C \frac{du}{dt} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt$

Στη συνέχεια από τις 3 εξισώσεις ((3.4),(3.5),(3.6)) θα γραφτούν σε μιτροειδή μορφή και θα σχηματίσουν έναν πίνακα 3x3 για τα ηλεκτρικά στοιχεία, έναν πίνακα 1x3 για τα ρεύματα και άλλον ένα πίνακα 1x3 για τις πηγές τάσης. Στον πίνακα 3x3 λοιπόν θα γραφτούν:

Για το στοιχείο 1.1 τις τάσεις όλων των ηλεκτρικών στοιχείων που περιέχει ο 1^{ος} βρόχος.

Για το στοιχείο 1.2 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 2^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το στοιχείο 1.3 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 3^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το στοιχείο 2.1 τις τάσεις όλων των ηλεκτρικών στοιχείων που περιλαμβάνει ο 2^{ος} βρόχος.

Για το στοιχείο 2.2 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 2^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το στοιχείο 2.3 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το στοιχείο 3.1 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 3^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το στοιχείο 3.2 τις τάσεις των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} βρόχου με αρνητικό πρόσημο.

Για το 3.3 τις τάσεις όλων των ηλεκτρικών στοιχείων που περιέχει ο 3^{ος} βρόχος.

Για τον πίνακα 1x3:

Για το στοιχείο 1.1 το ρεύμα I_1 .

Για το στοιχείο 1.2 το ρεύμα I_2 .

Για το στοιχείο 1.3 το ρεύμα I_3 .

Για τον άλλον πίνακα 1x3:

Για το στοιχείο 1.1 την τάση της πηγής V_A .

Για το στοιχείο 1.2 θα πάρει την τιμή μηδέν αφού δεν υπάρχει στον δεύτερο βρόχο πηγή τάσης.

Για το στοιχείο 1.3 θα πάρει την τιμή μηδέν αφού δεν υπάρχει στον τρίτο βρόχο πηγή τάσης.

Άρα, οι πίνακες θα είναι:

$$\begin{bmatrix} R_1(s) + R_2(s) + sL(s) & -R_2(s) & -sL(s) \\ -R_2(s) & R_2(s) + R_3(s) + \frac{1}{sC(s)} & R_3(s) \\ -sL(s) & -R_3(s) & R_3(s) + R_4(s) + sL(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας τα $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1H$, $C = 1F$.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 + s & -1 & -s \\ -1 & 2 + \frac{1}{s} & -1 \\ -s & -1 & 2 + s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Θα διωχτεί το κλάσμα από το στοιχείο 3.3 πολλαπλασιάζοντας την 2^η γραμμή με τον παρονομαστή του κλάσματος δηλαδή με το s .

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+s & -1 & -s \\ -s & 2s+1 & -s \\ -s & -1 & 2+s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{R} \qquad \qquad \underline{I} \qquad \qquad \underline{V}$

Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm στα άκρα του πυκνωτή:

$$I_3(s) = \frac{V_{R_4}(s)}{R_4(s)} = V_{R_4}(s) \quad (3.7)$$

Στη συνέχεια θα βρεθούν οι ορίζουσες με τον κανόνα Cramer.

$$\begin{aligned} \underline{|R|} = \Delta &= \begin{vmatrix} 2+s^+ & -1^- & -s^+ \\ -s & 2s+1 & -s \\ -s & -1 & 2+s \end{vmatrix} = \\ &= (2+s) \begin{vmatrix} 2s+1 & -s \\ -1 & 2+s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -s & -s \\ -s & 2+s \end{vmatrix} + (-s) \begin{vmatrix} -s & 2s+1 \\ -s & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (2+s)[4s+2s^2+2+s-s] + [-2s-s^2-s^2] - s[s+2s^2-s] = \\ &= 8s+4s^2+4+4s^2+2s^3+2s-2s-2s^2-s^2-2s^3-s^2 = \\ &= 4s^2+8s+4 \end{aligned}$$

Τώρα βρίσκετε το Δ_2 .

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2+s^+ & \frac{E(s)^-}{s} & -s^+ \\ -s & 0 & -s \\ -s & 0 & 2+s \end{vmatrix} = \\ &= (2+s) \begin{vmatrix} 0 & -s \\ 0 & 2+s \end{vmatrix} - \left(\frac{E(s)}{s}\right) \begin{vmatrix} -s & -s \\ -s & 2+s \end{vmatrix} + (-s) \begin{vmatrix} -s & 0 \\ -s & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{E(s)}{s}(2s^2+2s) = E(s)(2s+2) \\ I_3 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{E(s)(2s+2)}{4s^2+8s+4} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και το I_3 από τον νόμο του Ohm(3.7):

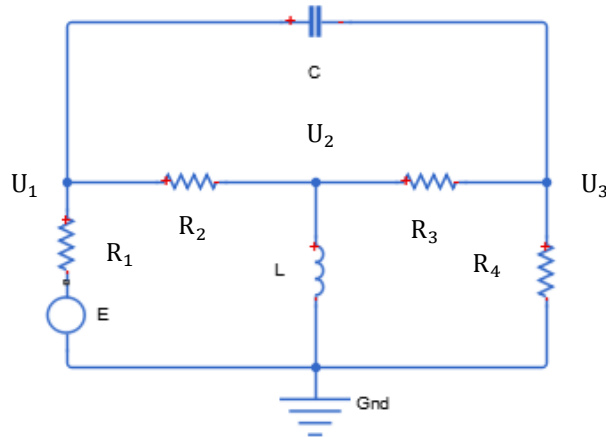
$$V_{R_4}(s) = \frac{E(s)(2s+2)}{4s^2+8s+4} \Rightarrow V_{R_4}(s)(4s^2+8s+4) = E(s)(2s+2)$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$\Rightarrow \frac{V_{R_4}(s)}{E(s)} = \frac{(2s+2)}{4s^2+8s+4} \Rightarrow \frac{V_{R_4}(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{2s^2+4s+2}$$

2^η μέθοδος τάσεις κόμβων:

Η 2^η μέθοδος βασίζεται στον 1^ο νόμο του Kirchhoff που αναφέρει ότι το σύνολο των ρευμάτων που εισέρχεται σε ένα κόμβο ισούται με το σύνολο των ρευμάτων που εξέρχεται από αυτό τον κόμβο. Στο κύκλωμα που απεικονίζεται στην εικόνα 3.2 θα εφαρμοστεί η 2^η μέθοδος. Και εδώ θα ισχύουν: $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1H$, $C = 1F$. Όπου E είναι η τάση πηγής δηλαδή, η είσοδος και $V_{R_4}(t)$ είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης R_4 δηλαδή, η έξοδος.



Εικόνα 3.3 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο τάσεων κόμβων

Στην εικόνα 3.3 παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 κόμβοι, επομένως θα προκύψει ένας 3x3 πίνακας και θα προκύψουν 2 πίνακες 1x3.

Εφαρμόζοντας τον 1^ο νόμο Kirchhoff για κάθε κόμβο και χρησιμοποιώντας τον πίνακα 2.1 για τους νόμους της φυσικής και τους πίνακες 2.3 και 2.4 για το μετασχηματισμό Laplace:

$$\text{Για τα πηνία θα ισχύει: } V(t) = L(t) \frac{di}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L(t)} \int_0^t V(t) dt$$

1^{ος} κόμβος:

$$\begin{aligned} \frac{U_1(t)}{R_1(t)} + \frac{U_1(t)}{R_2(t)} + C(t) \frac{dU_1}{dt} - \frac{U_2(t)}{R_2(t)} - C(t) \frac{dU_3}{dt} &= \frac{E(t)}{R_1(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \frac{U_1(s)}{R_1(s)} + \frac{U_1(s)}{R_2(s)} + sC(s)U_1(s) - \frac{U_2(s)}{R_2(s)} - sC(s)U_3(s) &= \frac{E(s)}{sR_1(s)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

2^{ος} κόμβος:

$$\begin{aligned} \frac{U_2(t)}{R_2(t)} + \frac{U_2(t)}{R_3(t)} + \frac{1}{L(t)} \int_0^t U_2(t) dt - \frac{U_1(t)}{R_2(t)} + \frac{U_3(t)}{R_3(t)} &= 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \frac{U_2(s)}{R_2(s)} + \frac{U_2(s)}{R_3(s)} + \frac{U_2(s)}{sL(s)} - \frac{U_1(s)}{R_2(s)} + \frac{U_3(s)}{R_3(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

3^{ος} κόμβος:

$$\frac{U_3(t)}{R_3(t)} + \frac{U_3(t)}{R_4(t)} + C(t) \frac{dU_3}{dt} - \frac{U_2(t)}{R_3(t)} - C(t) \frac{dU_1}{dt} = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U_3(s)}{R_3(s)} + \frac{U_3(s)}{R_4(s)} + sC(s)U_3(s) - \frac{U_2(s)}{R_3(s)} - sC(s)U_1(s) = 0 \quad (3.10)$$

Όπως και στην 1^η μέθοδο έτσι και στην 2^η μέθοδο ο πίνακας 3x3 θα αποτελείται:

Το στοιχείο 1.1 είναι τα ρεύματα των ηλεκτρικών στοιχείων που βρίσκονται κοντά στον 1^ο κόμβο.

Το στοιχείο 1.2 είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 2^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 1.3 είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 3^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 2.1 είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 2^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 2.2 είναι τα ρεύματα των ηλεκτρικών στοιχείων που βρίσκονται κοντά στον 2^ο κόμβο.

Το στοιχείο 2.3 είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 3.1. είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 1^{ου} και 3^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 3.2 είναι τα ρεύματα των κοινών ηλεκτρικών στοιχείων μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} κόμβου.

Το στοιχείο 3.3 είναι τα ρεύματα των ηλεκτρικών στοιχείων που βρίσκονται κοντά στον 3^ο κόμβο.

Ο πίνακας 1x3 θα περιέχει τις τάσεις στους κόμβους.

Ο άλλος πίνακας 1x3 θα περιέχει τα ρεύματα των κόμβων.

Σε μιτροειδή μορφή οι εξισώσεις (3.8),(3.9) και (3.10) θα γίνουν:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1(s)} + \frac{1}{R_2(s)} + sC(s) & -\frac{1}{R_2(s)} & -sC(s) \\ -\frac{1}{R_2(s)} & \frac{1}{R_2(s)} + \frac{1}{R_3(s)} + \frac{1}{sL(s)} & -\frac{1}{R_3(s)} \\ -sC(s) & -\frac{1}{R_3(s)} & \frac{1}{R_3(s)} + \frac{1}{R_4(s)} + sC(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ sR_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση των $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$.

$$\begin{bmatrix} 2 + s & -1 & -s \\ -1 & 2 + \frac{1}{s} & -1 \\ -s & -1 & 2 + s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θα πολλαπλασιαστεί με το s την δεύτερη γραμμή για να μην υπάρχουν κλάσματα στον πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2+s & -1 & -s \\ -s & 2s+1 & -s \\ -s & -1 & 2+s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{G} \qquad \qquad \qquad \underline{V} \qquad \qquad \underline{I}$

Θα εφαρμοστεί ο νόμος του Ohm στα άκρα της αντίστασης R_4 :

$$I_3(s) = \frac{V_{R_4}(s)}{R_4(s)} = V_{R_4}(s) \quad (3.11)$$

Θα βρεθούν ορίζουσες με το κανόνα του Cramer.

$$\begin{aligned} \underline{|G|} = \Delta &= \begin{vmatrix} 2+s^+ & -1^- & -s^+ \\ -s & 2s+1 & -s \\ -s & -1 & 2+s \end{vmatrix} = \\ &= (2+s) \begin{vmatrix} 2s+1 & -s \\ -1 & 2+s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -s & -s \\ -s & 2+s \end{vmatrix} + (-s) \begin{vmatrix} -s & 2s+1 \\ -s & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (2+s)[4s+2s^2+2+s-s] + [-2s-s^2-s^2] - s[s+2s^2-s] = \\ &= 8s+4s^2+4+4s^2+2s^3+2s-2s-2s^2-s^2-2s^3-s^2 = \\ &= 4s^2+8s+4 \end{aligned}$$

Τώρα βρίσκεται το Δ_2 .

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2+s^+ & \frac{E(s)^-}{s} & -s^+ \\ -s & 0 & -s \\ -s & 0 & 2+s \end{vmatrix} = \\ &= (2+s) \begin{vmatrix} 0 & -s \\ 0 & 2+s \end{vmatrix} - \left(\frac{E(s)}{s}\right) \begin{vmatrix} -s & -s \\ -s & 2+s \end{vmatrix} + (-s) \begin{vmatrix} -s & 0 \\ -s & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{E(s)}{s} (2s^2+2s) = E(s)(2s+2) \\ I_3 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{E(s)(2s+2)}{4s^2+8s+4} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και το I_3 από τον νόμο του Ohm(3.11):

$$V_{R_4}(s) = \frac{E(s)(2s+2)}{4s^2+8s+4} \Rightarrow V_{R_4}(s)(4s^2+8s+4) = E(s)(2s+2)$$

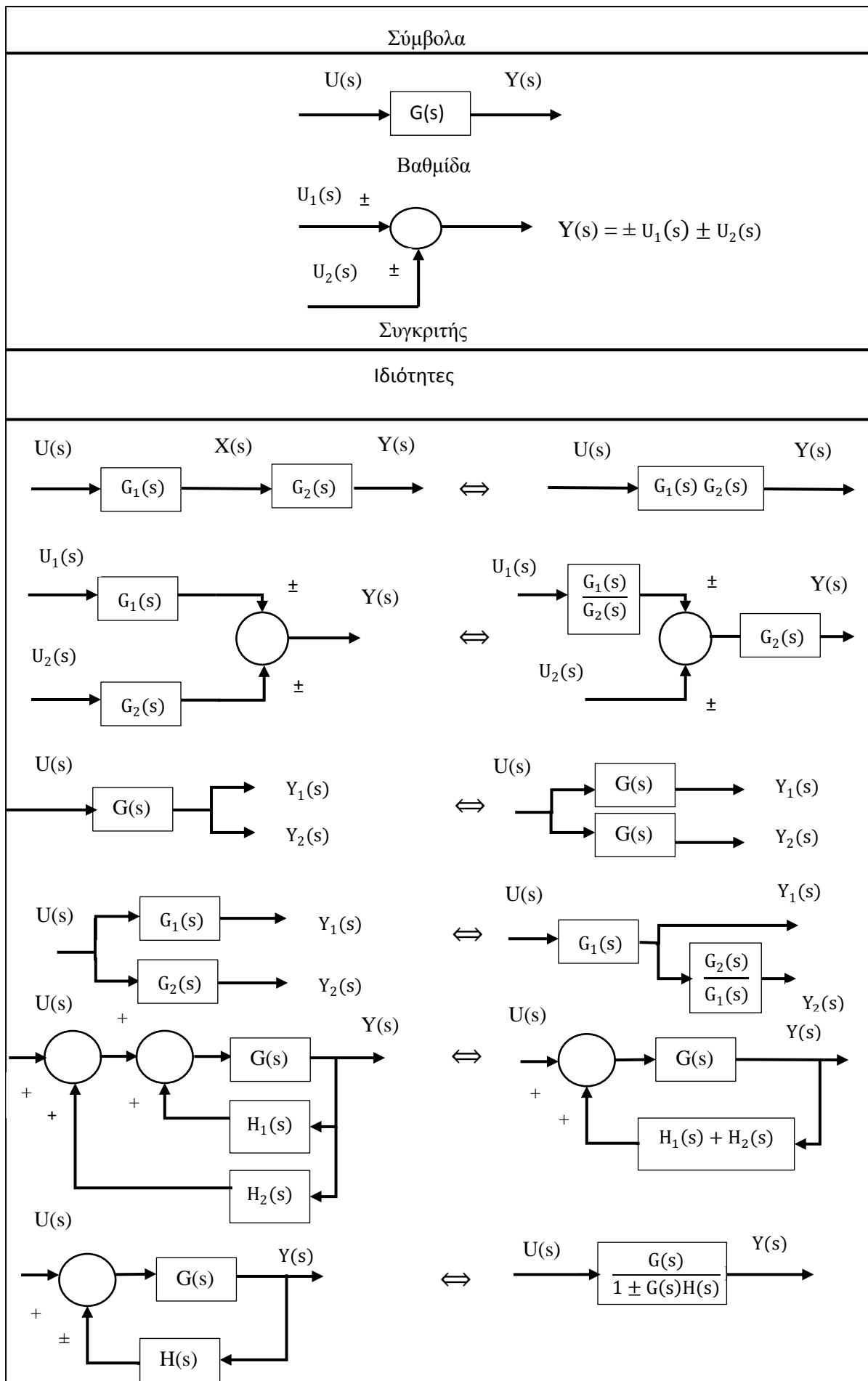
Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$\Rightarrow \frac{V_{R_4}(s)}{E(s)} = \frac{(2s+2)}{4s^2+8s+4} \Rightarrow \frac{V_{R_4}(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{2s^2+4s+2}$$

Παρατηρώντας ότι η συνάρτηση μεταφοράς που βρέθηκε στη 1^η μέθοδο είναι ίδια με αυτή της 2^{ης} μεθόδου, επομένως με την εφαρμογή και των 2 μεθόδων σε ένα κύκλωμα γίνεται επαλήθευση για την εύρεση της σωστής συνάρτησης μεταφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.3 Λειτουργικά διαγράμματα

Ο Rohrs Charles E. μαζί με τους Melsa Janes L. Και Schultz Donald G. το 1996 ανέφεραν ότι το λειτουργικό διάγραμμα(block diagram) είναι η αναπαράσταση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με βαθμίδες. Συνήθως το λειτουργικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την κατανόηση ενός προβλήματος ελέγχου διότι σχηματικά πλέον μπορεί να παρατηρηθεί η αμοιβαία εξάρτηση όλων των παραγόντων(είσοδοι, έξοδοι, διαταραχές κλπ.) ενός συστήματος. Οι βαθμίδες των λειτουργικών διαγραμμάτων συμβολίζονται από τετράγωνα ή ορθογώνια και συνδέονται μεταξύ τους με βέλη που η κατεύθυνση από τα βέλη καθορίζει την είσοδο και την έξοδο των βαθμίδων και με έναν κύκλο συμβολίζεται ο συγκριτής ή αθροιστής. Επιπλέον, υπάρχει και η άλγεβρα των λειτουργικών διαγραμμάτων που ο σκοπός της άλγεβρας των λειτουργικών διαγραμμάτων είναι η απλούστευση ενός λειτουργικού διαγράμματος ως προς την κατανόηση και στην ευκολότερη εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς. Στη παρακάτω εικόνα 3.4 φαίνονται τα σύμβολα και οι τυπικές ιδιότητες των λειτουργικών διαγραμμάτων.



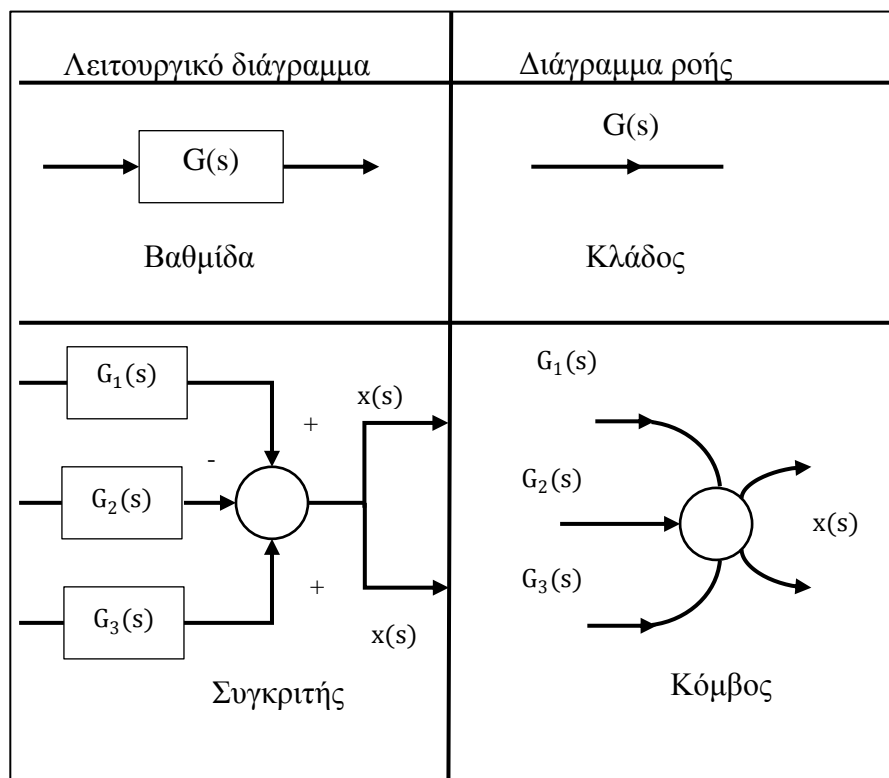
Εικόνα 3.4 Σύμβολα και τυπικές ιδιότητες λειτουργικών διαγραμμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.4 Διαγράμματα ροής

Οι Raymond T. Stefani Bahram Shahian Clement J.Savant,Jr και Gene H. Hostetter το 2012 ανέφεραν ότι υπάρχει κι ένας άλλος σχηματικός τρόπος πέρα από τα λειτουργικά διαγράμματα για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς που είναι τα διαγράμματα ροής. Τα διαγράμματα ροής αντίθετα από τα λειτουργικά διαγράμματα είναι πιο άμεσα για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς αφού δεν έχουν αλγεβρικές ιδιότητες. Η μετατροπή του λειτουργικού διαγράμματος σε διάγραμμα ροής έχει τις εξής αλλαγές:

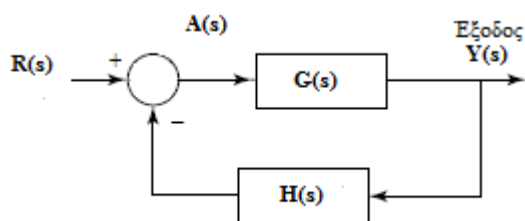
- ❖ Κάθε βαθμίδα(block) του λειτουργικού διαγράμματος συμβολίζεται με έναν κλάδο(branch) στο διάγραμμα ροής και με ένα βέλος αναγράφεται η κατεύθυνση της ροής.
- ❖ Ο αθροιστής(summer) και η διακλάδωση(tap off point) του λογικού διαγράμματος συμβολίζονται με έναν κόμβο(node) στο διάγραμμα ροής.
- ❖ Κάθε είσοδος και έξοδος του λειτουργικού διαγράμματος συμβολίζονται με έναν κόμβο(node) η καθεμία στο διάγραμμα ροής.
- ❖ Κάθε κλάδος(node) στο λειτουργικό διάγραμμα που παίρνει ως τιμή τη μονάδα συμβολίζεται ως κλάδο(node) και με ένα βέλος αναγράφεται η κατεύθυνση ροής όπως και η μονάδα διότι οι κλάδοι που παίρνουν ως τιμή τη μονάδα μεταφέρουν κάποιο σήμα χωρίς να το αλλοιώνουν.

Στην εικόνα 3.5 παρατηρείτε η αντιστοιχία μεταξύ λειτουργικού διαγράμματος και διαγράμματος ροής.



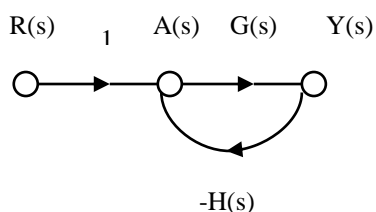
Εικόνα 3.5 Αντιστοιχία μεταξύ λειτουργικού διαγράμματος και διαγράμματος ροής

Για την καλύτερη κατανόηση του διαγράμματος ροής, θα χρησιμοποιηθεί το λειτουργικό διάγραμμα της εικόνας 3.6 και θα το μετατραπεί σε διάγραμμα ροής.



Εικόνα 3.6 Λειτουργικό διάγραμμα

Όπως ειπώθηκε, οι εισοδοι και οι έξοδοι θα συμβολιστούν με κόμβους όπως και ο συγκριτής ενώ οι βαθμίδες θα συμβολιστούν με κλάδους που θα φέρουν και ένα βέλος το οποίο καθορίζει τη κατεύθυνση ροής του σήματος. Επομένως το λειτουργικό διάγραμμα της εικόνας 3.6 θα γίνει:



Εικόνα 3.7 Διάγραμμα ροής

Παρατηρώντας ότι ο κλάδος που συνδέει τους 2 κόμβους(την είσοδο $R(s)$ και τον συγκριτή $A(s)$) είναι μοναδιαίος αφού στο λειτουργικό διάγραμμα της εικόνας 3.7 δεν υπάρχει μια ενδιάμεση βαθμίδα μεταξύ $R(s)$ και $A(s)$.

Η Βελώνη Ν. Αναστασία το 2011 ανέφερε τέσσερεις έννοιες για τα διαγράμματα ροής ,που είναι:

1. **Δρόμος ή διαδρομή(path)** είναι η αλληλουχία κλάδων που έχουν την ίδια φορά.
2. **Απευθείας δρόμος(forward path)** είναι ο δρόμος που ξεκινά από τον κόμβο της εισόδου και καταλήγει στον κόμβο της εξόδου.
3. **Βρόχος(loop)** είναι η διαδρομή που χαρακτηρίζεται ως κλειστή διαδρομή διότι ξεκινά και τελειώνει στον ίδιο κόμβο.
4. **Ανεξάρτητοι(non touching)** ονομάζονται οι βρόχοι ενός διαγράμματος ροής που δεν έχουν κανένα κοινό κόμβο.

Η Βελώνη Ν. Αναστασία το 2011 ανέφερε τον τύπο του Mason (Mason's gain formula 1953) που με την βοήθεια του διαγράμματος ροής δίνει την εξάρτηση της εισόδου και της εξόδου ενός συστήματος.

$$G(s) = \frac{\sum_{n=1}^k T_n \Delta_n}{\Delta} \quad (3.12)$$

Όπου:

T_n : η τιμή του n-οστού απευθείας δρόμου του διαγράμματος ροής που συνδέει την είσοδο και την έξοδο.

Δ : είναι η ορίζουσα του διαγράμματος ροής και υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο.

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots \quad (3.13)$$

L_1 : η τιμή του κάθε βρόχου.

$\sum L_1$: είναι το άθροισμα των τιμών όλων των βρόχων.

L_2 : είναι το γινόμενο των τιμών 2 μη επαπτόμενων βρόχων.

$\sum L_2$: είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών όλων των βρόχων ανά δυο που δεν εφάπτονται μεταξύ τους.

L_3 : είναι το γινόμενο των τιμών 3 μη επαπτόμενων βρόχων.

$\sum L_3$: είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών όλων των βρόχων ανά τρεις που να μην εφάπτονται μεταξύ τους.

Και συνεχίζονται να ισχύουν τα ίδια για τις επόμενες τιμές των L και $\sum L$.

Δ_n : η υποορίζουσα της διαδρομής T_n και βρίσκεται από τον παραπάνω τύπο αλλά υπολείποντας τους βρόχους που εφάπτονται στη n-οστή προς τα εμπρός διαδρομή, δηλαδή για κάθε διαδρομή του T_n μηδενίζουμε τους βρόχους εκείνης της διαδρομής, για παράδειγμα αν ένα διάγραμμα ροής έχει 3 διαδρομές τις T_1, T_2, T_3 τότε για να βρούμε τα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ μηδενίζουμε τους βρόχους κάθε διαδρομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.5 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι μια μέθοδος για την εναλλαγή από το πεδίο Laplace πάλι στο πεδίο του χρόνου εφαρμόζεται η ανάλυση σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων. Στη ανάλυση σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων διακρίνονται 3 περιπτώσεις, που είναι: 1) περίπτωση απλών πραγματικών και διακεκριμένων πόλων, 2) περίπτωση πραγματικών πολλαπλών πόλων και 3) περίπτωση μιγαδικών πόλων.

1) Περίπτωση απλών πραγματικών και διακεκριμένων πόλων.

Έστω οι πραγματικοί άνισοι πόλοι p_1, p_2, \dots, p_n τότε η έξοδος $Y(s)$ ενός συστήματος αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n} \quad (3.14)$$

Οι μεταβλητές A_1, A_2, A_n υπολογίζονται αφού βρεθεί το υπόλοιπο της $Y(s)$ ως προς τον απλό πόλο p . Επομένως $R(s) = (s-p)Y(s) = A + (\dots)(s-p)$, άρα οι μεταβλητές A_1, A_2, A_n υπολογίζονται:

$$A = R(s)|_{s=p} \quad (3.15)$$

Και τέλος η $Y(s)$ στο πεδίο του χρόνου γράφεται ως εξής:

$$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \quad (3.16)$$

2) Περίπτωση πραγματικών πολλαπλών πόλων.

Έστω οι πραγματικοί πόλοι p_1, p_2, \dots, p_n που είναι και ίσοι, τότε η έξοδος $Y(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p)^r \dots (s-p_n)} = \frac{A_1}{(s-p)^r} + \frac{A_2}{(s-p)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r}{s-p} + \dots \quad (3.17)$$

Οι μεταβλητές A_1, A_2, A_r υπολογίζονται αφού βρεθεί το υπόλοιπο $R(s)$ του πολλαπλού πόλου p βρίσκεται από την εξίσωση: $R(s) = (s-p)^r Y(s)$, επομένως τα A_1, A_2, A_r υπολογίζονται:

$$A_1 = R(s)|_{s=p}, A_2 = \left. \frac{dR(s)}{ds} \right|_{s=p}, \dots, A_{k-1} = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k R(s)}{ds^k} \right|_{s=p}, \dots, A_r \quad (3.18)$$

Και η $Y(s)$ στο πεδίο του χρόνου γίνεται ως εξής:

$$y(t) = \left(A_1 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + A_{r-1} t + A_r \right) e^{pt} + \dots \quad (3.19)$$

3) Περίπτωση μιγαδικών πόλων

Έστω οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, τότε η έξοδος $Y(s)$ ενός συστήματος αναλύεται σε κλάσματα ως εξής:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{P(s)}{((s-\sigma)^2 + \omega^2)\dots(s-p_n)} \quad (3.20)$$

Το υπόλοιπο $R(s)$ των 2 μιγαδικών πόλων υπολογίζεται ως εξής:

$$R(s) = ((s-\sigma)^2 + \omega^2)Y(s) = A_1 \omega + A_2(s-\sigma) + (\dots)((s-\sigma)^2 + \omega^2)$$

Αν αντικατασταθεί όπου $s = \sigma \pm j\omega$, η $R(s)$ θα γίνει:

$$R(s)|_{s=\sigma \pm j\omega} = A_1\omega + A_2(s - \sigma)|_{s=\sigma \pm j\omega} = A_1\omega + A_2j\omega$$

Ορίζεται πλέον η μιγαδική μεταβλητή A :

$$A = \frac{1}{\omega} R(s)|_{s=\sigma \pm j\omega} \quad (3.21)$$

Εάν: $A = A_1 + jA_2 = Me^{j\Phi} \quad (3.22)$

Άρα οι μεταβλητές A_1, A_2, M, Φ βρίσκονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$A_1 = \text{Re}A \quad (3.23)$$

$$A_2 = \text{Im}A \quad (3.24)$$

$$M = |A| \quad (3.25)$$

$$\Phi = \angle A \quad (3.26)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.6 Χρονική απόκριση συστήματος

Ο Μαλατέστας Β. Παντελής το 2011 αναφέρει ότι η χρονική απόκριση (time response) ενός συστήματος είναι η συμπεριφορά του συστήματος στο χρόνο με μια συγκεκριμένη είσοδο. Η χρονική απόκριση αποτελείται από 2 μέρη:

- i. Μεταβατική απόκριση (transient response) $y_{tr}(t)$
- ii. Απόκριση μόνιμης κατάστασης (steady state response) $y_{ss}(t)$

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \quad (3.27)$$

Μεταβατική απόκριση είναι η μετάβαση στην αρχή λειτουργίας του συστήματος προς μια άλλη μια άλλη πιο «σταθερή» λειτουργική κατάσταση.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

Η **απόκριση μόνιμης κατάστασης** είναι το υπόλοιπο κομμάτι της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος στο οποίο έχουν σχεδόν «υποχωρήσει» οι μεταβατικοί όροι και συνεχίζει σταθερά η απόκριση του συστήματος.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t)$$

Συμπερασματικά, από τη χρονική απόκριση ενός συστήματος μπορεί να παρατηρηθεί η ποιότητα ενός συστήματος δηλαδή με το αν είναι ευσταθές ή ασταθές και πόσο συγκλίνει από την ιδανική λειτουργία. Όσον αφορά την είσοδο, η είσοδος ενός συστήματος παίρνει κάποιες συγκεκριμένες μορφές που οι πιο εύχρηστες είναι:

1. Βηματική απόκριση (step response)
2. Κρουστική απόκριση (impulse response)
3. Απόκριση αναρρίχησης (ράμπα) (ramp response)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.7 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης

Ο Μαλατέστας Β. Παντελής το 2011 αναφέρει ότι ένα σύστημα 1^η τάξης απεικονίζεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (3.28)$$

Με όπου T= σταθερά χρόνου του συστήματος.

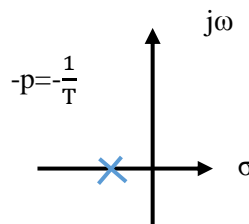
Πηγαίνοντας την παραπάνω διαφορική στο επίπεδο Laplace, γίνεται:

$$T(s)Y(s)s + Y(s) = U(s)$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (3.29)$$

Το σύστημα 1^{ης} τάξης διαθέτει έναν πραγματικό πόλο, όπως φαίνεται στο πολικό διάγραμμα.



Εικόνα 3.8 Πολικό διάγραμμα συστήματος 1^{ης} τάξης με ένα πραγματικό πόλο

Στη συνέχεια θα παρατηρηθεί η απόκριση της εξόδου του συστήματος 1^{ης} τάξης για διάφορα είδη εισόδων:

1. Με μοναδιαία βηματική είσοδο.

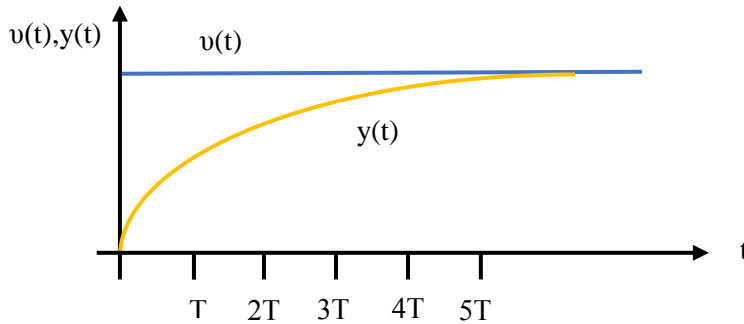
Ο Μαλατέστας Β. Παντελή το 2011 ανέφερε ότι η μοναδιαία βηματική είσοδος στο πεδίο του χρόνου είναι: $u(t) = 1$ και στο πεδίο Laplace γίνεται: $U(s) = \frac{1}{s}$, επομένως η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος 1^{ης} τάξης (3.29) θα λυθεί ως προς την έξοδο, πάρει την εξής μορφή:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts+1} U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

Και στο πεδίο του χρόνου θα γίνει:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Γραφικά η απόκριση του συστήματος 1^{ης} τάξης φαίνεται στη παρακάτω εικόνα 3.9.



Εικόνα 3.9 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία βηματική είσοδο

Η κίτρινη γραμμή είναι η απόκριση της εξόδου και η μπλε γραμμή είναι η απόκριση της εισόδου.

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούν να γίνουν κάποιες δοκιμές, δηλαδή:

Για $t=T$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{T}{T}} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

Για $t=5T$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{5T}{T}} = 1 - e^{-5} = 0.9932$$

Από αυτές τις 2 δοκιμές διακρίνεται ότι σε χρονικό διάστημα ίσο με τη σταθερά χρόνου του συστήματος, η απόκριση της εξόδου έχει φτάσει στο 63.2% και για χρονικό διάστημα $5T$ έχει φτάσει στο 99.3%.

2. Με κρουστική είσοδο.

Ο Μαλατέστας Β. Παντελή το 2011 αναφέρει ότι η κρουστική απόκριση στο πεδίο του χρόνου συμβολίζεται με $u(t) = \delta(t)$ και στο πεδίο Laplace συμβολίζεται με $U(s) = 1$. Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος 1^{ης} τάξης (3.29) με κρουστική είσοδο θα λυθεί ως προς την έξοδο και θα είναι:

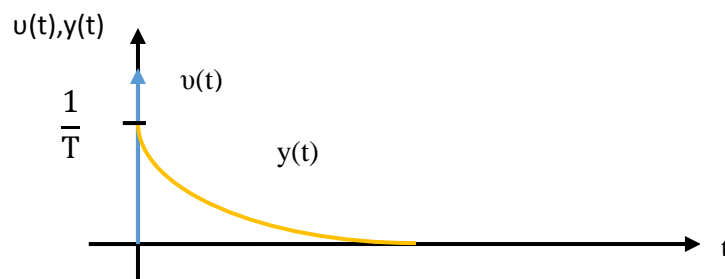
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Και στο πεδίο του χρόνου:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts + 1}\right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Από τις 2 παραπάνω εξισώσεις διακρίνετε ότι με κρουστική είσοδο παίρνει ακριβώς την δυναμική του συστήματος και ότι η απόκριση της εξόδου του συστήματος διαθέτει μόνο μεταβατική απόκριση.

Στην εικόνα 3.10 φαίνεται γραφικά η είσοδος και η έξοδος του συστήματος 1^{ης} τάξης(η μπλε γραμμή είναι η είσοδος και η κίτρινη γραμμή είναι η έξοδος).



Εικόνα 3.10 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο

3. Με μοναδιαία αναρρίχηση(ράμπα).

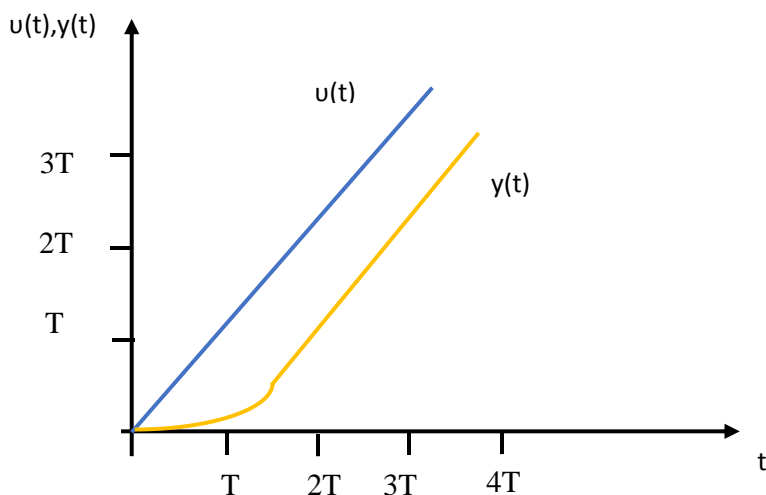
Ο Μαλατέστας Β. Παντελή το 2011 αναφέρει ότι η μοναδιαία αναρρίχηση(ράμπα) συμβολίζεται στο πεδίο του χρόνου με $u(t) = t$ και στο Laplace με $U(s) = \frac{1}{s^2}$. Η απόκριση της εξόδου του συστήματος 1^{ης} τάξης (3.29) με μοναδιαία αναρρίχηση στην είσοδο θα γίνει:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Και στο πεδίο του χρόνου:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2}\right\} = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$$

Στην εικόνα 3.11 απεικονίζεται η απόκριση της εξόδου μαζί με την απόκριση της εισόδου.



Εικόνα 3.11 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία αναρρίχηση ως είσοδο

Από την εικόνα 3.11 διακρίνεται ότι η απόκριση της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση είναι ακριβώς ίδια με την απόκριση της εισόδου και όσο πιο μικρή είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος, τόσο η απόκριση της εξόδου θα κοντεύει να ταυτιστεί με την απόκριση της εισόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.8 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης

Ο Μαλατέστας Β. Παντελής το 2011 ανέφερε ότι η μορφή συστήματος 2^{ης} τάξης στο πεδίο του χρόνου περιγράφεται:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (3.30)$$

Όπου ζ είναι ο **συντελεστής απόσβεσης(damping ratio)** και ω_n είναι η **φυσική συχνότητα(natural frequency)**.

Βρίσκοντας την συνάρτηση μεταφοράς της παραπάνω εξίσωσης, η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.31)$$

Οι πόλοι της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς είναι και οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου.

$$\text{Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: } s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.32)$$

$$\text{Ρίζες χαρακτηριστικού πολυώνυμου: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.33)$$

Ο συντελεστής απόσβεσης ζ και η φυσική συχνότητα ω_n ορίζουν την δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος $2^{\text{ης}}$ τάξης. Όμως παρατηρώντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου, προσέχουμε ότι μεγαλύτερη βαρύτητα έχει ο συντελεστής απόσβεσης για τον καθορισμό της δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος $2^{\text{ης}}$ τάξης. Γι' αυτό ορίζονται 4 περιπτώσεις για την τιμή του συντελεστή απόσβεσης ζ που είναι για $\zeta > 1$, για $\zeta = 1$, για $\zeta < 1$ και $\zeta = 0$.

1) Για $\zeta > 1$ υπεραπόσβεση ή εκθετική απόκριση.

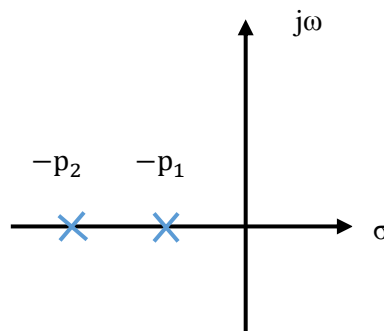
Για $\zeta > 1$ διακρίνεται ότι από τον τύπο των ριζών του χαρακτηριστικού πολυώνυμου θα υπάρχουν 2 πραγματικές άνισες ρίζες δηλαδή θα προκύψουν 2 άνισοι πραγματικοί πόλοι για το σύστημα $2^{\text{ης}}$ τάξης. Άρα:

$$p_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad p_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $2^{\text{ης}}$ τάξης γίνεται:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Και το πολικό διάγραμμα θα είναι:



Εικόνα 3.12 Πολικό διάγραμμα συστήματος $2^{\text{ης}}$ τάξης για $\zeta > 1$

Για μοναδιαία βηματική είσοδο λύνεται ως προς την έξοδο για την εύρεση της απόκρισης της εξόδου και αναλύεται σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.14):

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - p_1} + \frac{A_3}{s - p_2}$$

Για τον υπολογισμό των A_1, A_2 και A_3 χρησιμοποιείται ο τύπος (3.15).

Για το A_1

$$A_1 = \left. \frac{s\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} \right|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{(0 - p_1)(0 - p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_1 p_2}$$

Για το A_2

$$A_2 = \frac{\omega_n^2(s - p_1)}{s(s - p_1)(s - p_2)} \Big|_{s=p_1} = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1 - p_2)} = -\frac{\omega_n^2}{p_1(p_2 - p_1)}$$

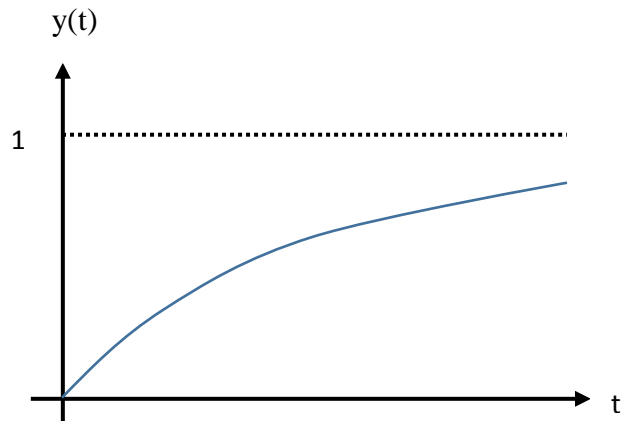
Για το A_3

$$A_3 = \frac{\omega_n^2(s - p_2)}{s(s - p_1)(s - p_2)} \Big|_{s=p_2} = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2 - p_1)} = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2 - p_1)}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.16) η χρονική απόκριση της εξόδου είναι :

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{p_1 t} + A_3 e^{p_2 t}$$

Και η απόκριση της εξόδου φαίνεται στην εικόνα 3.13.



Εικόνα 3.13 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta > 1$

2) Για $\zeta=1$ κρίσιμη απόσβεση ή οριακή απόκριση.

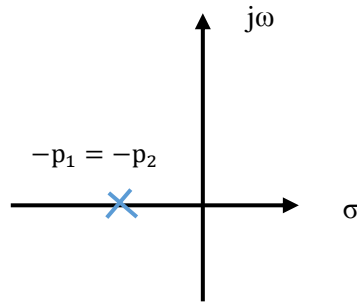
Για $\zeta=1$ παρατηρείτε από τον τύπο των ριζών του χαρακτηριστικού πολυώνυμου ότι θα προκύψει ένας διπλός πόλος για το σύστημα 2^{ης} τάξης.

$$p_{1,2} = -\omega_n$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος 2^{ης} τάξης γίνεται:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

Και το πολικό διάγραμμα θα είναι:



Εικόνα 3.14 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για ζ=1

Για μοναδιαία βηματική είσοδο, λύνετε ως προς την έξοδο για την εύρεση της χρονικής απόκρισης και αναλύετε σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων χρησιμοποιώντας την σχέση (3.17).

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \omega_n)^2} + \frac{A_3}{s + \omega_n}$$

Για τον υπολογισμό των A_1, A_2 και A_3 χρησιμοποιείται η σχέση (3.18).

Για το A_1

$$A_1 = \left. \frac{s\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

Για το A_2

$$A_2 = \left. \frac{\omega_n^2(s + \omega_n)^2}{s(s + \omega_n)^2} \right|_{s=-\omega_n} = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n} = -\omega_n$$

Για το A_3 παραγωγίζεται όλη την $Y(s)$ ως προς s και εφαρμόζετε η ιδιότητα των παραγώγων (2.5): $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

$$A_3 = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{\omega_n^2(s + \omega_n)^2}{s(s + \omega_n)^2} \right] \right|_{s=-\omega_n} = \left. \frac{-\omega_n^2}{s^2} \right|_{s=-\omega_n} = -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = -1$$

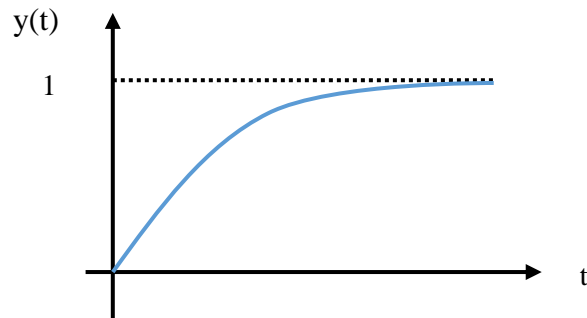
Άρα, με αντικατάσταση των A_1, A_2, A_3 στην $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\omega_n}{(s + \omega_n)^2} + \frac{-1}{s + \omega_n}$$

Και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου για την εύρεση της χρονικής απόκρισης χρησιμοποιείται η σχέση (3.19) :

$$y(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

Και τέλος, η απόκριση στην έξοδο είναι:



Εικόνα 3.15 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta=1$

3) Για $\zeta < 1$ υπόαπόσβεση ή φθίνουσα ταλάντωση.

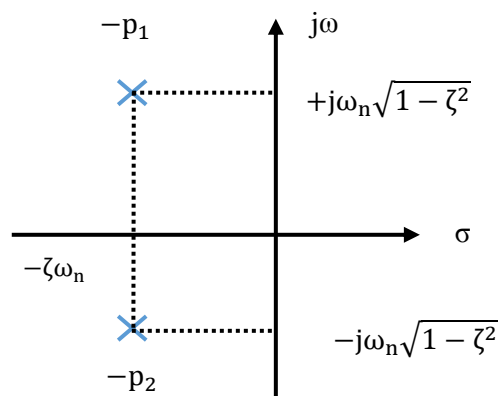
Για $\zeta < 1$ διακρίνετε ότι από τον τύπο των ριζών του χαρακτηριστικού πολυώνυμου θα υπάρχουν 2 μιγαδικές άνισες ρίζες δηλαδή θα προκύψουν 2 άνισοι μιγαδικοί πόλοι για το σύστημα 2^{ης} τάξης. Άρα:

$$p_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad p_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος 2^{ης} τάξης γίνεται:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Και το πολικό διάγραμμα θα είναι:



Εικόνα 3.16 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta < 1$

Θεωρώντας ότι χρησιμοποιείται μοναδιαία βηματική είσοδο και λύνετε ως προς την έξοδο για την εύρεση της χρονικής απόκρισης και στη συνέχεια αναλύετε σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων με τη σχέση (3.20).

$$\text{Όπου } \omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + j\omega)(s + \zeta\omega_n - j\omega)} = \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + s\zeta\omega_n - sj\omega + s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta\omega_n j\omega + sj\omega + \zeta\omega_n j\omega - j^2\omega^2)} = \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega^2)} = \frac{\omega_n^2}{s((s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το ω .

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2))} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2)} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των A, B και Γ χρησιμοποιείται από τους τύπους (3.21) και (3.22).

Για το A:

$$A = \left. \frac{s\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

Για το B και το Γ χρησιμοποιείται η $Y(s)$ και αντικαθίσταται το A:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} &= \frac{Bs^2 + \Gamma s + s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_n^2 &= Bs^2 + \Gamma s + s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2(B + 1) + s(\Gamma + 2\zeta\omega_n) &= 0 \end{aligned}$$

Για το B:

$$B + 1 = 0 \Rightarrow B = -1$$

Για το Γ :

$$\Gamma + 2\zeta\omega_n = 0 \Rightarrow \Gamma = -2\zeta\omega_n$$

Άρα με αντικατάσταση των A, B, Γ στην $Y(s)$, η $Y(s)$ θα γίνει:

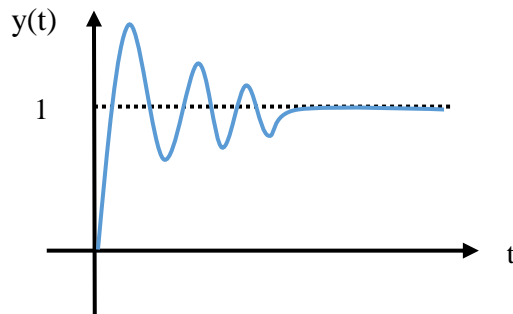
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s - 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega} \frac{\omega}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} = \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Τελικά στο πεδίο του χρόνου η $Y(s)$ θα γίνει $y(t)$.

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \eta\mu(\omega t)$$

Και τέλος, η απόκριση της εξόδου στο πεδίο του χρόνου είναι:



Εικόνα 3.17 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta < 1$

4) Για $\zeta=0$ διαρκή ταλάντωση.

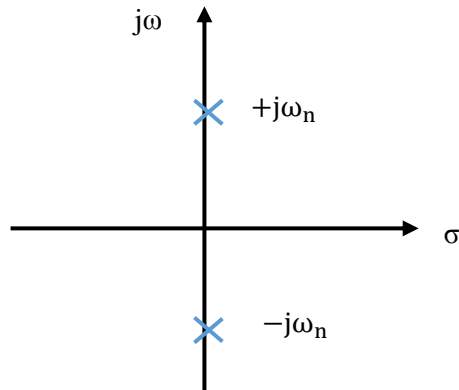
Για $\zeta=0$ παρατηρώντας από τον τύπο των ριζών του χαρακτηριστικού πολυώνυμου θα προκύψει μια διπλή ρίζα δηλαδή θα υπάρξει ένας διπλός πόλος για το σύστημα 2^{ης} τάξης. Άρα:

$$p_{1,2} = -\omega_n$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος 2^{ης} τάξης γίνεται:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 - sp_2 - sp_1 + p_1p_2} = \\
&= \frac{\omega_n^2}{s^2 - s\omega_n - s\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}
\end{aligned}$$

Και το πολικό διάγραμμα είναι:



Εικόνα 3.18 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta=0$

Χρησιμοποιώντας μοναδιαία βηματική είσοδο και λύνοντας ως προς την έξοδο για την εύρεση της χρονικής απόκρισης και στη συνέχεια αναλύοντας σε κλάσματα με τη μέθοδο των υπολοίπων με την εξίσωση (3.14).

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

Τα A βρίσκεται από τον τύπο (3.15).

Για το A:

$$A = \left. \frac{s\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \right|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

Για το B και Γ θα χρησιμοποιήσουμε τη $Y(s)$ και θα αντικατασταθεί το A με την τιμή που βρέθηκε.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{(s^2 + \omega_n^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} &= \frac{s^2 + \omega_n^2 + Bs^2 + s\Gamma}{s(s^2 + \omega_n^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_n^2 &= s^2 + \omega_n^2 + Bs^2 + \Gamma s \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2 + Bs^2 + \Gamma s &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2(B + 1) + \Gamma s &= 0 \end{aligned}$$

Για το B:

$$B + 1 = 0 \Rightarrow B = -1$$

Για το Γ :

$$\Gamma s = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$$

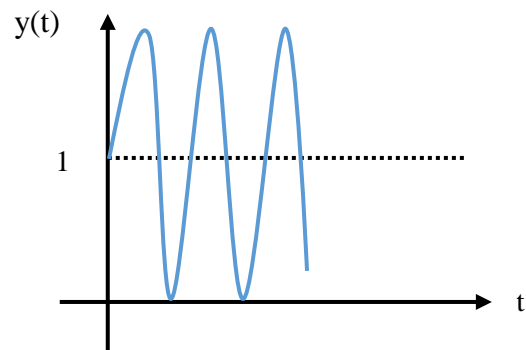
Άρα, η $Y(s)$ πλέον έχει τη μορφή:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

Και στο πεδίο του χρόνου η $Y(s)$ γίνεται $y(t)$:

$$y(t) = 1 - \eta\mu(\omega_n t)$$

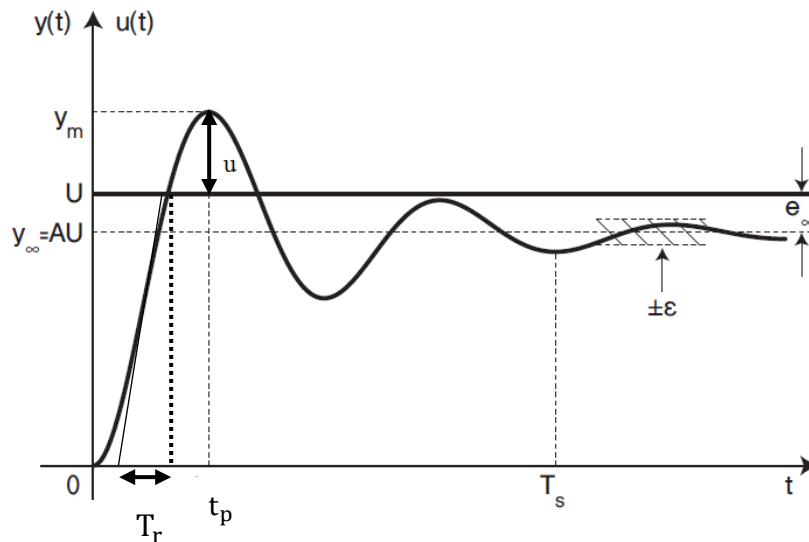
Και τέλος, η χρονική απόκριση της εξόδου είναι:



Εικόνα 3.19 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.9 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης

Διακρίθηκε στο κεφάλαιο 3.8 ότι το σύστημα 2^{ης} τάξης ποικίλει σε χρονικές αποκρίσεις ανάλογα με το συντελεστή απόσβεσης ζ γι' αυτό υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά που είναι χρήσιμα για την κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Στην εικόνα 3.20 παρουσιάζεται μια χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση δηλαδή υπάρχει υποαπόσβεση δηλαδή $\zeta < 1$ με βηματική είσοδο.



Εικόνα 3.20 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν τα χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης και τους τύπους/σχέσεις για την εύρεση τους. Και είναι τα εξής:

$$1) \text{ Υπερέψωση(overshoot): } u = \frac{y_m - y_\infty}{y_m} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3.34)$$

$$2) \text{ Χρόνος κορυφής(peak time): } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.35)$$

$$3) \text{ Χρόνος ανύψωσης(rising time): } T_r \cong \frac{1+2.5\zeta}{\omega_n} \quad (3.36)$$

$$4) \text{ Χρόνος αποκατάστασης(settling time): } T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3.37) \text{ για απόκλιση } \epsilon = \pm 5\%$$

$$\text{Και } T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3.38) \text{ για απόκλιση } \epsilon = \pm 2\%$$

$$5) \text{ Μόνιμο σφάλμα(steady state error): } e_\infty = U - y_\infty \quad (3.39)$$

Ο Cho W. S. Το το 2016 ανέφερε τα χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης του συστήματος 2^{ης} τάξης και τα ανέλυσε ως εξής:

1) **Υπερύψωση(overshoot)** είναι το ποσό της πρώτης μεγαλύτερης κορυφής της απόκρισης που η κλίση της είναι 0 δηλαδή είναι η τιμή από την μεγαλύτερη κορυφή της απόκρισης μέχρι την τιμή της βηματικής.

2) **Χρόνος κορυφής(peak time)** είναι ο χρόνος στον οποίο η απόκριση έχει φτάσει τη μέγιστη τιμή της δηλαδή όταν η απόκριση έχει εκτελέσει τη πρώτη μεγαλύτερη κορυφή.

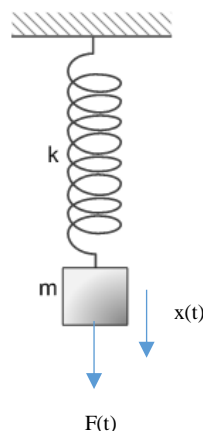
3) **Χρόνος ανύψωσης(rising time)** είναι ο χρόνος που χρειάζεται η απόκριση για να φτάσει το 90% της σταθερής τιμής της.

4) **Χρόνος αποκατάστασης(settling time)** είναι ο χρόνος που χρειάζεται η ταλάντωση της απόκρισης να παραμείνει εντός ενός συγκεκριμένου μικρού ποσοστού της σταθερής τιμής ή της τελικής τιμής.

5) **Μόνιμο σφάλμα(steady state error)** είναι η διαφορά της εισόδου από την έξοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.10 Παραδείγματα

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα μηχανικό σύστημα στο οποίο βρέθηκε η συνάρτηση μεταφοράς. Το σύστημα είναι η μάζα με το ελατήριο και έχει ως είσοδο μια εξωτερική δύναμη F και ως έξοδο τη μετατόπιση x της μάζας.



Εικόνα 3.21 Μάζα-ελατήριο

Χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις που βρέθηκαν από το προηγούμενο κεφάλαιο με χρήση του πίνακα 2.1.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx(t) = F(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

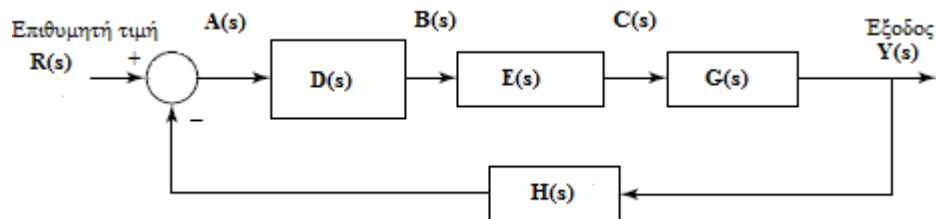
Πηγαίνοντας στο πεδίο Laplace χρησιμοποιώντας τους πίνακες 2.3 και 2.4 για τους μετασχηματισμούς Laplace:

$$Mx(s)s^2 + Bx(s)s = F(s)$$

Λύνοντας ως $\frac{\text{έξοδος}}{\text{είσοδος}}$

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs}$$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα παρόμοιο παράδειγμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς από το λειτουργικό διάγραμμα που απεικονίζεται στην εικόνα 3.22.



Εικόνα 3.22 Λειτουργικό διάγραμμα παραδείγματος

Για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς του λειτουργικού διαγράμματος της εικόνας 3.22 θα ονομαστεί η έξοδος κάθε βαθμίδας και θα γραφτεί από μια εξίσωση για την κάθε μια. Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην κατεύθυνση των βέλων διότι καθορίζεται η είσοδος και η έξοδος μιας βαθμίδας από την κατεύθυνση που δείχνουν τα βέλη.

Επομένως η 1^η εξίσωση θα είναι μετά την έξοδο του συγκριτή.

$$A(s) = R(s) - H(s) \cdot Y(s)$$

Η 2^η εξίσωση θα είναι:

$$B(s) = A(s) \cdot D(s)$$

Η 3^η εξίσωση θα είναι:

$$C(s) = B(s) \cdot E(s)$$

Και η 4^η εξίσωση:

$$Y(s) = C(s) \cdot G(s)$$

Τώρα με την αντικατάσταση της μιας μέσα στην άλλη θα βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Αντικαθιστώντας την 1^η εξίσωση μέσα στη 2^η.

$$B(s) = D(s) \cdot (R(s) - H(s) \cdot Y(s))$$

Αντικαθιστώντας την καινούργια 2^η εξίσωση μέσα στη 3^η.

$$C(s) = E(s) \cdot D(s) \cdot (R(s) - H(s) \cdot Y(s))$$

Αντικαθιστώντας την καινούργια 3^η εξίσωση μέσα στη 4^η.

$$Y(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s) \cdot (R(s) - H(s) \cdot Y(s))$$

Στη συνέχεια θα λύσουμε ως προς την έξοδο $Y(s)$.

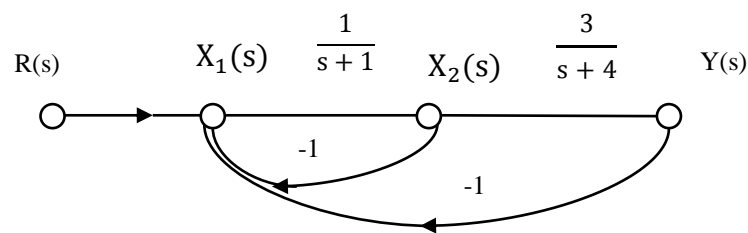
$$Y(s) + Y(s) \cdot H(s) \cdot G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s) = R(s) \cdot G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) \cdot (1 + H(s) \cdot G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s)) = R(s) \cdot G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s)$$

Πλέον λύνουμε $\frac{\text{Έξοδος}}{\text{Είσοδος}} = \frac{Y(s)}{R(s)}$ για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s)}{1 + H(s) \cdot G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \cdot D(s)}$$

Οι Raymond T. Stefani Bahram Shahian Clement J. Savant, Jr και Gene H. Hostetter το 2012 ανέφεραν ένα παράδειγμα στο οποίο εφαρμόζεται ο τύπος του Mason. Από την εικόνα 3.23 που απεικονίζεται ένα διάγραμμα ροής θα βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.



Εικόνα 3.23 Διάγραμμα ροής παραδείγματος

Με βάση το διάγραμμα ροής της εικόνας 3.23 υπάρχει 1 διαδρομή και υπάρχουν 2 βρόχοι.

1 διαδρομή:

$$T_1 = \left(\frac{1}{s+1} \right) \left(\frac{3}{s+4} \right)$$

1^{ος} βρόχος:

$$L_1 = \frac{-1}{s+1}$$

2^{ος} βρόχος:

$$L_2 = \frac{-3}{(s+1)(s+4)}$$

Η ορίζουσα του διαγράμματος ροής είναι χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.13):

$$\Delta = 1 - (L_1 - L_2) = 1 + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)(s+4)}$$

Επομένως το $\Delta_1 = 1$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση μεταφοράς από τον τύπο του Mason (3.12) θα είναι:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{3}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)(s+4)}} = \\
 &= \frac{\frac{3}{(s+1)(s+4)}}{\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+4)} + \frac{s+4}{(s+1)(s+4)} + \frac{3}{(s+1)(s+4)}} = \\
 &= \frac{\frac{3}{(s+1)(s+4)}}{\frac{(s+1)(s+4) + s+4 + 3}{(s+1)(s+4)}} = \\
 &= \frac{3}{(s+1)(s+4) + s+7} = \frac{3}{s^2 + 6s + 11}
 \end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 11}$$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα τυπικό παράδειγμα για τον υπολογισμό της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος 2^{ης} τάξης με βηματική είσοδο ίση με μονάδα $u(t)=1$ που στο Laplace είναι $U(s) = \frac{1}{s}$. Το σύστημα είναι:

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 7s + 12}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $Q(s) = s^2 + 7s + 12$

Υπολογίζοντας τη διακρίνουσα από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s)$.

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

Και οι ρίζες της διακρίνουσας είναι:

$$s_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

Επομένως οι ρίζες είναι:

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -4$$

Αναλύοντας τη συνάρτηση μεταφοράς σε απλά κλάσματα από τη σχέση(3.14).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = U(s) \frac{12}{s^2 + 7s + 12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{12}{s(s^2 + 7s + 12)} = \frac{12}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s+4}$$

Υπολογίζοντας τα A_1, A_2, A_3 από τη σχέση (3.15).

$$A_1 = \left. \frac{12s}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=0} = \frac{12}{12} = 1$$

$$A_2 = \left. \frac{12(s+3)}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=-3} = \frac{12}{-3} = -4$$

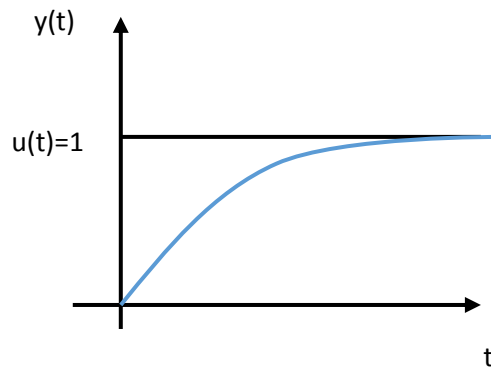
$$A_3 = \left. \frac{12(s+4)}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=-4} = \frac{12}{-4(-1)} = 3$$

Αντικαθιστώντας τα A_1, A_2, A_3 στη $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+3} + \frac{3}{s+4}$$

Και πηγαίνοντας στο πεδίο του χρόνου για τον υπολογισμό της απόκρισης της εξόδου με βάση τον τύπο (3.16).

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+3} + \frac{3}{s+4} \xrightarrow{\mathcal{L}} y(t) = 1 - 4e^{-3t} + 3e^{-4t}$$



Εικόνα 3.24 Χρονική απόκριση παραδείγματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Χώρος κατάστασης

Ένα άλλο κομμάτι για την εύρεση του μοντέλου είναι με αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης, επομένως σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν οι εξισώσεις κατάστασης, οι μεταβλητές κατάστασης, η εύρεση απόκρισης ενός συστήματος από το χώρο κατάστασης, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα όπως και η ελεγχιμότητα και παρατηρισιμότητα.

Κεφάλαιο 4.1 Μεταβλητές κατάστασης και εξισώσεις κατάστασης

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι η **κατάσταση** ενός συστήματος είναι οι τιμές των εισόδων μαζί με τις εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική του συστήματος και καθορίζουν τις εξόδους και τη μελλοντική κατάσταση του συστήματος. Επομένως, οι **μεταβλητές κατάστασης** αναπαριστούν την παρούσα κατάσταση ενός συστήματος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της απόκρισης τους συστήματος. Θεωρώντας ένα σύστημα με u_1, u_2, \dots, u_m εισόδους, με εξόδους y και μεταβλητές κατάστασης x_1, x_2, \dots, x_n μπορεί να προσδιοριστεί η απόκριση ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης, που περιέχουν τις μεταβλητές κατάστασης και τις εισόδους με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένα σύστημα εξισώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m\end{aligned}$$

Όπου $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Και το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γράφεται και σε μιτροειδή μορφή:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ περιέχει τις μεταβλητές κατάστασης και ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης (state vector).

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι η **εξίσωση κατάστασης** ενώνει τη ροή της κατάστασης του συστήματος με την παρούσα κατάσταση του συστήματος μαζί με τις τιμές των εισόδων. Η εξίσωση κατάστασης περιγράφεται από τη σχέση:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t) \quad (4.1)$$

Όπου $\underline{x}_0(t)$ είναι οι αρχικές συνθήκες του συστήματος και είναι $\underline{x}_0(t) = \underline{x}(t)$.

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι η **εξίσωση εξόδου** είναι η σύνδεση των εξόδων με τις μεταβλητές κατάστασης και περιγράφεται από τη σχέση:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t) \quad (4.2)$$

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι η εξίσωση κατάστασης μαζί με την εξίσωση εξόδου αποτελούν την **αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης (state space representation)**.

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι:

- Ο πίνακας \underline{A} καλείται πίνακας συστήματος (system matrix) και προσδιορίζει την ελεύθερη συμπεριφορά του συστήματος.
- Ο πίνακας \underline{B} καλείται πίνακας εισόδου (input matrix) και προσδιορίζει την είσοδο ή τις εισόδους προς το σύστημα.
- Ο πίνακας \underline{C} καλείται πίνακας εξόδου (output matrix) και προσδιορίζει το σύστημα προς την έξοδο.
- Ο πίνακας \underline{D} καλείται συντελεστής εισόδου-εξόδου (input-output factor) προσδιορίζει άμεσα την είσοδο προς την έξοδο.

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι από τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να την αναπαραστήσουμε σε μιτροειδή μορφή και ανάλογα με τη δομή της συνάρτησης μεταφοράς χρησιμοποιώντας μια από τις δυο μορφές για την περιγραφή της σε πίνακες. Επίσης, μια συνάρτηση μεταφοράς είναι η σχέση μεταξύ εξόδου προς την είσοδο και περιγράφεται από τη παρακάτω εξίσωση:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \mu\epsilon \ m \leq n$$

Και στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \quad \mu\epsilon \ m \leq n \end{aligned}$$

Οι μορφές είναι:

- 1^η κανονική μορφή (first canonical form).

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{A} \qquad \underline{B}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

$$\underline{C}$$

- 2^η κανονική μορφή (second canonical form).

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{A} \qquad \underline{B}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

$$\underline{C}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.2 Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από το χώρο κατάστασης

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι σε περίπτωση που είναι γνωστοί οι πίνακες \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , και \underline{D} και υπάρχουν μηδενικές αρχικές συνθήκες $\underline{x}_0 = 0$ τότε είναι εφικτό να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς πηγαίνοντας στο Laplace και συνδυάζοντας μαζί την εξίσωση κατάστασης και την εξίσωση εξόδου, σχηματίζεται η παρακάτω σχέση:

$$G(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}(s) + \underline{D}(s) \quad (4.3)$$

Όπου \underline{I} είναι ένας μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας.

Αποδεικνύεται ως εξής:

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1).

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s\underline{X}(s) = \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{B} \cdot U(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{X}(s)(s\underline{I} - \underline{A}) = \underline{B} \cdot U(s) \Rightarrow \underline{X}(s) = \frac{\underline{B} \cdot U(s)}{s\underline{I} - \underline{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{X}(s) = \underline{B} \cdot U(s)(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \end{aligned}$$

Και μετά τον τύπο (4.2).

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{Y}(s) = \underline{C} \cdot \underline{X}(s) + \underline{D} \cdot U(s)$$

Γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι έξοδος προς είσοδος και αντικαθιστώντας το $\underline{Y}(s)$ και στη συνέχεια το $\underline{X}(s)$, η $G(s)$ θα γίνει:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\underline{C} \cdot \underline{X}(s) + \underline{D} \cdot U(s)}{U(s)} = \frac{\underline{C} \cdot \underline{B} \cdot U(s)(s\mathbf{I} - \underline{A})^{-1} + \underline{D} \cdot U(s)}{U(s)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G(s) = \frac{U(s)(\underline{C} \cdot \underline{B}(s\mathbf{I} - \underline{A})^{-1} + \underline{D})}{U(s)} \end{aligned}$$

Και τέλος:

$$G(s) = \underline{C}(s)(s\mathbf{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}(s) + \underline{D}(s)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.3 Απόκριση των μεταβλητών κατάστασης και πίνακας μετάβασης

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι από τη λύση της εξίσωσης κατάστασης υπολογίζεται η μεταβατική απόκριση ενός συστήματος και η εξίσωση κατάστασης περιγράφεται από τον τύπο:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t) + \int_0^t \underline{\Phi}(t - \tau)\underline{B}u(\tau)d\tau \quad (4.4)$$

Όπου $\underline{\Phi}(t)$ είναι ο **πίνακας μετάβασης (state transition matrix)** αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι για τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος στο χώρο κατάστασης και δίνεται από τον τύπο:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} \quad \text{ή} \quad \underline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \underline{A})^{-1}\} \quad (4.5)$$

Όπου \underline{B} είναι ο πίνακας εισόδου(input matrix).

Όπου $u(\tau)$ είναι η είσοδος του συστήματος σε χρόνο τ .

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι υπάρχουν 2 περιπτώσεις για τον προσδιορισμό της απόκρισης του συστήματος, που είναι:

- ❖ 1^η περίπτωση είναι να υπάρχουν αρχικές συνθήκες x_0 και η είσοδος να είναι μηδενική $u(t)=0$ τότε εμφανίζεται η ελεύθερη απόκριση του συστήματος(free response) και ο τύπος για τον υπολογισμό της απόκρισης παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{x}(s) = \underline{\Phi}(s)\underline{x}_0(s) \quad (4.6)$$

- ❖ 2^η περίπτωση είναι οι αρχικές συνθήκες να είναι μηδενικές $x_0 = 0$ και η είσοδος να έχει μη μηδενική τιμή τότε εμφανίζεται εξαναγκασμένη απόκριση του συστήματος (forced response) και ο τύπος για τον υπολογισμό της απόκρισης παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\underline{x}(t) = \int_0^t \underline{\Phi}(t - \tau) \underline{B} u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{x}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{B} \cdot U(s) \quad (4.7)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.4 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του συστήματος

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι μια άλλη μέθοδος εύρεσης της απόκρισης ενός συστήματος είναι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του συστήματος. Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών είναι η εύρεση της ορίζουσας της διαφοράς μοναδιαίου πίνακα με λ από τον πίνακα \underline{A} του συστήματος και δίνεται από τη σχέση:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0 \quad (4.8)$$

Από την παραπάνω σχέση υπολογίζονται οι **ιδιοτιμές (eigenvalues)** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ περιέχουν τους πόλους του συστήματος αφού διαγωνοποιούν τον πίνακα \underline{A} και τον ανεξαρτοποιούν από τις εξισώσεις κατάστασης. Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των **ιδιοδιανυσμάτων (eigenvectors)** που είναι τα μοναδιαία διανύσματα των βασικών αξόνων του συστήματος, υπολογίζονται από τη σχέση:

$$(\lambda \underline{I} - \underline{A}) \underline{v} = 0 \quad (4.9)$$

Όπου \underline{v} είναι τα ιδιοδιανύσματα.

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να γραφτούν σε ένα τετραγωνικό πίνακα \underline{M} που ονομάζεται **πίνακας μετασχηματισμού (transformation matrix)**:

$$\underline{M} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n] \quad (4.10)$$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι για τη συνέχεια στην εύρεση της απόκρισης του συστήματος υπολογίζετε τον διαγώνιο πίνακα ιδιοτιμών \underline{L} που αποτελείται από τις ιδιοτιμές του πίνακα \underline{A} ή από το γινόμενο του πίνακα \underline{A} με τον πίνακα \underline{M} και τον αντίστροφο \underline{M}^{-1} και σχηματίζει τη μορφή:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Και ο άλλος τρόπος υπολογισμού του πίνακα \underline{L} είναι:

$$\underline{L} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{M} \quad (4.12)$$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ότι το τελευταίο βήμα για τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα γίνεται με τον υπολογισμό του **πίνακα μετάβασης(transition matrix) $\underline{\Phi}(t)$** :

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{M}^{-1} \quad (4.13)$$

Όπου $\underline{\Phi}_0(t)$ είναι ο **κανονικός πίνακας μετάβασης(canonical transition matrix)**:

$$\underline{\Phi}_0(t) = e^{\underline{L}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Και διακρίνονται 3 περιπτώσεις για τη μορφή του πίνακα \underline{L} και του πίνακα $\underline{\Phi}_0(t)$ ανάλογα με τις ιδιοτιμές:

1^η περίπτωση με απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$.

Με απλές ιδιοτιμές οι πίνακες \underline{L} και $\underline{\Phi}_0(t)$ παίρνουν τη μορφή:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

2^η περίπτωση με πολλαπλές ιδιοτιμές $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n$.

Με πολλαπλές ιδιοτιμές οι πίνακες \underline{L} και $\underline{\Phi}_0(t)$ παίρνουν τη μορφή:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

3^η περίπτωση με μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ και $\lambda_2 = \sigma - j\omega$.

Με μιγαδικές ιδιοτιμές οι πίνακες \underline{L} και $\underline{\Phi}_0(t)$ παίρνουν τη μορφή:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \sigma \nu(\omega t) & -e^{\sigma t} \eta \mu(\omega t) & 0 & \dots & 0 \\ e^{\sigma t} \eta \mu(\omega t) & e^{\sigma t} \sigma \nu(\omega t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.5 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα.

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ότι ο Kalman Rudolph το 1960 εισήγαγε στον χώρο κατάστασης τις έννοιες ελεγχιμότητα (controllability) και παρατηρησιμότητα (observability) στα επιστήμη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Άρα μπορεί να διατυπωθεί ο ορισμός της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας:

- **Ελέγξιμο** είναι ένα σύστημα που διαθέτει ένα σήμα εισόδου $u(t)$ που μπορεί να μετατρέψει μια αρχική κατάσταση $x_0(t)$ σε μια άλλη επιθυμητή κατάσταση $x(t)$ σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $t_0 \leq t \leq T$. Συμπερασματικά ο τύπος της ελεγχιμότητας είναι:

$$P_c = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B} \quad \underline{A}^2\underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{B}] \quad (4.21)$$

Για να είναι ένα σύστημα ελέγξιμο πρέπει η ορίζουσα του πίνακα P_c να είναι διάφορη του μηδενός: $\det P_c \neq 0$.

Όπου \underline{A} είναι ο πίνακας ενός συστήματος (system matrix).

Όπου \underline{B} είναι ο πίνακας εισόδου (input matrix).

- **Παρατηρήσιμο** είναι ένα σύστημα που διαθέτει ένα σήμα εισόδου $u(t)$ και σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα T μπορεί να προσδιοριστεί μια αρχική κατάσταση από τις παρατηρήσεις στην έξοδο $y(t)$ σε χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$. Άρα ο τύπος της παρατηρησιμότητας είναι:

$$P_o = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \\ \vdots \\ \underline{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

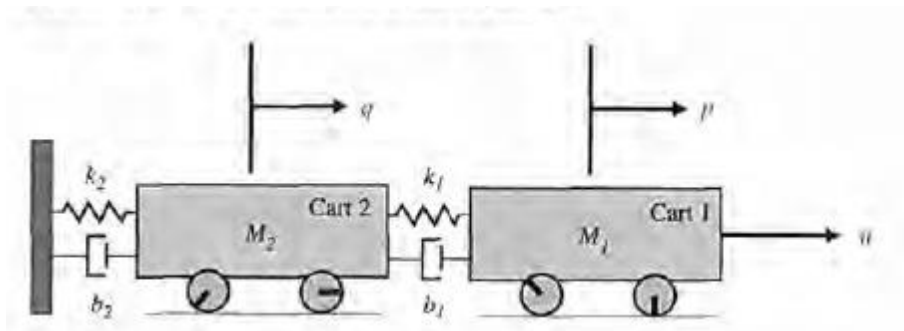
Για να είναι ένα σύστημα παρατηρήσιμο πρέπει η ορίζουσα του πίνακα P_o να είναι διάφορη του μηδενός: $\det P_o \neq 0$.

Όπου \underline{A} είναι ο πίνακας ενός συστήματος (system matrix).

Όπου \underline{C} είναι ο πίνακας εξόδου (output matrix).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.6 Παραδείγματα

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ένα παράδειγμα στο χώρο κατάστασης χρησιμοποιώντας 2 κυλιόμενα βαγόνια. Στα κυλιόμενα βαγόνια οι μάζες των βαγονιών είναι M_1, M_2 , p, q είναι οι θέσεις των βαγονιών αντίστοιχα, u είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στα βαγόνια δηλαδή στο σύστημα, k_1, k_2 είναι οι σταθερές των ελατηρίων και b_1, b_2 είναι οι συντελεστές απόσβεσης όπως φαίνεται στην εικόνα 4.1. Θεωρώντας ότι η τριβή κύλισης είναι σχεδόν ανύπαρκτη, με άλλα λόγια η τριβή κύλισης είναι συσσωρευμένη στους συντελεστές απόσβεσης b_1, b_2 .



Εικόνα 4.1 Δύο κυλιόμενα βαγόνια

Εφαρμόζοντας τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τις 2 μάζες των βαγονιών και χρησιμοποιώντας τον πίνακα 1.

Για το βαγόνι μάζας M_1 :

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{p} &= u - k_1(p - q) - b_1(\dot{p} - \dot{q}) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_1 \ddot{p} + b_1 \dot{p} + k_1 p &= u + k_1 q + b_1 \dot{q} \end{aligned}$$

Όπου \dot{p} είναι η ταχύτητα για το βαγόνι μάζας M_1 .

Όπου \ddot{p} είναι η επιτάχυνση για το βαγόνι μάζας M_1 .

Όπου \dot{q} είναι η ταχύτητα για το βαγόνι μάζας M_2 .

Όπου \ddot{q} είναι η επιτάχυνση για το βαγόνι μάζας M_2 .

Για το βαγόνι μάζας M_2 :

$$M_2\ddot{q} = k_1(p - q) + b_1(\dot{p} - \dot{q}) - k_2q - b_2\dot{q} \Rightarrow \\ \Rightarrow M_2\ddot{q} + (k_1 + k_2)q + (b_1 + b_2)\dot{q} = k_1p + b_1\dot{p}$$

Παρατηρώντας τις 2 διαφορικές εξισώσεις των μαζών προκύπτει ότι θα έχει τη μιτροειδή μορφή της 1^{ης} κανονικής μορφής.

Ορίζοντας ως μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = p$$

$$x_2 = q$$

Και στη συνέχεια παραγωγίζοντας τους:

$$x_3 = \dot{x}_1 = \dot{p}$$

$$x_4 = \dot{x}_2 = \dot{q}$$

Και παραγωγίζοντας τα x_3, x_4 :

$$\dot{x}_3 = \ddot{p} = \frac{b_1}{M_1}\dot{p} - \frac{k_1}{M_1}p + \frac{1}{M_1}u + \frac{k_1}{M_1}q + \frac{b_1}{M_1}\dot{q} \\ \dot{x}_4 = \ddot{q} = \frac{K_1 + K_2}{M_2}q - \frac{b_1 + b_2}{M_2}\dot{q} + \frac{K_1}{M_2}p + \frac{b_1}{M_2}\dot{p}$$

Αντικαθιστώντας τα x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\dot{x}_3 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 + \frac{k_1}{M_1}x_2 - \frac{b_1}{M_1}x_3 + \frac{b_1}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}u \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 - \frac{k_1 + k_2}{M_2}x_2 + \frac{b_1}{M_2}x_3 - \frac{b_1 + b_2}{M_2}x_4$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους της εξίσωσης κατάστασης (4.1):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1 + k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & -\frac{b_1 + b_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1 + k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & -\frac{b_1 + b_2}{M_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

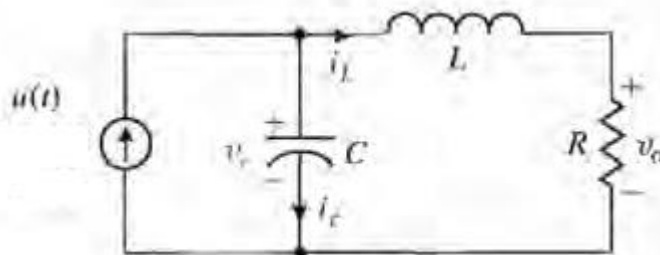
Λαμβάνοντας υπόψιν την θέση p ως μεταβλητή εξόδου, τότε η εξίσωση κατάστασης είναι (4.2):

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t) \Rightarrow \underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t)$$

(ο πίνακας D είναι ισούται με μηδέν)

$$\underline{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν ένα παράδειγμα με ένα κύκλωμα RLC που από αυτό υπολόγισαν τη συνάρτηση μεταφοράς με δεδομένους τους πίνακες \underline{A} , \underline{B} και \underline{C} ως εξής:



Εικόνα 4.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC

Το κύκλωμα RLC στο χώρο κατάστασης είναι:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -R \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

\underline{A} \underline{B}

$$y = [0 \quad R] \cdot \underline{x}$$

$$\underline{C}$$

Ο πίνακας \underline{D} είναι μηδέν.

Ο τύπος για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς είναι (4.3):

$$G(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}(s) + \underline{D}(s)$$

Υπολογίζεται το $(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$ αφού όλοι οι υπόλοιποι πίνακες είναι γνωστοί.

$$(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -R \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{A}) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = \Delta(s)$$

Πηγαίνοντας στον τύπο της συνάρτησης μεταφοράς (4.3):

$$G(s) = [0 \quad R] \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{R}{L}}{\Delta(s)} & \frac{-1}{C\Delta(s)} \\ \frac{1}{L\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R}{\Delta(s)} = \frac{\frac{R}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Ο Dorf Richard C. και ο Bishop Robert H. το 2016 ανέφεραν άλλο ένα παράδειγμα για τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης $\underline{\Phi}$ και την απόκριση του κυκλώματος RLC, όμως αυτή τη φορά τα RLC παίρνουν τιμές δηλαδή, $R=3$, $L=1$, $C=1/2$ και ως μεταβλητές κατάστασης $x_1 = u_C$, $x_2 = i_L$ με αρχικές συνθήκες $x_1(0)$ και $x_2(0)$ που περιγράφουν αντίστοιχα την πρωτεύων τιμή που παίρνει η τάση στα άκρα του πυκνωτή και την πρωτεύων τιμή του ρεύματος που διαρρέει στα άκρα του πηνίου, πλέον θα βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}$ και η απόκριση του κυκλώματος RLC ως εξής:

Με δεδομένες τις τιμές των R, L και C οι πίνακες $\underline{A}, \underline{B}$ και \underline{C} είναι:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = [0 \quad 3]$$

Ο πίνακας μετάβασης υπολογίζεται από τον τύπο (4.5):

$$\underline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right]^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\det(\underline{z})} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^T\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} & \frac{-2}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 4:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Για ελεύθερη απόκριση και για $x_1(0) = x_2(0) = 1$ και $u(t) = 0$, η απόκριση υπολογίζεται από τον τύπο(4.6):

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t)$$

Άρα.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Δοκιμάζοντας αυθαίρετα τιμές για τον χρόνο t στην παραπάνω εξίσωση, βρίσκονται οι αποκρίσεις για τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(t), x_2(t)$. Δοκιμάζοντας τις τιμές για το $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$.

Για $t=0.25$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.25) \\ x_2(0.25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.5} \\ e^{-0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

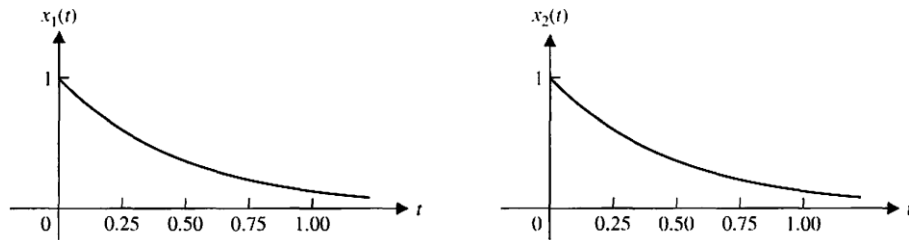
Για $t=0.5$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.5) \\ x_2(0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} \\ e^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

Για $t=0.75$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.75) \\ x_2(0.75) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1.5} \\ e^{-1.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.22 \end{bmatrix}$$

Τελικά οι αποκρίσεις για τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(t), x_2(t)$ είναι:



Εικόνα 4.3 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης $x_1(t), x_2(t)$

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα παράδειγμα για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων και στη συνέχεια για τον υπολογισμό της απόκρισης των μεταβλητών κατάστασης. Έστω, γνωρίζοντας από ένα σύστημα μόνο τον πίνακα $\underline{A} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, μπορούν να βρεθούν οι ιδιοτιμές ως εξής:

Από τον τύπο (4.8).

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$$

Οπότε:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

Βρίσκοντας από τη διακρίνουσα τις ιδιοτιμές.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = -0.382 \text{ και } \lambda_2 = -2.618$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\lambda \underline{I} - \underline{A})\underline{u} = 0$ (4.9) βρίσκονται τα ιδιοδιανύσματα.

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

Δοκιμάζοντας στη παραπάνω σχέση όπου $\lambda = \lambda_1 = -0.382$.

$$\begin{bmatrix} 1.618 & 1 \\ 1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επιλέγοντας αυθαίρετα τη σχέση: $1.618u_{11} + u_{21} = 0$

Στη συνέχεια θέτοντας: $u_{11} = 1$ και $u_{21} = -1.618$

Επομένως ο πίνακας $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.618 \end{bmatrix}$

Δοκιμάζοντας στη παραπάνω σχέση όπου $\lambda = \lambda_2 = -2.618$.

$$\begin{bmatrix} -0.618 & 1 \\ 1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επιλέγοντας αυθαίρετα τη σχέση: $-0.618u_{12} + u_{22} = 0$

Στη συνέχεια θέτοντας: $u_{12} = 1$ και $u_{22} = 0.618$

Επομένως ο πίνακας $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.618 \end{bmatrix}$

Πλέον σχηματίζεται ο πίνακας μετασχηματισμού (4.10) $\underline{M} = [\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1.618 & 0.618 \end{bmatrix}$

Και ο αντίστροφος: $\underline{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{M})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1.618 & 0.618 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.276 & -0.447 \\ 0.724 & 0.447 \end{bmatrix}$

Βρίσκοντας τον πίνακα \underline{L} για απλές ιδιοτιμές από τη σχέση (4.15).

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.382 & 0 \\ 0 & -2.618 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζοντας τον κανονικό πίνακα μετάβασης από την σχέση (4.16).

$$\underline{\Phi}_0(t) = e^{\underline{L}t} = \begin{bmatrix} e^{-0.382t} & 0 \\ 0 & e^{-2.618t} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης υπολογίζεται από τον τύπο (4.13):

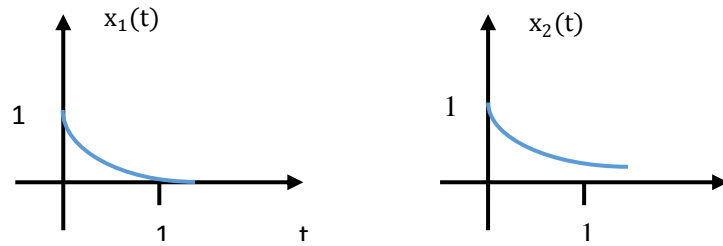
$$\begin{aligned} \underline{\Phi}(t) &= \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{M}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1.618 & 0.618 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-0.382t} & 0 \\ 0 & e^{-2.618t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.276 & -0.447 \\ 0.724 & 0.447 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.276e^{-0.382t} + 0.724e^{-2.618t} & -0.447e^{-0.382t} + 0.447e^{-2.618t} \\ -0.447e^{-0.382t} + 0.447e^{-2.618t} & 0.723e^{-0.382t} + 0.276e^{-2.618t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_2(0) = 1$ και από τον τύπο (4.6) βρίσκεται η απόκριση του συστήματος.

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t)$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.171e^{-0.382t} & 1.171e^{-2.618t} \\ 0.277e^{-0.382t} & 0.723e^{-2.618t} \end{bmatrix}$$

Και τέλος, οι αποκρίσεις των μεταβλητών κατάστασης είναι:



εικόνα 4.4 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης

Ο Καλλιγερόπουλος Δ και η Βασιλειάδου Σ. το 2005 ανέφεραν ένα παράδειγμα για την εύρεση του πίνακα ελεγχιμότητας αλλά και για του πίνακα παρατηρησιμότητας. Δίνεται η εξίσωση κατάστασης και η εξίσωση εξόδου ενός συστήματος:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Πρώτα γίνονται οι πολλαπλασιασμοί μεταξύ των $\underline{A} \cdot \underline{B}$ και $\underline{C} \cdot \underline{A}$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ελεγχιμότητας βρίσκεται από τη σχέση (4.21):

$$P_c = [\underline{B} \quad \underline{AB} \quad \underline{A^2B} \quad \dots \quad \underline{A^{n-1}B}]$$

$$P_c = [\underline{B} \quad \underline{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Βρίσκοντας και την ορίζουσα του πίνακα P_c .

$$\det(P_c) = -6 - 0 = -6 \neq 0$$

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας βρίσκεται από τον τύπο (4.22):

$$P_o = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \\ \vdots \\ \underline{CA^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας και εδώ την ορίζουσα του πίνακα P_o .

$$\det(P_o) = -3 + 3 = 0$$

Τελικά το σύστημα είναι ελέγξιμο αλλά δεν είναι παρατηρήσιμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Προσομοίωση με MATLAB και Simulink

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το κομμάτι της προσομοίωσης, εφαρμόζοντας τις περισσότερες μεθόδους μοντελοποίησης μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή και για την ακρίβεια με ειδικά προγράμματα όπως είναι το MATLAB και το Simulink που περιέχεται στο MATLAB. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποια βασικά παραδείγματα για την ανάδειξη βασικών εντολών στη προσομοίωση. Και τέλος, θα αναφερθούν τα συμπεράσματα της πτυχιακής.

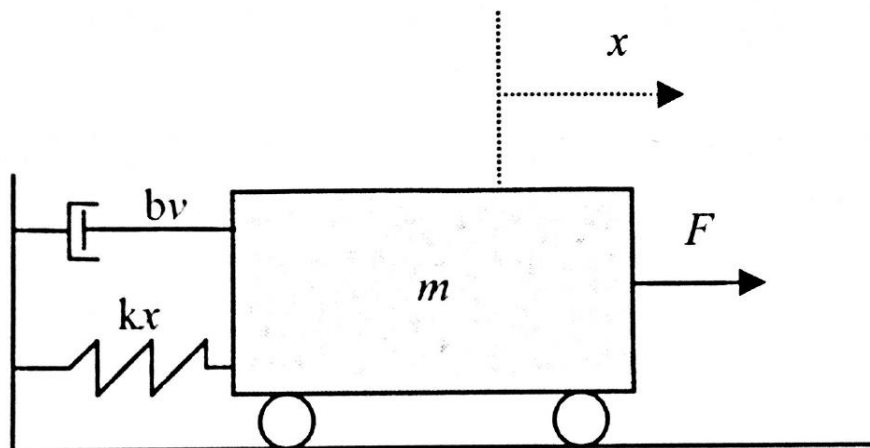
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.1 Συνάρτηση μεταφοράς και χώρος κατάστασης

Ο Σύρκος Π. Γεώργιος και Κούκος Κ. Ιωάννης το 2011 ανέφεραν ένα παράδειγμα με μηχανικό σύστημα που αποτελείται από ένα βαγόνι μάζας $m=1$ και συνδέεται με ένα ελατήριο $k=20$ και με έναν αποσβεστήρα $b=10$ όπως φαίνεται στη εικόνα 5.1. Στο βαγόνι ασκείται δύναμη F η οποία προκαλεί στο βαγόνι να μετατοπιστεί κατά x , άρα η είσοδος είναι η δύναμη F και η έξοδος η μετατόπιση x . Στη συνέχεια θα χωριστεί το παράδειγμα σε δύο μέρη και στο πρώτο μέρος θα αποδειχθεί η μετατροπή από το χώρο κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς και στο δεύτερο μέρος θα αποδειχθεί η μετατροπή από συνάρτηση μεταφοράς σε χώρο κατάστασης. Επίσης, η διαφορική εξίσωση του μηχανικού συστήματος με βάση τον πίνακα 2.1:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - Kx(t) - b \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - 20x(t) - 10 \frac{dx}{dt}$$

ή

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - Kx(t) - b\dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = F(t) - 20x(t) - 10\dot{x}(t)$$



Εικόνα 5.1 Μηχανικό σύστημα

1) Μετατροπή από χώρο κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Πριν χρησιμοποιηθεί το MATLAB πρώτα θα χρησιμοποιηθούν οι μεταβλητές κατάστασης και μετά οι εξισώσεις κατάστασης για τον υπολογισμό των πινάκων \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} . Η μιτροειδή μορφή της εξίσωσης του μηχανικού συστήματος θα είναι 1^{ης} μορφής.

Θεωρώντας μεταβλητές κατάστασης:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)$$

$$x_2(t) = x(t)$$

Και παραγωγίζοντας τις μεταβλητές κατάστασης.

$$\dot{x}_1(t) = \ddot{x}(t) = F(t) - 20x(t) - 10\dot{x}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}(t) = x_1(t)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της εξίσωσης κατάστασης (4.1) και τον τύπο της εξίσωσης εξόδου (4.2):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

\underline{A} \underline{B}

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

\underline{C}

Και ο πίνακας $\underline{D} = 0$.

Στο editor του MATLAB:

```
%Δήλωση των πινάκων A,B,C,D
A=[-10 -20;1 0]
B=[1;0]
C=[0 1]
D = 0
%Δήλωση του χρόνου δειγματοληψίας
Ts = 1
%Εφαρμογή των τύπων εξίσωσης κατάστασης και εξίσωσης εξόδου
sys = ss(A,B,C,D,Ts)
%Εύρεση του αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς από το χώρο
κατάστασης
%num=αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς
%den=παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,Ts)
%Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς
G=tf(num,den)
```

Και το αποτέλεσμα στο command window:

sys =

A =

 x1 x2
x1 -10 -20
x2 1 0

B =

 u1
x1 1
x2 0

C =

 x1 x2
y1 0 1

D =

 u1
y1 0

Sample time: 1 seconds

Discrete-time state-space model.

num =

0 0 1

den =

1 10 20

G =

1

s² + 10 s + 20

Continuous-time transfer function.

(Εφαρμόζεται η περίοδος δειγματοληψίας και ορίζεται ίση με 1 διότι στο MATLAB για την εύρεση του χώρου κατάστασης σε μοντέλα συνεχούς και διακριτού χρόνου χρειάζεται να δηλωθεί η περίοδος δειγματοληψίας)

2) Μετατροπή από συνάρτηση μεταφοράς σε χώρο κατάστασης.

Βρίσκοντας πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F(t) - Kx(t) - b\dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = F(t) - 20x(t) - 10\dot{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)s^2 &= F(s) - 20X(s) - 10X(s)s \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s)(s^2 + 10s + 20) &= F(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{1}{s^2 + 10s + 20} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την συνάρτηση μεταφοράς με το αποτέλεσμα που βρέθηκε στην προηγούμενη περίπτωση, παρατηρείται ότι είναι ακριβώς ίδιοι οι αριθμητές και οι παρονομαστές της συνάρτησης μεταφοράς(num,den).

Για την τελευταία επαλήθευση, χρησιμοποιείται πάλι κώδικας στο editor του MATLAB:

```
%Δήλωση του αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς
num=1;
den=[1 10 20];
%Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς
G=tf(num,den)
%Εύρεση των πινάκων A,B,C,D του χώρου κατάστασης
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
%Εφαρμογή των τύπων εξίσωσης κατάστασης και εξίσωσης εξόδου
Ts=1;
sys=ss(A,B,C,D)
```


Και το αποτέλεσμα που εμφανίζει το command window:

G =

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

Continuous-time transfer function.

A =

$$\begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D =

$$0$$

sys =

A =

$$\begin{array}{cc} x1 & x2 \\ x1 & -10 \ -20 \\ x2 & 1 \ 0 \end{array}$$

B =

$$\begin{array}{c} u1 \\ x1 \ 1 \\ x2 \ 0 \end{array}$$

C =

$$\begin{array}{cc} x1 & x2 \\ y1 & 0 \ 1 \end{array}$$

D =

$$u1$$

$y_1 = 0$

Sample time: 1 seconds

Discrete-time state-space model.

Παρατηρώντας και αυτό το αποτέλεσμα στο command window του MATLAB επαληθεύτε ότι μπορεί να γίνει με επιτυχία η εναλλαγή από χώρο κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς όπως και από συνάρτηση μεταφοράς σε χώρο κατάστασης αφού βρέθηκαν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.2 Απόκριση συστημάτων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης

Ο Σύρκος Π. Γεώργιος και Κούκος Κ. Ιωάννης το 2011 ανέφεραν το σύστημα στάθμης υγρού ως ένα βασικό σύστημα 1^{ης} τάξης όπως φαίνεται στην εικόνα 5.2, που στο οποίο θα αποδειχθεί η απεικόνιση της βηματικής όπως και της κρουστικής απόκρισης με χρήση MATLAB.

Διαθέτει ως διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}(A\rho h(t)) = \rho F_{in}(t) - \rho F_{out}(t)$$

Όπου ρ =πυκνότητα του υγρού της δεξαμενής.

Όπου A = επιφάνεια της διατομής της δεξαμενής.

Όπου $F_{out} = ch$.

Άρα, η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$t \frac{dh(h(t))}{dt} + h(t) = kF_{in}(t)$$

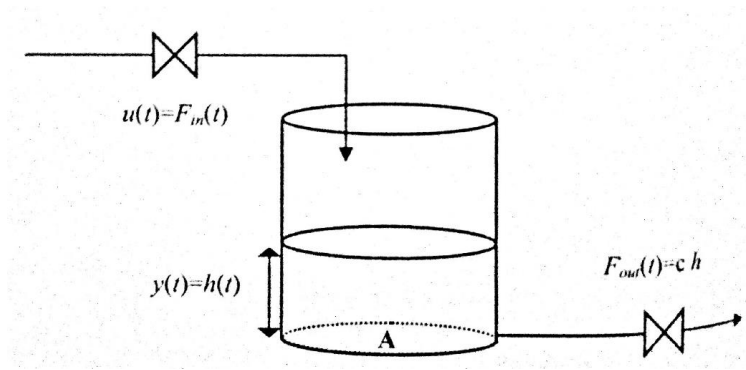
Ορίζοντας τις σταθερές: $\tau = \frac{A}{c}$ και $c = A = 1$.

Στο χώρο κατάστασης περιγράφεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.1) και (4.2) ως εξής :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ \tau \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} k \\ \tau \end{bmatrix} F_{in}(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} x(t)$$

Και σε συνάρτηση μεταφοράς η διαφορική εξίσωση περιγράφεται ως εξής:

$$G(s) = \frac{y(s)}{F_{in}(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$



Εικόνα 5.2 Σύστημα στάθμη υγρού

Και στο editor του MATLAB:

```

%Δήλωση μεταβλητών της διαφορικής εξίσωσης
c=1; A=1;
tau=A/c;
k=1/c;
%Δήλωση των πινάκων A,B,C,D
Ac=-1/tau;
Bc=k/tau;
Cc=1;
Dc=0;
%Εύρεση του χώρου κατάστασης
sys_ss_c=ss(Ac,Bc,Cc,Dc)
%Δήλωση του αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς
num=k
den=[tau 1]
%Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς
sys_tf_c=tf(num,den)
%Εφαρμογή της βηματικής απόκρισης στο σύστημα που αναπαριστάτε στο χώρο
%κατάστασης
subplot(2,2,1)
plot(step(sys_ss_c))
title('step with ss')
%Εφαρμογή της κρουστικής απόκρισης στο σύστημα που αναπαριστάτε στο χώρο
%κατάστασης
subplot(2,2,2)
plot(impulse(sys_ss_c))
title('impulse with ss')
%Εφαρμογή της βηματικής απόκρισης στο σύστημα που απεικονίζεται από τη
%συνάρτηση μεταφοράς
subplot(2,2,3)
plot(step(sys_tf_c))
title('step with tf')
%Εφαρμογή της κρουστικής απόκρισης στο σύστημα που απεικονίζεται από της
%συνάρτηση μεταφοράς
subplot(2,2,4)
plot(impulse(sys_tf_c))
title('impulse with tf')

```

To command window του MATLAB έχει ως αποτέλεσμα:

```
sys_ss_c =
```

```
A =
```

```
    x1
```

```
    x1 -1
```

```
B =
```

```
    u1
```

```
    x1 1
```

```
C =
```

```
    x1
```

```
    y1 1
```

```
D =
```

```
    u1
```

```
    y1 0
```

Continuous-time state-space model.

```
num =
```

```
    1
```

```
den =
```

```
    1  1
```

```
sys_tf_c =
```

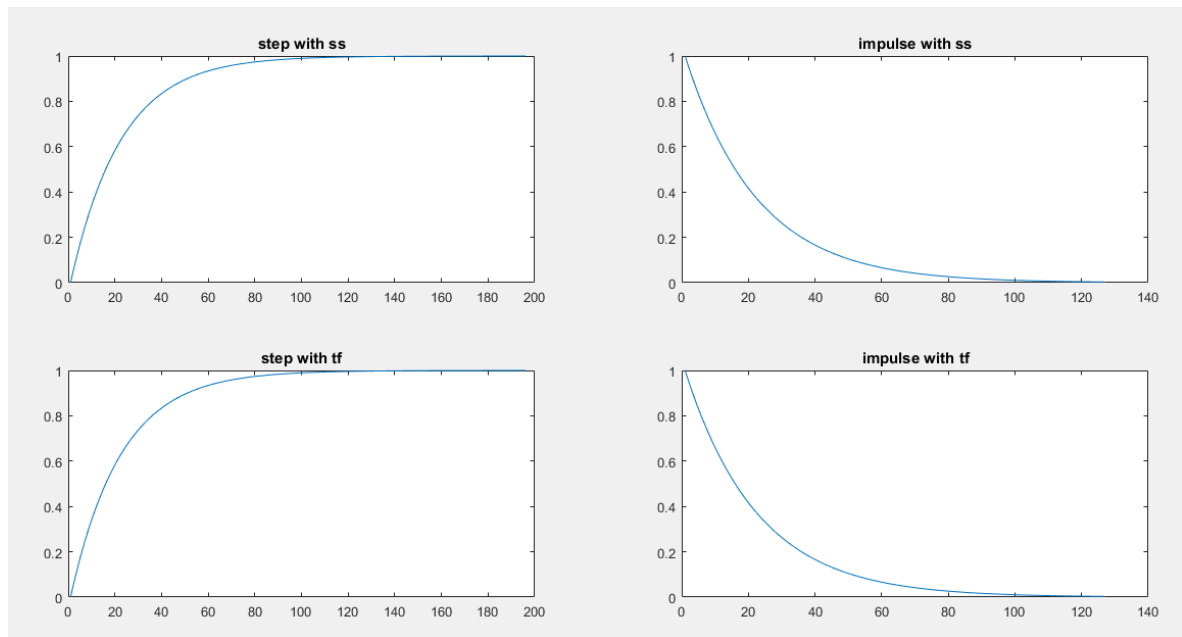
```
    1
```

```
-----
```

```
    s + 1
```

Continuous-time transfer function.

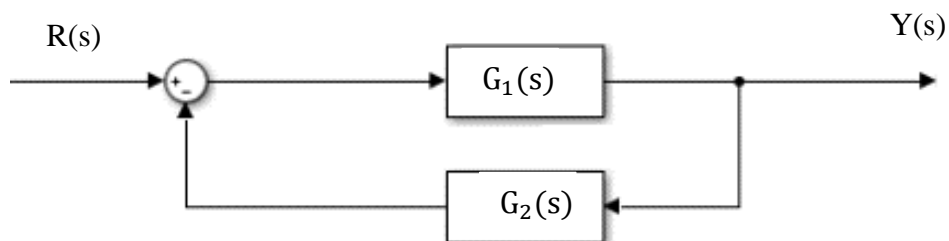
Και αναδεύεται το παράθυρο:



Εικόνα 5.3 Χρονικές αποκρίσεις συστήματος 1^{ης} τάξης με βηματική και κρουστική είσοδο

Παρατηρώντας την εικόνα 5.3 που προέκυψε από το command window του MATLAB φαίνεται ότι η βηματική όπως και η κρουστική απόκριση είναι ίδιες για το χώρο κατάστασης όπως και για τη συνάρτηση μεταφοράς και είναι μια καλή επαλήθευση για τον σωστό υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς όπως και του χώρου κατάστασης. Συμπερασματικά με όποιον τρόπο βρεθεί το μοντέλο δηλαδή είτε με συνάρτηση μεταφοράς, είτε με αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης, οι αποκρίσεις τους θα είναι ίδιες. (Όπου ss=state space=χώρος κατάστασης και όπου tf=transfer function=συνάρτηση μεταφοράς).

Ο Σύρκος Π. Γεώργιος και Κούκος Κ. Ιωάννης το 2011 ανέφεραν ένα σύστημα 2^{ης} τάξης στο οποίο θα εφαρμοστεί βηματική απόκριση αλλά θα δοκιμαστεί και η κρουστική απόκριση στην είσοδο. Στη συνέχεια θα βρεθεί το διάγραμμα πόλων και μηδενιστών και θα βρεθούν τα χαρακτηριστικά των αποκρίσεων. Το σύστημα 2^{ης} τάξης παριστάνεται στην εικόνα 5.4.



Εικόνα 5.4 Λειτουργικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης

Στο editor του MATLAB:

```
%Δήλωση του αριθμητή και παρονομαστή του G1
num1=[12.5]
den1=[1 1 0]
%Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς της G1
G1=tf(num1,den1)
% Δήλωση του αριθμητή και παρονομαστή του G2
num2=[0.18 1]
den2=1
%Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς της G2
G2=tf(num2,den2)
%Υπολογισμός του συνόλου των συστημάτων G1 και G2 με ανατροφοδότηση
G=feedback(G1,G2)
%Εφαρμογή της βηματικής απόκρισης στο συνολικό σύστημα G
step(G)
title('step response of G')
%Δημιουργία ενός καινούργιου αναδυόμενου παραθύρου
figure
%Εφαρμογή της κρουστικής απόκρισης στο συνολικό σύστημα G
impulse(G)
title('impulse response of G')
%Δημιουργία ενός καινούργιου αναδυόμενου παραθύρου
figure
%Δημιουργία του διαγράμματος πόλων μηδενιστών για το συνολικό σύστημα G
pzmap(G)
title('poles and zeros graph of G')
```

Στο command window του MATLAB:

```
num1 =
    12.5000
```

```
den1 =
     1     1     0
```

```
G1 =
    12.5
-----
    s^2 + s
```

Continuous-time transfer function.

```
num2 =
    0.1800  1.0000
```

```
den2 =
     1
```

```
G2 =
```

$$0.18 s + 1$$

Continuous-time transfer function.

$G =$

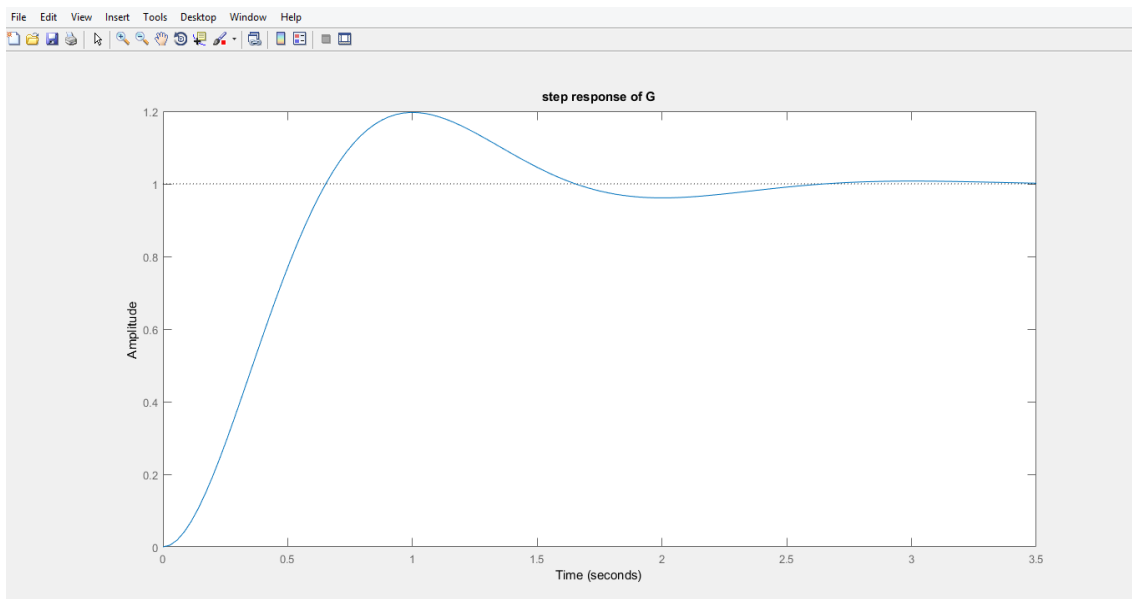
$$12.5$$

$$s^2 + 3.25 s + 12.5$$

Continuous-time transfer function.

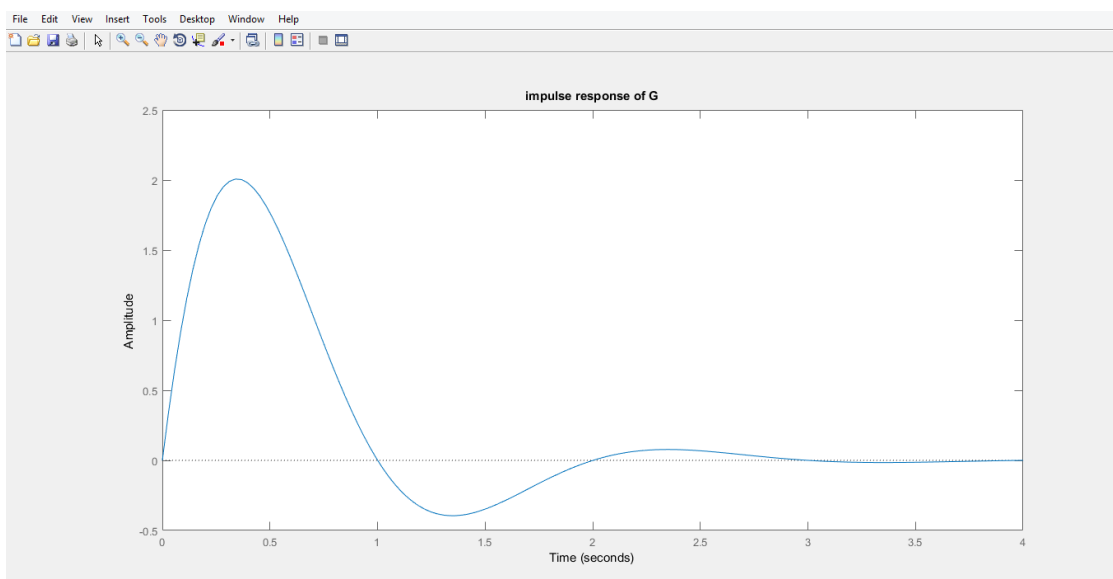
Και υπάρχουν 3 αναδυόμενα παράθυρα.

Με τη βηματική απόκριση.



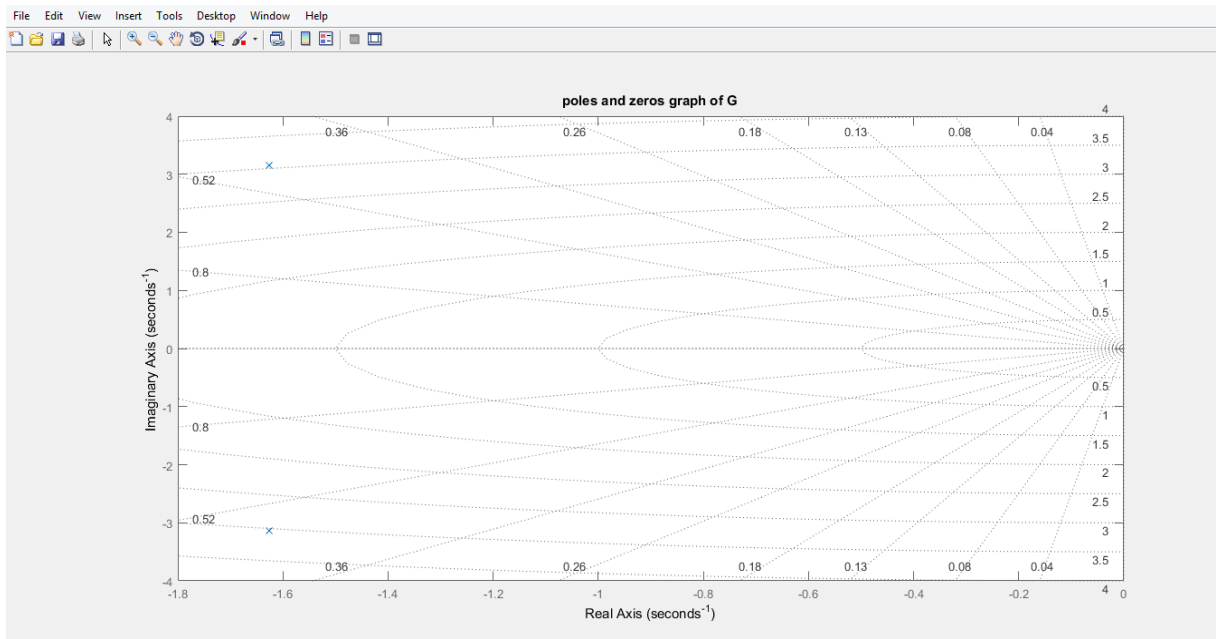
Εικόνα 5.5 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης με βηματική είσοδο

Με τη κρουστική απόκριση.



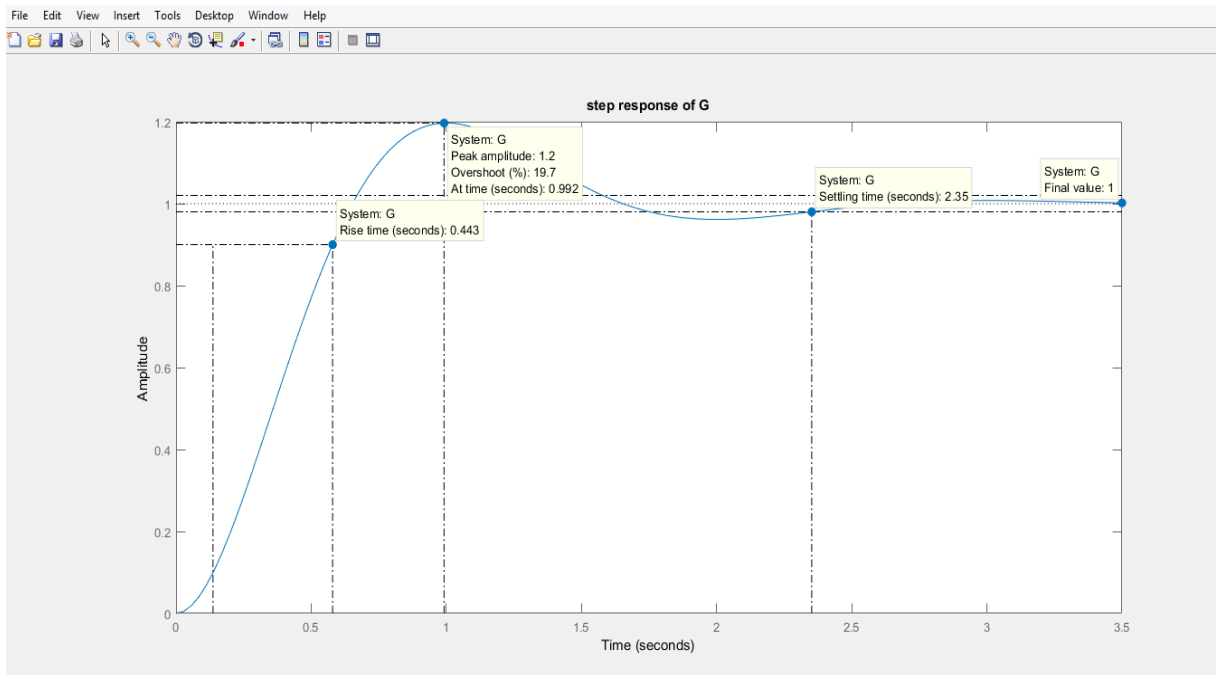
Εικόνα 5.6 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο

Διάγραμμα πόλων και μηδενιστών

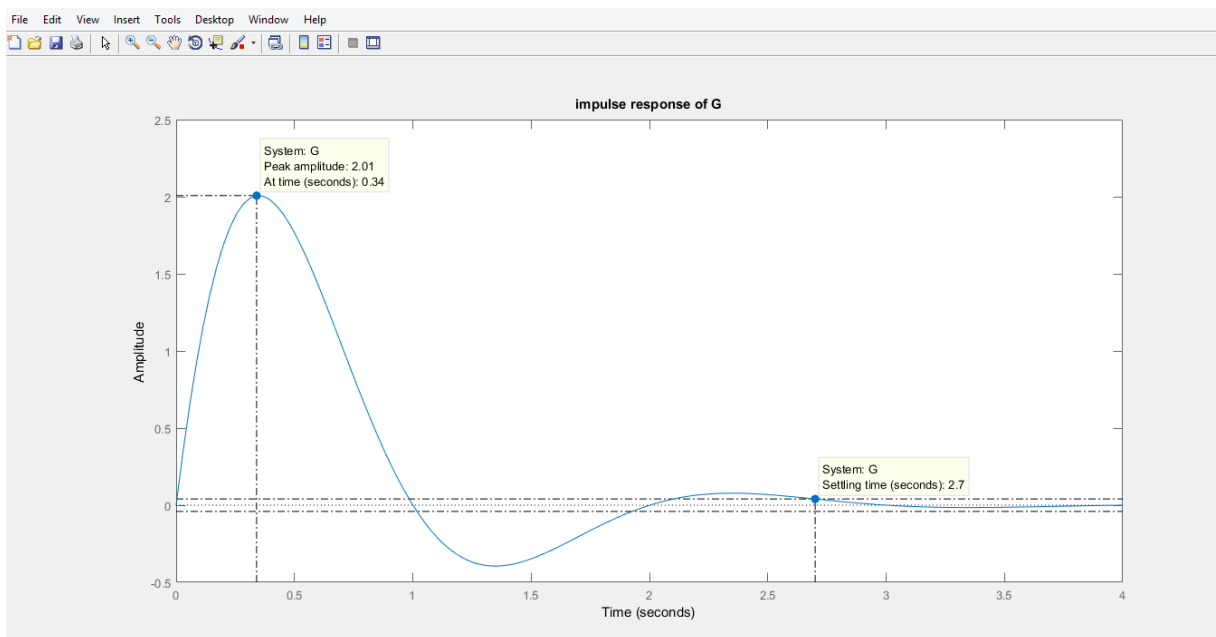


Εικόνα 5.7 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης

Τα χαρακτηριστικά του συστήματος 2^{ης} τάξης βρίσκονται πατώντας δεξί κλικ με το ποντίκι του υπολογιστή στα αναδυόμενα παράθυρα της βηματικής και κρουστικής απόκρισης (εικόνα 5.5 και εικόνα 5.6) και επιλέγοντας στη συνέχεια το **characteristics** υπάρχουν οι επιλογές: **peak response** (απόκριση κορυφής που περιέχει τη υπερύψωση, τη μέγιστη κορυφή όπως και το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στη μέγιστη κορυφή) και **settling time** (χρόνος αποκατάστασης), **rise time** (χρόνος ανύψωσης) και **steady state** (μόνιμη κατάσταση) για την βηματική απόκριση ενώ για την κρουστική υπάρχουν μόνο το **peak response** (απόκριση κορυφής που περιέχει τη μέγιστη κορυφή όπως και το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στη μέγιστη κορυφή) και το **settling time** (χρόνος ανύψωσης). Στη συνέχεια πατώντας αριστερό κλικ σε όλα τα αναφερόμενα χαρακτηριστικά, εμφανίζονται πάνω στα διαγράμματα που αποικίζονται στις εικόνες 5.8 και 5.9 για τη βηματική και τη κρουστική απόκριση αντίστοιχα.



Εικόνα 5.8 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης με βηματική είσοδο



Εικόνα 5.9 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο

Ο Σύρκος Π. Γεώργιος και Κούκος Κ. Ιωάννης το 2011 αναφέρουν ότι μια παράμετρος που επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό ένα σύστημα 2^{ης} τάξης είναι ο συντελεστής απόσβεσης ζ και το MATLAB δίνει τη δυνατότητα να παρατηρηθούν ταυτόχρονα πολλές αποκρίσεις με διαφορετικό ζ . Γι' αυτό στη παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς θα γίνουν δοκιμές με βηματική και κρουστική απόκριση για διάφορες τιμές του ζ . Η συνάρτηση μεταφοράς εφαρμόζεται αρκετές φορές με διαφορετικό ζ και είναι:

$$G(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

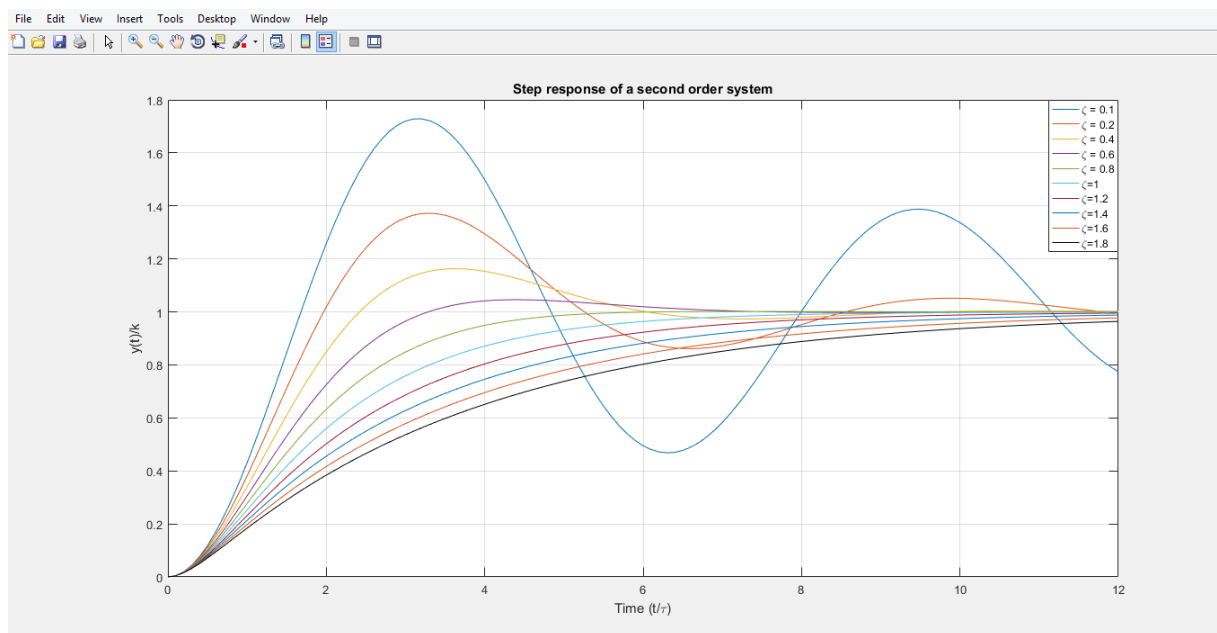
Ο κώδικας στο editor του MATLAB με βηματική απόκριση:

```
%Δήλωση τιμών του ζ από 0.1 ως 1.9 και με βήμα 0.2
z=0.1:0.2:1.9;
%Δήλωση των μεταβλητών της συνάρτησης μεταφοράς
tau=1;
k=1;
%Ορισμός του χρόνου για τις αποκρίσεις από 0sec ως 12 με βήμα 0.1
t=0:0.1:12;
%Δήλωση του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς
num=k;
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y1 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y1
den1=[tau^2 2*z(1,1)*tau 1];
y1=step(tf(num,den1),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y2 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y2
den2=[tau^2 2*z(1,2)*tau 1];
y2=step(tf(num,den2),t);
%Δήλωση της συνάρτησης μεταφοράς y3 και εφαρμογή της βηματικής απόκρισης
για
%τη y3
den3=[tau^2 2*z(1,3)*tau 1];
y3=step(tf(num,den3),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y4 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y4
den4=[tau^2 2*z(1,4)*tau 1];
y4=step(tf(num,den4),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και τη συνάρτησης μεταφοράς y5 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y5
den5=[tau^2 2*z(1,5)*tau 1];
y5=step(tf(num,den5),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y6 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y6
den6=[tau^2 2*z(1,6)*tau 1];
y6=step(tf(num,den6),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y7 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y7
den7=[tau^2 2*z(1,7)*tau 1];
y7=step(tf(num,den7),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y8 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y8
den8=[tau^2 2*z(1,8)*tau 1];
y8=step(tf(num,den8),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y9 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y9
den9=[tau^2 2*z(1,9)*tau 1];
y9=step(tf(num,den9),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y10 και εφαρμογή της
βηματικής απόκρισης για
%τη y10
den10=[tau^2 2*z(1,10)*tau 1];
y10=step(tf(num,den10),t);
```

%Εμφάνιση όλων των αποκρίσεων σε ένα διάγραμμα και μετονομασία των αξόνων x και y όπως και δήλωση τίτλου στο διάγραμμα αλλά και εμφάνιση πίνακα με τις %διάφορες τιμές του ζ

```
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4,t,y5,t,y6,t,y7,t,y8,t,y9,t,y10,'k'), xlabel('Time (t/\tau)'), ylabel('y(t)/k'), title('Step response of a second order system'), grid, legend('\zeta = 0.1', '\zeta = 0.2', '\zeta = 0.4', '\zeta = 0.6', '\zeta=0.8', '\zeta=1', '\zeta=1.2', '\zeta=1.4', '\zeta=1.6', '\zeta=1.8')
```

Ως έξοδος εμφανίζεται ένα παράθυρο όπως φαίνεται στην εικόνα 5.10.



Εικόνα 5.10 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ με βηματική είσοδο

Ο κώδικας στο editor του MATLAB με κρουστική απόκριση:

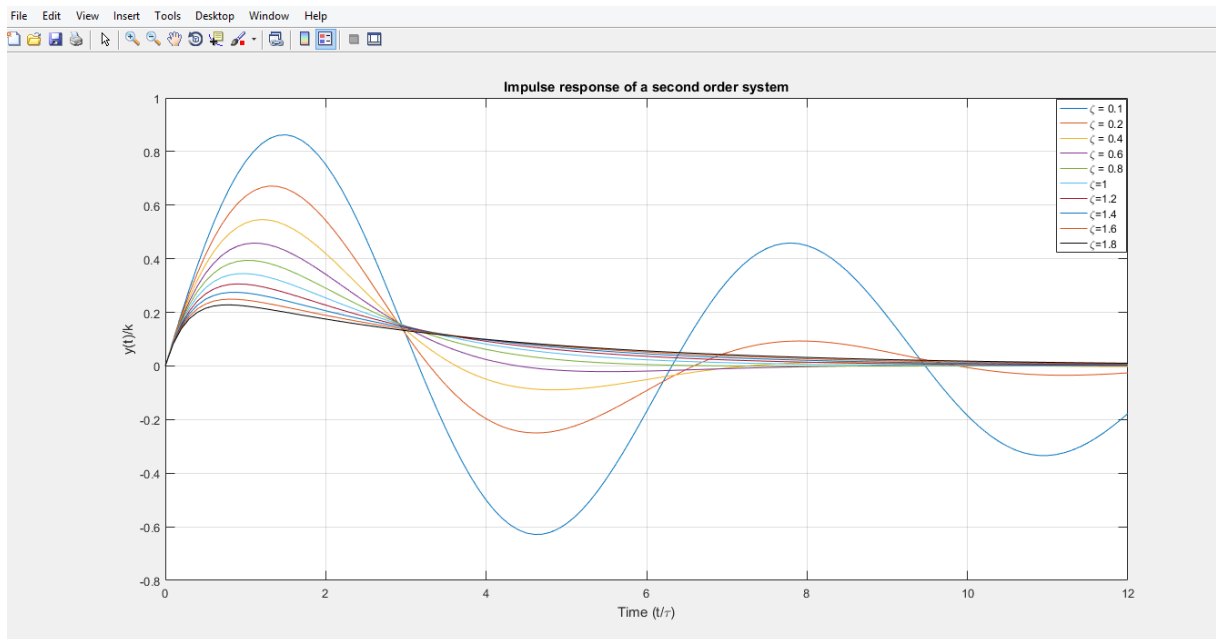
```
%Δήλωση τιμών του ζ από 0.1 ως 1.9 και με βήμα 0.2
z=0.1:0.2:1.9;
%Δήλωση των μεταβλητών της συνάρτησης μεταφοράς
tau=1;
k=1;
%Ορισμός του χρόνου για τις αποκρίσεις από 0sec ως 12 με βήμα 0.1
t=0:0.1:12;
%Δήλωση του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς
num=k;
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y1 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y1
den1=[tau^2 2*z(1,1)*tau 1];
y1=impz(t,den1);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y2 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y2
den2=[tau^2 2*z(1,2)*tau 1];
y2=impz(t,den2);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y3 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y3
den3=[tau^2 2*z(1,3)*tau 1];
y3=impz(t,den3);
```

```

%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y4 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y4
den4=[tau^2 2*z(1,4)*tau 1];
y4=impulse(tf(num,den4),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y5 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y5
den5=[tau^2 2*z(1,5)*tau 1];
y5=impulse(tf(num,den5),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y6 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y6
den6=[tau^2 2*z(1,6)*tau 1];
y6=impulse(tf(num,den6),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y7 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y7
den7=[tau^2 2*z(1,7)*tau 1];
y7=impulse(tf(num,den7),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y8 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y8
den8=[tau^2 2*z(1,8)*tau 1];
y8=impulse(tf(num,den8),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y9 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y9
den9=[tau^2 2*z(1,9)*tau 1];
y9=impulse(tf(num,den9),t);
%Δήλωση του παρονομαστή και της συνάρτησης μεταφοράς y10 και εφαρμογή της
κρουστικής απόκρισης για
%τη y10
den10=[tau^2 2*z(1,10)*tau 1];
y10=impulse(tf(num,den10),t);
%Εμφάνιση όλων των αποκρίσεων σε ένα διάγραμμα και μετονομασία των αξόνων x
%και y όπως και δήλωση τίτλου στο διάγραμμα αλλά και εμφάνιση πίνακα με τις
%διάφορες τιμές του ζ
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4,t,y5,t,y6,t,y7,t,y8,t,y9,t,y10,'k'), xlabel('Time
(t/\tau)'), ylabel('y(t)/k'), title('Impulse response of a second order
system'), grid, legend('\zeta = 0.1', '\zeta = 0.2', '\zeta = 0.4', '\zeta =
0.6', '\zeta=0.8', '\zeta=1', '\zeta=1.2', '\zeta=1.4', '\zeta=1.6', '\zeta=1.8')

```

Και στην έξοδο εμφανίζεται ένα παράθυρο με όλες τις αποκρίσεις για διάφορες τιμές του ζ.



Εικόνα 5.11 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ με κρουστική είσοδο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.3 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα

Για την ελεγχιμότητα και τη παρατηρησιμότητα ενός συστήματος⁹ θα εφαρμοσθούν με κώδικα MATLAB.

Ο κώδικας MATLAB που γράφτηκε στο editor είναι:

```
%Δήλωση των πινάκων A,B,C,D
A = [-1 1 0;4 0 -3;-6 8 10];
B = [1;0;-1];
C = [1 2 1];
D = 0;
%Υπολογισμός του πίνακα ελεγχιμότητας
Qc = ctrb(A,B);
%Υπολογισμός της τάξης(διαστάσεις) του πίνακα ελεγχιμότητας
rankQc = rank(Qc);
%Δείχνει στο command window τη πρόταση Controllable Matrix is Qc =
disp('Controllable Matrix is Qc = ');
disp(Qc);
%Αν η τάξη(διαστάσεις) του πίνακα ελεγχιμότητας είναι ίδια με τη
%τάξη(διαστάσεις) του πίνακα A τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο αλλιώς αν οι
%τάξεις(διαστάσεις) των πινάκων δεν είναι ίδιες τότε το σύστημα είναι μη
ελέγξιμο
if(rankQc == rank(A))
disp('Given System is Controllable.');
```

⁹ Controllability and Observability of State Space Model <https://matlabexamples.wordpress.com/2013/10/17/controllability-and-observability-of-state-space-model/> αναρτήθηκε 17 Οκτωβρίου 2013 και πρόσβαση 25 Αυγούστου 2017.

```

Qb = obsv(A,C);
%Υπολογισμός της τάξης(διαστάσεις) του πίνακα παρατηρησιμότητας
rankQb = rank(Qb);
%Δείχνει στο command window τη πρόταση Observable Matrix is Qb =
disp('Observable Matrix is Qb = ');
disp(Qb);
%Αν η τάξη(διαστάσεις) του πίνακα παρατηρησιμότητας είναι ίδια με τη
%τάξη(διαστάσεις) του πίνακα A τότε το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αλλιώς αν
οι
%τάξεις(διαστάσεις) των πινάκων δεν είναι ίδιες τότε το σύστημα είναι μη
%παρατηρήσιμο
if(rankQb == rank(A))
disp('Given System is Observable.');
```

Και ως έξοδο στο command window του MATLAB:

Controllable Matrix is Qc =

```

1  -1  8
0  7  44
-1 -16 -98
```

Given System is Controllable.

Observable Matrix is Qb =

```

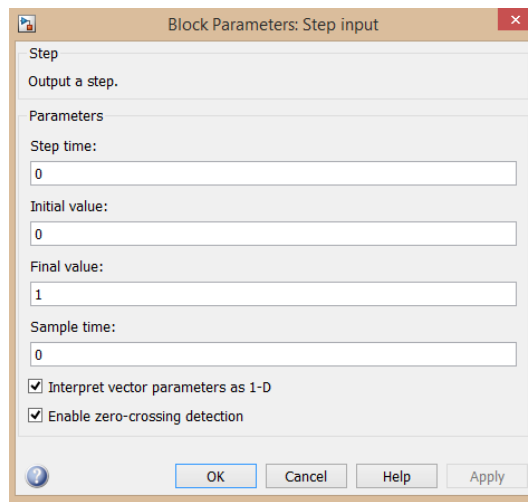
1  2  1
1  9  4
11 33 13
```

Given System is Observable.

5.4 Προσομοίωση με Simulink

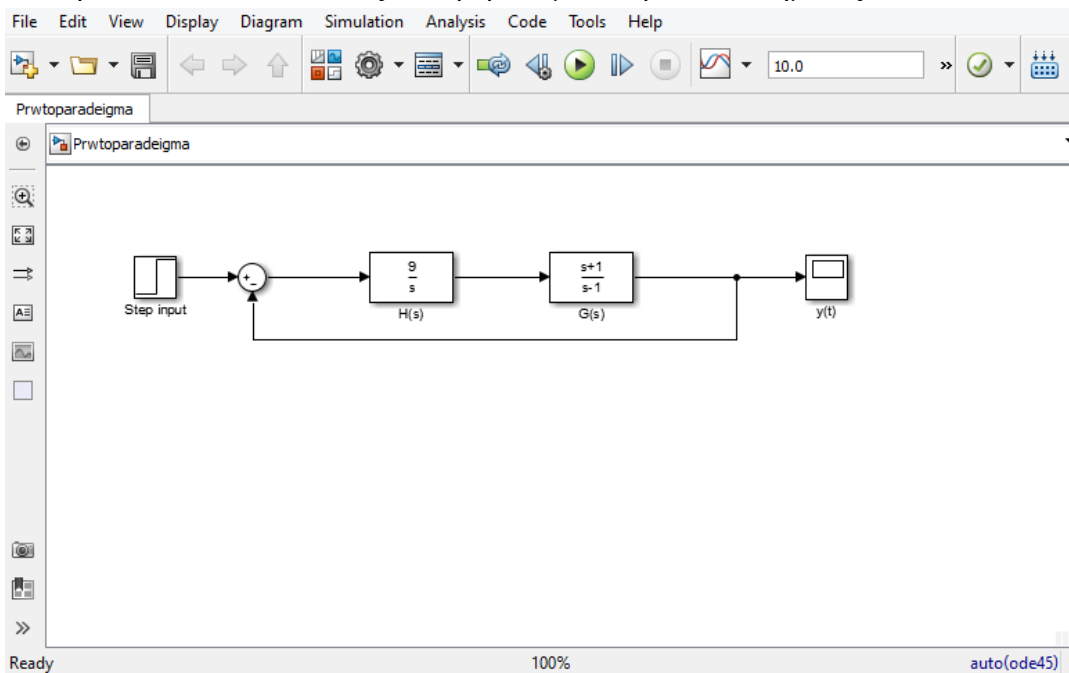
Ένα άλλο καλό εργαλείο για προσομοίωση των μοντέλων είναι το Simulink που είναι ένα κομμάτι του MATLAB. Στη συνέχεια θα αναφερθούν κάποια βασικά παραδείγματα.

Ο Tewari Ashish το 2011 ανέφερε ένα πολύ βασικό παράδειγμα για το Simulink, προσομοιώνοντας ένα σύστημα 1^{ης} τάξης με ανατροφοδότηση και σχηματίζεται στο Simulink όπως φαίνεται στην εικόνα 5.13. Το τετράγωνο με το step input ρυθμίζεται η επιλογή step time στο 0 για να ξεκινήσει να δίνει σήμα από 0sec όπως παριστάνεται στην εικόνα 5.12.



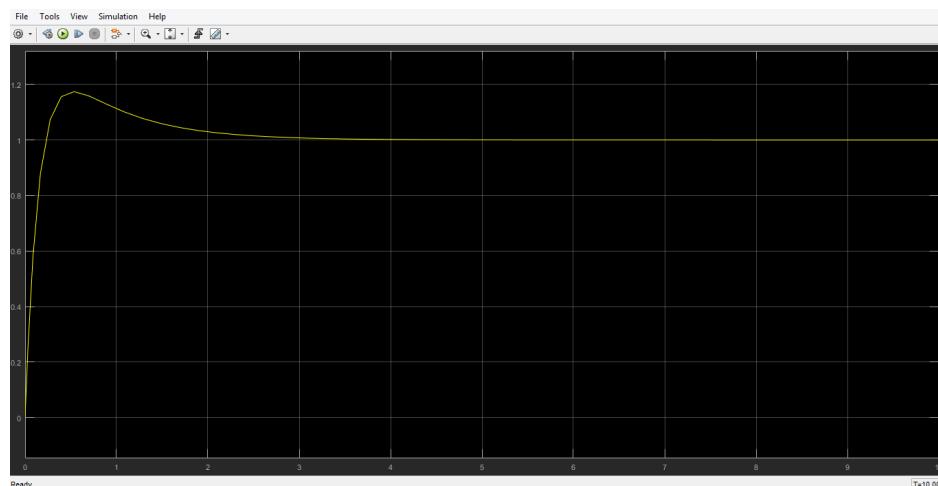
εικόνα 5.12 Παράθυρο ορισμού παραμέτρων βηματικής εισόδου

Στην εικόνα 5.13 απεικονίζεται η προσομοίωση του συστήματος.



Εικόνα 5.13 Προσομοίωση συστήματος στο Simulink

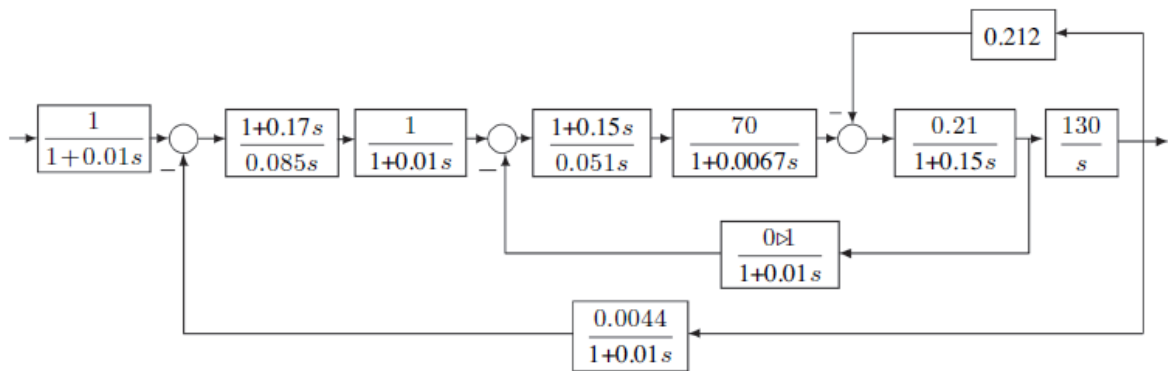
Στο τετράγωνο με το $y(t)$ απεικονίζεται η έξοδος του συστήματος.



Εικόνα 5.14 Απόκριση εξόδου του συστήματος

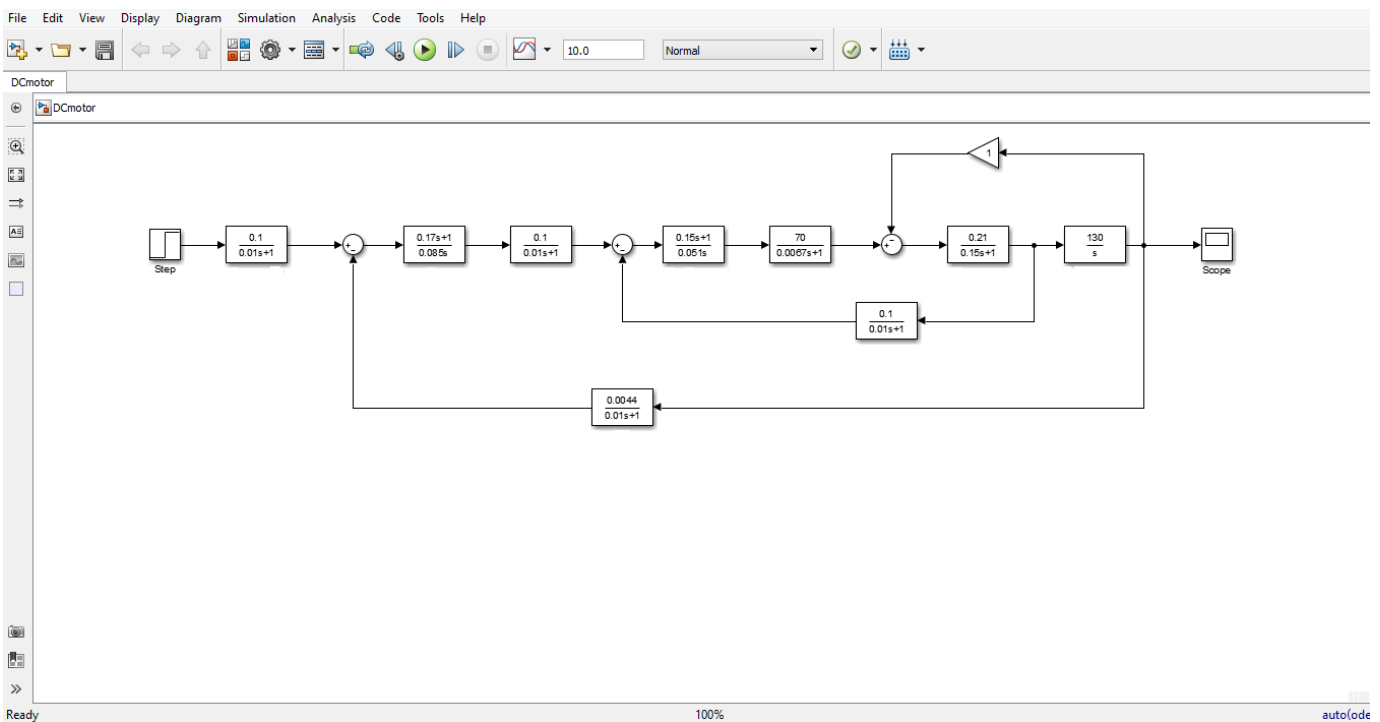
Από την εικόνα 5.14 παρατηρείται ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

Ο Dingyü Xue και ο Yang Quan το 2013 ανέφεραν ένα παράδειγμα για έναν κινητήρα DC που φέρεται το λειτουργικό του διάγραμμα στην εικόνα 5.15 και στην εικόνα 5.16 γίνεται η προσομοίωση του κινητήρα DC στο Simulink.



Εικόνα 5.15 Λειτουργικό διάγραμμα κινητήρα DC

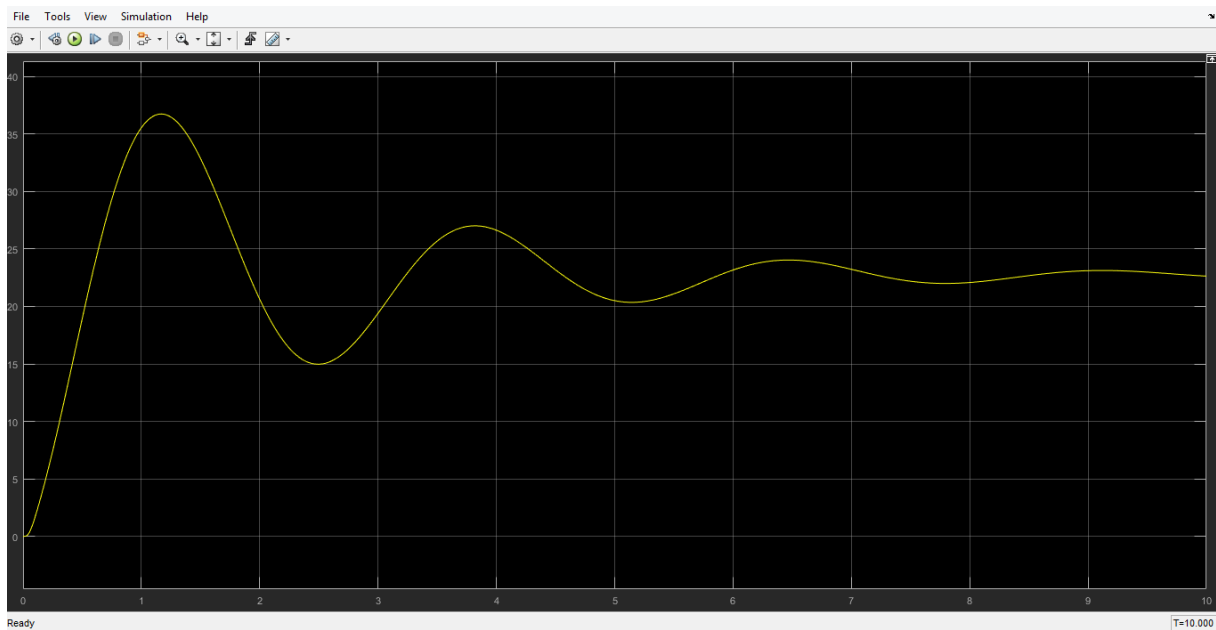
Στο Simulink:



Εικόνα 5.16 Προσομοίωση του κινητήρα DC

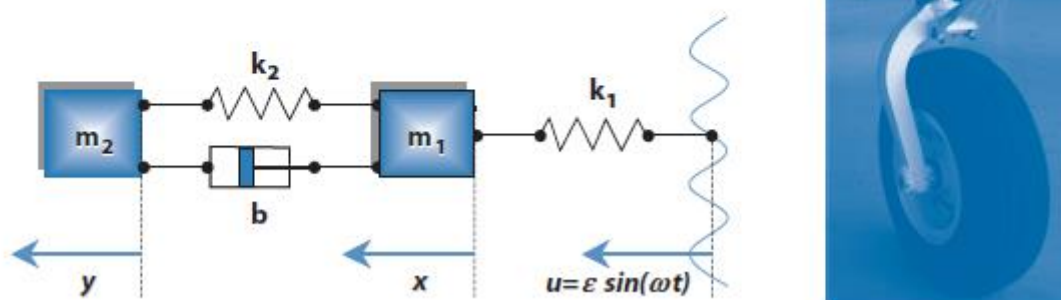
Ρυθμίζεται και εδώ το τετραγωνάκι step με step time=0.

Και στο scope παρατηρείται η έξοδος του κινητήρα DC που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση.



Εικόνα 5.17 Απόκριση εξόδου του κινητήρα DC

Ο Oleg A. Yakimenko το 2011 ανέφερε ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα που το συγκεκριμένο σύστημα περιγράφει τη ρόδα με το μηχανισμό ενός αεροσκάφους όπως παριστάνεται στην εικόνα 5.18. Όπου μάζα $m_1 = 1$, μάζα $m_2 = 1000$, ελατήριο $k_1 = 10$, ελατήριο $k_2 = 2$, ο αποσβεστήρας $b = 5$ και η εξωτερική δύναμη $u = \varepsilon \cdot \eta\mu(\omega t)$. Ορίζοντας ως είσοδο τη εξωτερική δύναμη u και ως έξοδο τη μετατόπιση x , θα βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις για τις δύο μάζες και στην συνέχεια θα προσομοιωθούν στο Simulink.



Εικόνα 5.18 Σύστημα αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 1.

Για τη μάζα m_1 :

$$m_1 \ddot{x}(t) + k_1 x(t) + k_2 (x(t) - y(t)) + b(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = u$$

Λύνοντας ως προς $\ddot{x}(t)$ και αντικαθιστώντας τις τιμές $m_1 = 1, k_1 = 10, k_2 = 2$ και $b = 5$.

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k_1 x(t)}{m_1} - \frac{k_2 (x(t) - y(t))}{m_1} - \frac{b(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))}{m_1} + \frac{u}{m_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -10x(t) + 2(y(t) - x(t)) + 5(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) + u$$

Για τη μάζα m_2 :

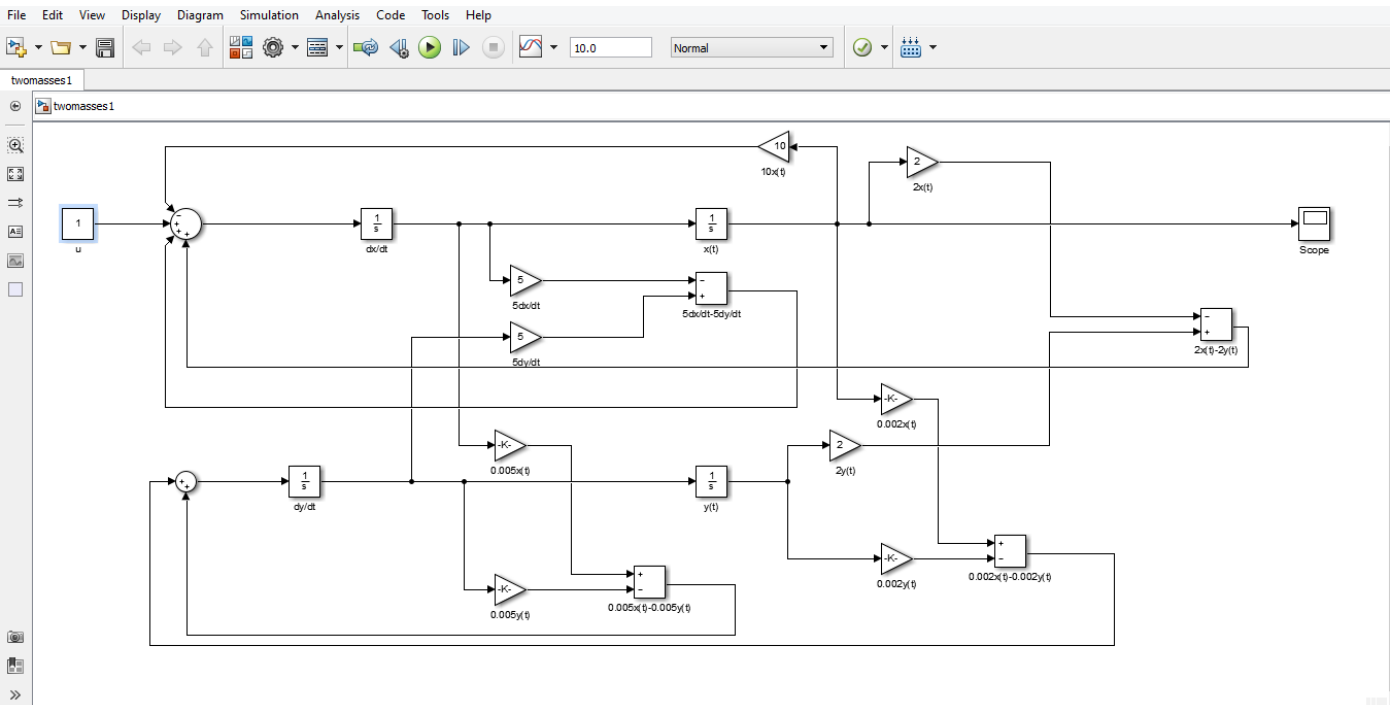
$$m_2 \ddot{y}(t) + k_2 (y(t) - x(t)) + b(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) = 0$$

Λύνοντας ως προς $\ddot{y}(t)$ και αντικαθιστώντας τις τιμές $m_2 = 1000, k_1 = 10, k_2 = 2$ και $b = 5$.

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k_2 (x(t) - y(t))}{m_2} - \frac{b(\dot{y}(t) - \dot{x}(t))}{m_2} \Leftrightarrow$$

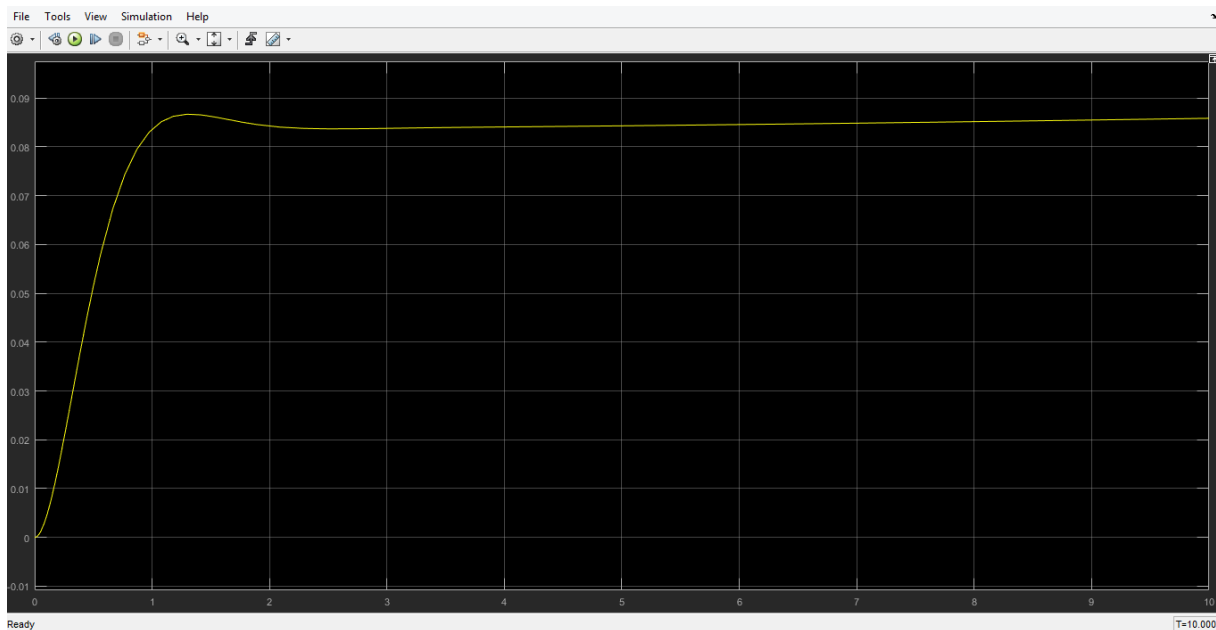
$$\Leftrightarrow \ddot{y}(t) = 0.002(x(t) - y(t)) + 0.005(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

Από τις διαφορικές εξισώσεις προσομοιώνεται το σύστημα στο Simulink.



Εικόνα 5.19 Προσομοίωση συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα

Και στο scope παρατηρείται η απόκριση της εξόδου $x(t)$ του συστήματος που εκτελεί εκθετική απόκριση.



Εικόνα 5.20 Απόκριση εξόδου συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα

Ο Harold Klee και ο Randal Allen το 2007 ανέφεραν για ένα μη γραμμικό μοντέλο συστήματος από το επιστημονικό πεδίο της οικολογίας, το μοντέλο ονομάζεται θηρευτής και θήραμα για τον πληθυσμό των καρχαριών(θηρευτής) και τον πληθυσμό των ψαριών(θήραμα) μέσα στον ωκεανό, οι εξισώσεις είναι:

$$\frac{dF}{dt} = F(t)(a - bF(t) - cS(t)) \quad (5.1)$$

$$\frac{dS}{dt} = S(t) \left(e - \lambda \frac{S(t)}{F(t)} \right) \quad (5.2)$$

Όπου $F(t)$ και $S(t)$ είναι οι στιγμιαίοι πληθυσμοί των ψαριών και των καρχαριών αντίστοιχα. Αυτό το σύστημα είναι αυτόνομο διότι δεν εισέρχονται ούτε εξέρχονται καρχαρίες και ψάρια από το συγκεκριμένο ωκεανό που έχει οριστεί ως σύστημα σύμφωνα με μια εξωτερική συνάρτηση του χρόνου t . Οι μεταβλητές των εξισώσεων του μοντέλου είναι:

$\frac{dF}{dt}$: ρυθμός ανάπτυξης ψαριών.

a : είναι μια σταθερή μεταβλητή για τη μείωση του ρυθμού ανάπτυξης των ψαριών κατά ενός ποσού λόγω του ανταγωνισμού των ψαριών για τη περιορισμένη πηγή τροφίμων και του άλλου ποσού για τον αριθμό των καρχαριών αφού οι καρχαρίες ως πηγή τροφής έχουν τα ψάρια.

b, c : αυτές οι σταθερές αντικατοπτρίζουν τον ανταγωνισμό μεταξύ των ψαριών για το φαγητό και την επιθετικότητα των καρχαριών.

$\frac{dS}{dt}$: ρυθμός ανάπτυξης καρχαριών.

e : είναι μια σταθερή μεταβλητή για τη μείωση του ρυθμού ανάπτυξης των καρχαριών που είναι ανάλογη με τους καρχαρίες προς τα ψάρια.

λ : αναλογική θετική σταθερά.

Για να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας ($F_e(t), S_e(t)$) χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (5.1) και (5.2), βάζοντας τους ρυθμούς ανάπτυξης των ψαριών και των καρχαριών να είναι μηδέν $\left(\frac{dF(t)}{dt}, \frac{dS(t)}{dt}\right)$ και όπου $F(t) = F_e(t)$ και $S(t) = S_e(t)$, επομένως οι εξισώσεις θα γίνουν:

$$0 = F_e(t)(a - bF_e(t) - cS_e(t)) \quad (5.3)$$

$$0 = S_e(t) \left(e - \lambda \frac{S_e(t)}{F_e(t)} \right) \quad (5.4)$$

Παίρνοντας την εξίσωση (5.4) και λύνοντας προς $S_e(t)$ στη συνέχεια θα βρεθούν οι ρίζες με την διακρίνουσα.

$$eS_e(t)F_e(t) - \lambda S_e^2(t) = 0$$

$$\Delta = (eF_e(t))^2$$

$$S_{e1,2} = \frac{-eF_e(t) \pm \sqrt{(eF_e(t))^2}}{-2\lambda} = \frac{-eF_e(t) \pm eF_e(t)}{-2\lambda}$$

Επομένως:

$$S_{e1} = \frac{-eF_e(t) + eF_e(t)}{-2\lambda} = 0$$

$$S_{e2} = \frac{-eF_e(t) - eF_e(t)}{-2\lambda} = \frac{2eF_e(t)}{2\lambda} = \frac{e}{\lambda} F_e(t)$$

Άρα:

$$S_e(t) = \frac{e}{\lambda} F_e(t) \quad (5.4)$$

Παίρνοντας τη (5.3) και αντικαθιστώντας την καινούργια εξίσωση του $S_e(t)$ (5.4).

$$0 = F_e(t) \left(a - bF_e(t) - c \frac{e}{\lambda} F_e(t) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_e(t) (a\lambda - \lambda bF_e(t) - ceF_e(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\lambda - \lambda bF_e(t) - ceF_e(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_e(t)(\lambda b + ce) = a\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_e(t) = \frac{a\lambda}{\lambda b + ce} \quad (5.5)$$

Και μετά παίρνοντας την (5.4) και αντικαθιστώντας μέσα στη (5.4) τη (5.5)

$$(5.4) \stackrel{(5.5)}{\implies} S_e(t) = \frac{e}{\lambda} \cdot \frac{a\lambda}{\lambda b + ce} = \frac{ea\lambda}{\lambda(\lambda b + ce)} \implies$$

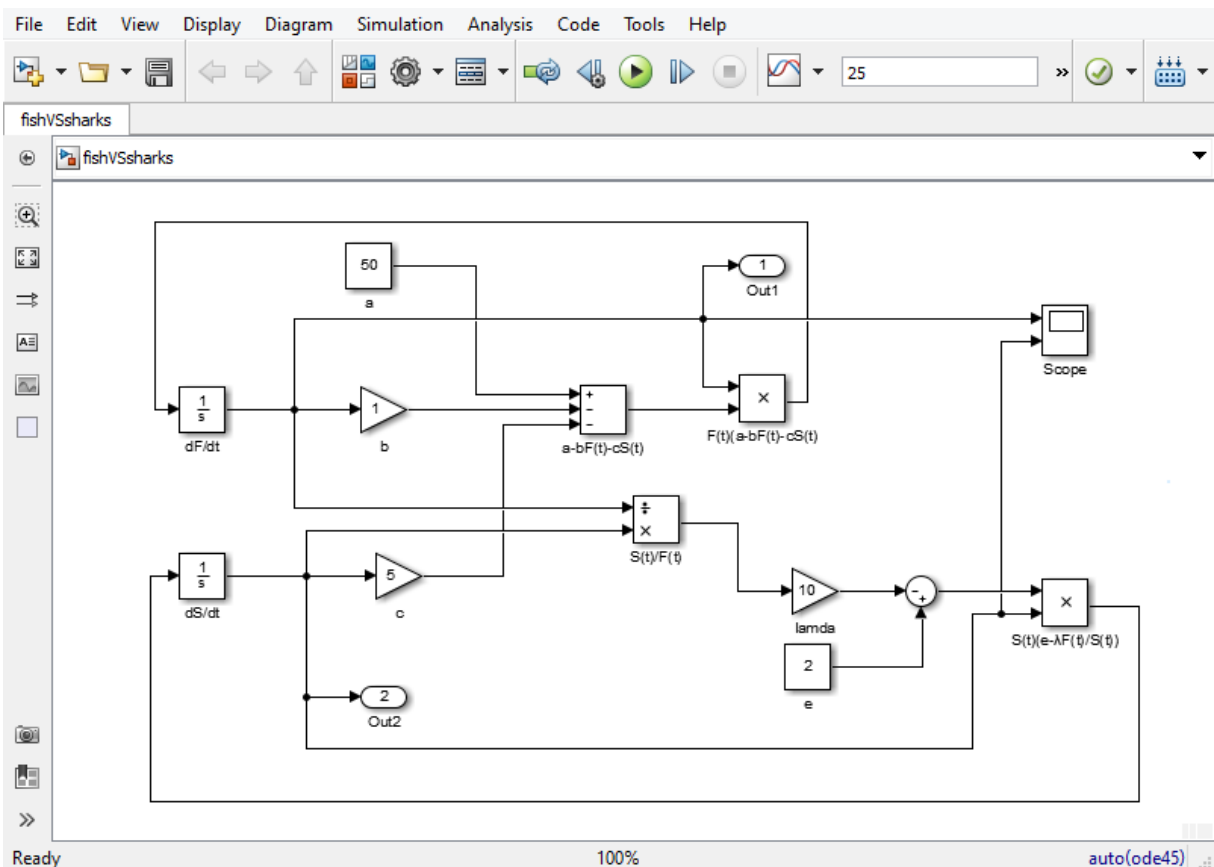
$$\implies S_e(t) = \frac{ea}{\lambda b + ce} \quad (5.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις τιμές για τις σταθερές $a=50$, $b=1$, $c=5$, $e=2$ και $\lambda=10$ και αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στις παραπάνω δύο εξισώσεις, βρίσκονται τα σημεία ισορροπίας $F_e(t)$, $S_e(t)$ από τις εξισώσεις (5.5) και (5.6) αντίστοιχα.

$$F_e(t) = \frac{a\lambda}{\lambda b + ce} = \frac{500}{20} = 25$$

$$S_e(t) = \frac{ea}{\lambda b + ce} = \frac{100}{20} = 50$$

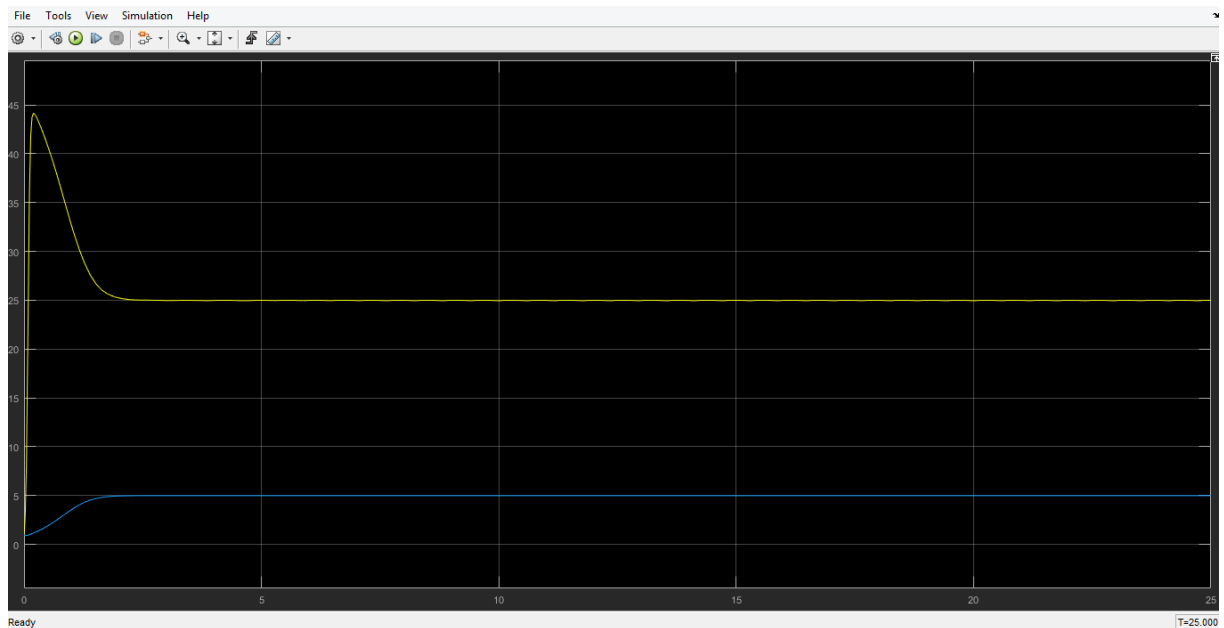
Προσομοιώνοντας αυτό το μοντέλο στο Simulink:



Εικόνα 5.21 Προσομοίωση μοντέλου θηρευτής και θήραμα

Ο χρόνος σταματημού της προσομοίωσης ορίζεται στα 25 για την καλύτερη παρατήρηση της εξόδου. Σε αυτό το σύστημα δεν υπάρχουν είσοδοι και οι δύο καταστάσεις $\left(\frac{dF}{dt}, \frac{dS}{dt}\right)$ ορίζονται ως έξοδοι και χρησιμοποιούνται και εδώ οι τιμές $a=50$, $b=1$, $c=5$, $e=2$ και $\lambda=10$.

Στο scope:



Εικόνα 5.22 Απόκριση εξόδου μοντέλου θηρευτής και θήραμα

Η κίτρινη γραμμή είναι η απόκριση των ψαριών που το σημείο ισορροπίας που βρέθηκε πριν επαληθεύεται για την τιμή 25, ενώ η μπλε γραμμή είναι η απόκριση των καρχαριών και το σημείο ισορροπίας είναι το 5 το οποίο και αυτό επαληθεύεται με την τιμή που βρέθηκε παραπάνω.

5.5 Συμπεράσματα

Η μοντελοποίηση εφαρμόζεται με την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς και τον υπολογισμό του χώρου κατάστασης ενώ η προσομοίωση είναι η ακριβής αναπαράσταση των προαναφερθέντων με ειδικά προγράμματα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή με σκοπό ως επόμενο βήμα τη βελτιστοποίηση των μοντέλων ή και την μελέτη διαφόρων παραμέτρων που επηρεάζουν το μοντέλο. Η μοντελοποίηση και προσομοίωση είναι μια επιστήμη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου που δεν περιορίζεται μόνο σε συστήματα μηχανικά, ηλεκτρικά, ηλεκτρομηχανικά κλπ. αλλά μπορεί να γίνει μοντελοποίηση και προσομοίωση και σε συστήματα βιολογικού περιεχομένου όπως ήταν το τελευταίο παράδειγμα που έγινε με το Simulink και οικονομικού περιεχομένου, δηλαδή η μοντελοποίηση και προσομοίωση δεν έχει περιορισμούς στις εφαρμογές της. Επίσης, μελλοντικά θα μπορούσαν να ανακαλυφθούν καινούργιες μέθοδοι μοντελοποίησης με μεγαλύτερη ακρίβεια και εύκολες στην εφαρμογή τους ενώ η προσομοίωση μελλοντικά μπορεί να αναπτύξει προγράμματα με ακόμη περισσότερες δυνατότητες προσομοίωσης και με μεγαλύτερη ευκολία χρήσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

- 1.Βελώνη Αναστασία Ν. , ‘Συστήματα αυτομάτου ελέγχου ανάλυση και προσομοίωση’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ , Αθήνα, 2011.
- 2.Γεωργίου Δημήτρης, Κούγιας Ιωάννης & Μεγαρίτης Θανάσης, ‘Γραμμική άλγεβρα’, εκδότης Γεωργίου Δημήτρης, Πάτρα, 2012.
- 3.Δημητρακούδης Δ., Θεοδώρου Ι., Κικιλιάς Π., Κουρής Ν. & Παλαμούρδας Δ., ‘ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΤΟΜΟΣ Β’, εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα, 2001.
- 4.Ζαγούρας Χαράλαμπος Γ. & Γεωργίου Δημήτριος Ν., ‘Γενικά Μαθηματικά 2’, εκδόσεις ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΩΛΟΓΙΩΝ, Αθήνα, 2009.
- 5.Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.
- 6.Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.
- 7.Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Αναλογική εξομοίωση συστημάτων’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2005.
- 8.Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.
- 9.Ρουμελιώτης Μάνος, ‘Μοντελοποίηση και προσομοίωση’, Εκδόσεις ΤΥΡΟΡΑΜΑ ομάδα εκτέλεσης έργου ΕΑΠ/2001, Πάτρα, 2001.
- 10.Σύρκος Γεώργιος Π. & Κούκος Ιωάννης Κ., ‘Εισαγωγή στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με MATLAB’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2011.

Ξενόγλωσση

- 1.Bequette Wayne B., ‘Process Dynamics Modeling, Analysis and Simulation’, εκδόσεις Prentice Hall, New Jersey, 1998
- 2.Cho W.S. To, ‘Introduction to Dynamics and Control in Mechanical Engineering Systems’ εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2016.
- 3.Dorf Richard C. & Bishop Robert H., ‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση’, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.
- 4.Edminister Joseph A., ‘ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ’, Ευθυμιάτος Διονύσιος Γ.(Επιμέλεια), Περισίδης Ε.(Μετάφραση), εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1980.
- 5.Fishman George S., ‘Discrete Event Simulation Modeling, Programming, and Analysis’, εκδόσεις Springer-Verlag, New York, 2001

6. Hebertt Sira-Ramirez, Carlos Garcia-Rodriguez, John Cortes-Romero & Alberto Luviano-Juarez, 'Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems', εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.
7. Khan Mohd Ehmer & Khan Farmeena, 'A comparative study of white box, black box and grey box testing techniques', (IJASCA) *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, Vol 3, No.6, pages 12-15, 2012.
8. Klee Harold & Allen Randal, 'Simulation Of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink second edition', εκδόσεις CRC press Taylor and Francis, United States of America, 2011.
9. Law Averill M. & Kelton David W., 'Simulation Modeling and Analysis third edition', εκδόσεις McGraw Hill, Singapore, 1991.
10. Neculescu Dan, 'ΜΗΧΑΤΡΟΝΙΚΗ', Παρίσης Κωνσταντίνος και Πουλάκης Νικόλαος (Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη, 2012.
11. Parker Sybil P., 'Dictionary of engineering second edition', εκδόσεις McGraw Hill, United States of America, 2003.
12. Raymond T. Stefani, Bahram Shahian, Clement J. Savant Jr & Gene H. Hostetter, 'ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ 4^η έκδοση', Ασημακοπούλου Δήμητρα (Επιμέλεια), Κοκαβέσης Φώτης (Μετάφραση), εκδόσεις επίκεντρο, Αθήνα, 2012.
13. Rohrs Charles E., Melsa James L. & Schultz Donald G., 'ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ', Μάργαρης Νίκος (Επιμέλεια), Αλεξίου Μαρία Ι. (Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη, 1996.
14. Tewari Ashish, 'Automatic control of atmospheric and space flight vehicles Design and Analysis with MATLAB and Simulink', εκδόσεις Birkhäuser (Springer), Basel, 2011.
15. Dingyü Xue & YangQuan Chen, 'System simulation Techniques with MATLAB and Simulink', εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.
16. Yakimenko Oleg A., 'ENGINEERING COMPUTATIONS AND MODELING IN MATLAB/SIMULINK', εκδόθηκε από AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS INC, Virginia, 2011.

Πηγές από το διαδίκτυο

- 1) Modeling and Simulation https://en.wikipedia.org/wiki/Modeling_and_simulation αναρτήθηκε 24 Απριλίου 2009 και πρόσβαση 17 Ιουνίου 2017.
- 2) Εξομοίωση και προσομοίωση <http://users.sch.gr/symfo/sholio/sizitontas/o/17.exomiosi.htm> αναρτήθηκε 2 Ιουνίου 2010 και πρόσβαση 17 Ιουνίου το 2017.
- 3) Παράγωγος <https://el.wikipedia.org/wiki/Παράγωγος> αναρτήθηκε 23 Αυγούστου 2007 και πρόσβαση 19 Ιουνίου 2017.
- 4) Ολοκλήρωμα <https://el.wikipedia.org/wiki/Ολοκλήρωμα> αναρτήθηκε 23 Αυγούστου 2007 και πρόσβαση 19 Ιουνίου 2017.
- 5) Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα https://el.wikipedia.org/wiki/Νόμοι_κίνησης_του_Νεύτωνα αναρτήθηκε 12 Αυγούστου 2006 και πρόσβαση 20 Ιουνίου 2017.

- 6) Βαθμός ελευθερίας συστήματος https://el.wikipedia.org/wiki/Βαθμός_ελευθερίας_συστήματος αναρτήθηκε 3 Μαρτίου 2008 και πρόσβαση 20 Ιουνίου 2017.
- 7) Laplace transform https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform αναρτήθηκε 26 Δεκεμβρίου 2001 και πρόσβαση 22 Ιουνίου 2017.
- 8) Controllability and Observability of State Space Model <https://matlabexamples.wordpress.com/2013/10/17/controllability-and-observability-of-state-space-model/> αναρτήθηκε 17 Οκτωβρίου 2013 και πρόσβαση 25 Αυγούστου 2017.

Εικόνες

Εικόνα 1.1 Σύστημα: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., *‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου I’*, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 1.2 Σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., *‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου I’*, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 1.3 Σύστημα με ελεγκτή σε σειρά: Hebertt Sira-Ramirez, Carlos Garcia-Rodriguez, John Cortes-Romero & Alberto Luviano-Juarez, *‘Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems’*, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 1.4 Σύστημα με ανάδραση: Hebertt Sira-Ramirez, Carlos Garcia-Rodriguez, John Cortes-Romero & Alberto Luviano-Juarez, *‘Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems’*, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 1.8 Εξομοίωση: <https://www.copybook.com/companies/link-simulation-training/articles/1-3-link-simulation-training-upgrade-cf-18-simulators> (πρόσβαση 17 Ιουνίου 2017)

Εικόνα 1.9 Προσομοίωση: <http://gameway.com.ua/wp-content/uploads/2014/12/Microsoft-Flight-Simulator-X.jpg> (πρόσβαση 17 Ιουνίου 2017)

Εικόνα 2.1 Μιγαδικός αριθμός σε διάγραμμα x-y: Edminister Joseph A., *‘ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ’*, Ευθυμιάτος Διονύσιος Γ.(Επιμέλεια), Περσίδης Ε.(Μετάφραση), εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1980.

Εικόνα 2.2 Μάζα-ελατήριο: <https://mchortatou.files.wordpress.com/2009/10/image7.png> (πρόσβαση 22 Ιουνίου 2017)

Εικόνα 2.3 Εκκρεμές: http://zone.ni.com/cms/images/devzone/epd/1_20091009204304.gif (πρόσβαση 22 Ιουνίου 2017)

Εικόνα 3.1 Σύστημα: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., *‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου I’*, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 3.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο εντάσεων βρόχων: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., *‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου I’*, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 3.3 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο τάσεων κόμβων: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 3.4 Σύμβολα και τυπικές ιδιότητες λειτουργικών διαγραμμάτων : Rohrs Charles E., Melsa James L. & Schultz Donald G., ‘ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, Μάργαρης Νίκος(Επιμέλεια), Αλεξίου Μαρία Ι.(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη, 1996.

Εικόνα 3.5 Αντιστοιχία μεταξύ λειτουργικού διαγράμματος και διαγράμματος ροής: Raymond T.Stefani, Bahram Shahian, Clement J. Savant Jr & Gene H. Hostetter, ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ 4^η έκδοση’, Ασημακοπούλου Δήμητρα(Επιμέλεια), Κοκαβέσης Φώτης(Μετάφραση), εκδόσεις επίκεντρο, Αθήνα,2012.

Εικόνα 3.6 Λειτουργικό διάγραμμα: Raymond T.Stefani, Bahram Shahian, Clement J. Savant Jr & Gene H. Hostetter, ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ 4^η έκδοση’, Ασημακοπούλου Δήμητρα(Επιμέλεια), Κοκαβέσης Φώτης(Μετάφραση), εκδόσεις επίκεντρο, Αθήνα,2012.

Εικόνα 3.8 Πολικό διάγραμμα συστήματος 1^{ης} με ένα πραγματικό πόλο: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.9 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία βηματική είσοδο: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.10 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.11 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία αναρρίχηση ως είσοδο: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.12 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta > 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.13 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta > 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.14 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta = 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.15 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta = 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.16 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta < 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.17 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta < 1$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.18 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta = 0$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.19 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta=0$: Μαλατέστας Παντελής Β. , ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ’, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 3.20 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Αναλογική εξομοίωση συστημάτων’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2005.

Εικόνα 3.21 Μάζα-ελατήριο: <https://mchortatou.files.wordpress.com/2009/10/image7.png> (πρόσβαση 1 Ιουλίου 2017)

Εικόνα 3.22 Λειτουργικό διάγραμμα παραδείγματος: Hebertt Sira-Ramirez, Carlos Garcia-Rodriguez, John Cortes-Romero & Alberto Luviano-Juarez, ‘Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems’, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 3.23 Διάγραμμα ροής παραδείγματος: Raymond T.Stefani, Bahram Shahian, Clement J. Savant Jr & Gene H. Hostetter, ‘ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ 4^η έκδοση’, Ασημακοπούλου Δήμητρα(Επιμέλεια), Κοκαβέσης Φώτης(Μετάφραση), εκδόσεις επίκεντρο, Αθήνα,2012.

Εικόνα 3.24 Χρονική απόκριση παραδείγματος: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου I’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 4.1 Δύο κυλιόμενα βαγόνια: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., ‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση ’, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

Εικόνα 4.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., ‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση ’, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

Εικόνα 4.3 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης $x_1(t)$ και $x_2(t)$: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., ‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση ’, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

Εικόνα 4.4 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου II’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Εικόνα 5.1 Μηχανικό σύστημα: Σύρκος Γεώργιος Π. & Κούκος Ιωάννης Κ., ‘Εισαγωγή στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με MATLAB’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 5.2 Σύστημα στάθμης υγρού: Σύρκος Γεώργιος Π. & Κούκος Ιωάννης Κ., ‘Εισαγωγή στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με MATLAB’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 5.4 Λειτουργικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης: Σύρκος Γεώργιος Π. & Κούκος Ιωάννης Κ., ‘Εισαγωγή στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με MATLAB’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2011.

Εικόνα 5.13 Προσομοίωση συστήματος στο Simulink: Tewari Ashish, ‘Automatic control of atmospheric and space flight vehicles Design and Analysis with MATLAB and Simulink’, εκδόσεις Birkhäuser(Springer), Basel, 2011.

Εικόνα 5.14 Απόκριση εξόδου του συστήματος: Tewari Ashish, ‘*Automatic control of atmospheric and space flight vehicles Design and Analysis with MATLAB and Simulink*’, εκδόσεις Birkhäuser(Springer), Basel, 2011.

Εικόνα 5.15 Λειτουργικό διάγραμμα κινητήρα DC: Dingyü Xue & YangQuan Chen, ‘*System simulation Techniques with MATLAB and Simulink*’, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 5.16 Προσομοίωση του κινητήρα DC: Dingyü Xue & YangQuan Chen, ‘*System simulation Techniques with MATLAB and Simulink*’, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 5.17 Απόκριση εξόδου του κινητήρα DC: Dingyü Xue & YangQuan Chen, ‘*System simulation Techniques with MATLAB and Simulink*’, εκδόσεις John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2014.

Εικόνα 5.18 Σύστημα αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα: Yakimenko Oleg A., ‘*ENGINEERING COMPUTATIONS AND MODELING IN MATLAB/SIMULINK*’, εκδόθηκε από AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS INC, Virginia, 2011.

Εικόνα 5.21 Προσομοίωση μοντέλου θηρευτής και θήραμα: Klee Harold & Allen Randal, ‘*Simulation Of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink second edition*’, εκδόσεις CRC press Taylor and Francis, United States of America, 2011.

Εικόνα 5.22 Απόκριση εξόδου μοντέλου θηρευτής και θήραμα: Klee Harold & Allen Randal, ‘*Simulation Of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink second edition*’, εκδόσεις CRC press Taylor and Francis, United States of America, 2011.

Εικόνα λογότυπου σχολής: http://www.hsia.gr/images/logo_eng.jpg (πρόσβαση 15 Ιουνίου 2017)

Εικόνα εξώφυλλου: <http://soc.if.usp.br/~wtc/?q=numerical-relativity> (πρόσβαση 15 Ιουνίου 2017)

Πίνακες

Πίνακας 2.1 Βασικά φαινόμενα και βασικούς νόμους φυσικής: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι*’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Πίνακας 2.2 Γενικές πληροφορίες για τις ενέργειες φυσικών φαινομένων της εξίσωσης Lagrange: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι*’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Πίνακας 2.3 Γενικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι*’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Πίνακας 2.4 Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace: Καλλιγερόπουλος Δ. & Βασιλειάδου Σ., ‘*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι*’, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2005.

Πίνακας 1 Συνηθισμένες μαθηματικές εξισώσεις: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., *‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση’*, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

Πίνακας 2 Εντολές λειτουργίας διαγραμμάτων: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., *‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση’*, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

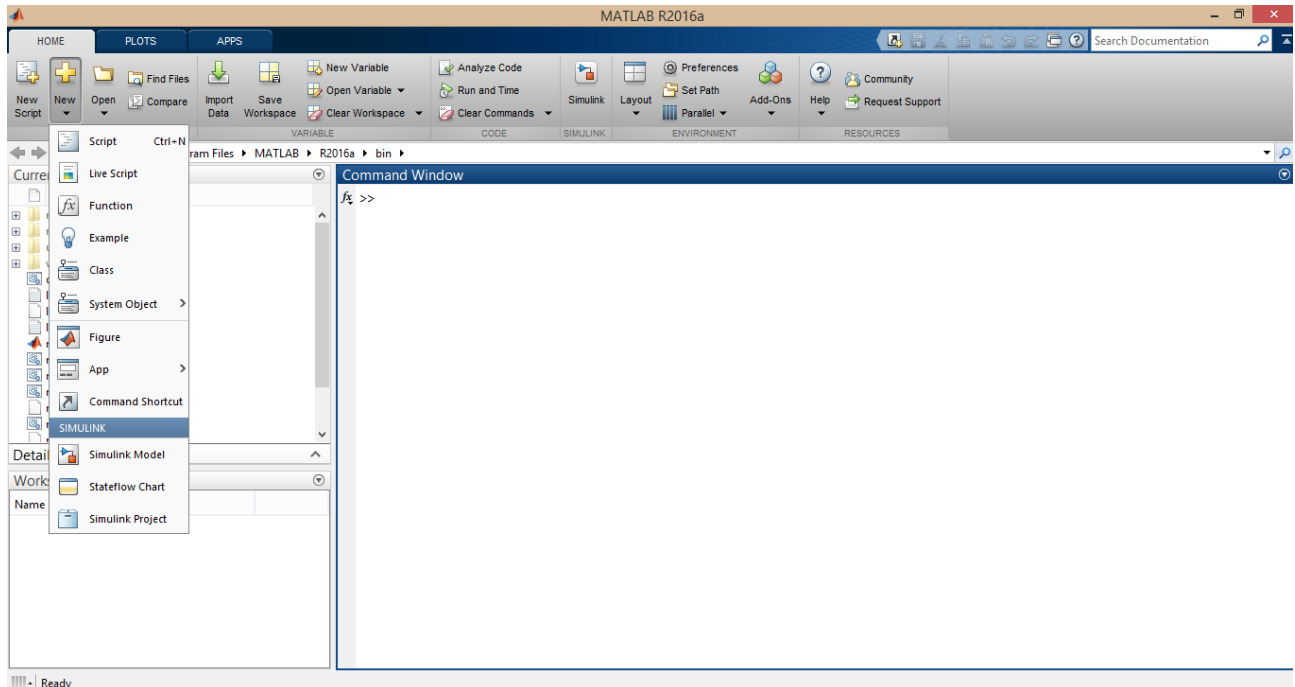
Πίνακας 3 Συναρτήσεις μορφοποίησης διαγράμματος: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., *‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση’*, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.

Πίνακας 4 Συναρτήσεις του MATLAB: Dorf Richard C. & Bishop Robert H., *‘Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου 12^η έκδοση’*, Ροβιθάκης Γεώργιος Α.(Επιμέλεια), Κωφίδης Νικόλαος(Μετάφραση), εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Αθήνα, 2016.



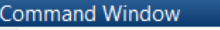
Παράρτημα


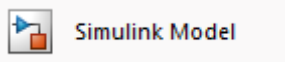
Οδηγίες χρήσης του προγράμματος MATLAB

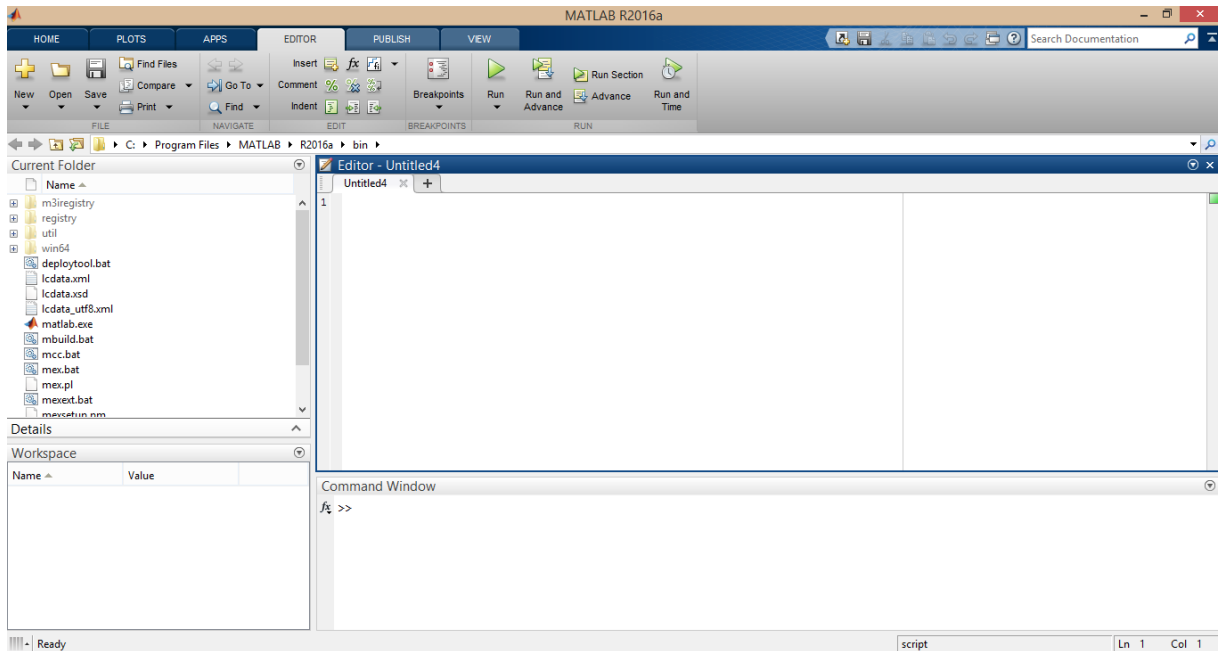
Θα δοθούν συνοπτικές και χρήσιμες οδηγίες χρήσης για το πρόγραμμα MATLAB της έκδοσης R2016a. Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται η διεπαφή του MATLAB με το χρήστη.



Εικόνα παραρτήματος 1 Διεπαφή του MATLAB

Στο κίτρινο σταυρό  που περιέχει τη λέξη New μπορεί να επιλεγθεί το script (ή με Ctrl+N)  στο οποίο ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο το οποίο ονομάζεται editor και στο οποίο μπορεί να γραφτεί κάποιο πρόγραμμα. Επίσης υπάρχει το Command Window  στο οποίο μπορεί και εκεί να γραφεί κώδικας αλλά δεν επιτρέπει την τροποποίηση του κώδικα σε περίπτωση που γίνει κάποιο λάθος από το χρήστη. Συνήθως το Command Window χρησιμοποιείται ως το παράθυρο στο οποίο ο χρήστης παρατηρεί το αποτέλεσμα του κώδικα που έγραψε στο editor.

Πατώντας το κουμπί που φέρει την ονομασία Simulink  ή  από το κίτρινο σταυρό που φέρει την ονομασία New, ανοίγει το Simulink στο οποίο μπορούν κι εκεί να γίνουν προσομοιώσεις συστημάτων.



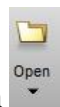
Εικόνα παραρτήματος 2 Διεπαφή του MATLAB μαζί με το Editor



Αφού πατήθηκε το script, πλέον στο editor μπορεί να γραφτεί κώδικας. Πατώντας το κουμπί που ονομάζεται Run, αυτή η επιλογή τρέχει τον κώδικα και το αποτέλεσμα του κώδικα εμφανίζεται στο Command Window και σε περίπτωση λάθος σύνταξης του κώδικα εμφανίζει στο Command Window για το ποιο είναι το πιθανό λάθος και σε ποια σειρά έχει γίνει.



Πατώντας το κουμπί Save σώζεται ο κώδικας και επιλέγεται από τον χρήστη σε ποια τοποθεσία του υπολογιστή θα αποθηκευτεί το αρχείο.

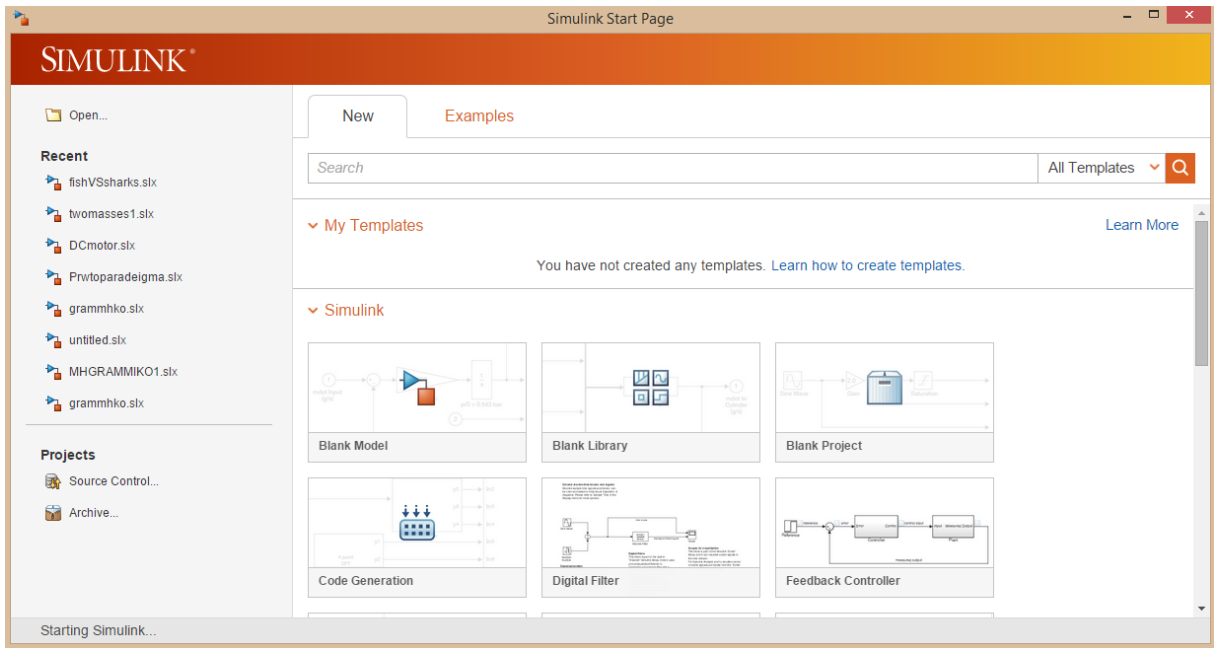


Και τέλος, πατώντας το κουμπί Open τότε ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο το MATLAB στο οποίο έχει την δυνατότητα ο χρήστης να ανοίξει ένα αρχείο που έχει αποθηκεύσει στον υπολογιστή του.

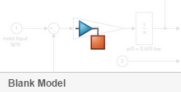
Οδηγίες χρήσης για το Simulink

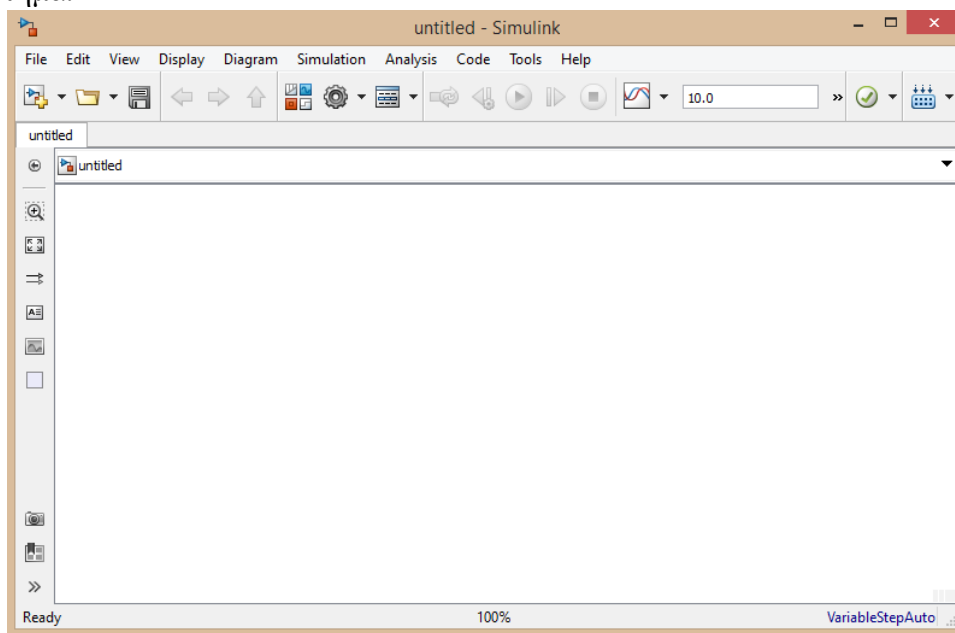
Το Simulink είναι ένα πολύ εύχρηστο και εύκολο στη χρήση και περιλαμβάνεται μέσα στο MATLAB.

Όπως αναφέρθηκε, πατώντας το κουμπί που ονομάζεται Simulink, το MATLAB ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο όπως φαίνεται στην εικόνα παραρτήματος 3.



Εικόνα παρατήματος 3 Αρχική σελίδα του Simulink


Επιλέγοντας το εικονίδιο Blank Model  ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο (όπως παριστάνεται στην εικόνα παρατήματος 4) στο οποίο μπορεί ο χρήστης να προσομοιώσει ένα σύστημα.





Εικόνα παρατήματος 4 Simulink





: πατώντας αυτό το κουμπί, το πρόγραμμα δίνει στο χρήστη για την δημιουργία καινούργιου έργου/σχεδίου και εμφανίζεται ένα καινούργιο παράθυρο που είναι ακριβώς ίδιο με αυτό που απεικονίζεται στην εικόνα παρατήματος 4.

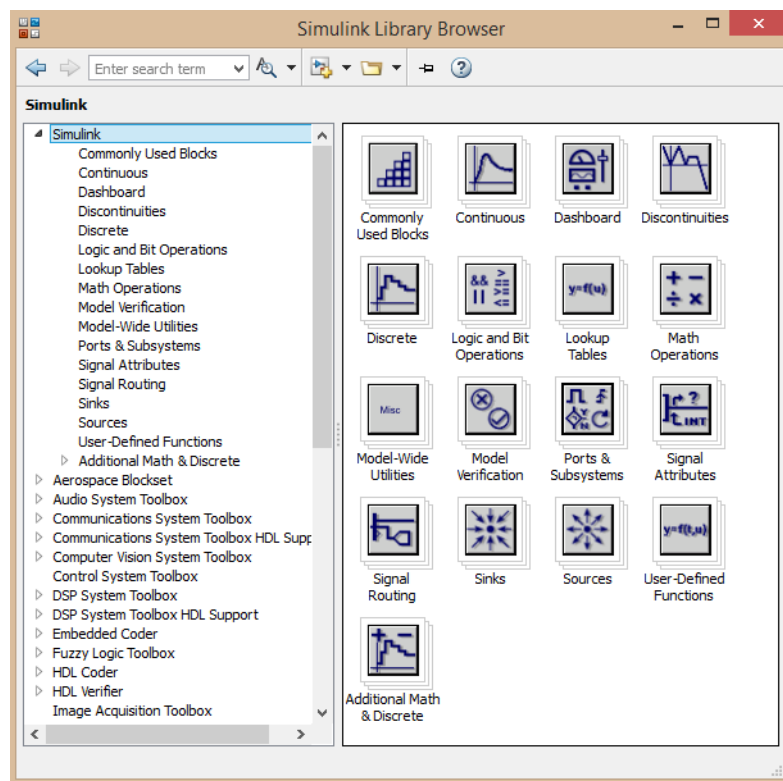
 : αυτή η επιλογή δίνει την δυνατότητα στο χρήστη να ανοίξει ένα προηγούμενο έργο/σχέδιο που είχε δημιουργήσει.

 : πατώντας στο εικονίδιο με τη δισκέτα, ο χρήστης μπορεί να σώσει το έργο/σχέδιο του. Αμέσως το πρόγραμμα ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο στο οποίο ο χρήστης δηλώνει το όνομα του έργου/σχεδίου και επιλέγει τον προορισμό στο οποίο θα αποθηκευτεί το αρχείο.

 : επιλέγοντας αυτό το εικονίδιο, ο χρήστης ξεκινά την προσομοίωση του έργου/σχεδίου του.

 : σε αυτό το εικονίδιο, ο χρήστης επιλέγει το χρόνο σταματημού της προσομοίωσης.

 : με αυτό το εικονίδιο, ο χρήστης ανοίγει ένα καινούργιο παράθυρο που περιέχει τις βιβλιοθήκες του Simulink από τις οποίες επιλέγει τα στοιχεία τα οποία θέλει να χρησιμοποιήσει. Τα στοιχεία τα παίρνει ο χρήστης από τις βιβλιοθήκες με drag & drop και τα τοποθετεί στο παράθυρο που απεικονίζεται στην εικόνα παραρτήματος 4. Στην εικόνα παραρτήματος 5 απεικονίζεται το παράθυρο με τις βιβλιοθήκες.



Εικόνα παραρτήματος 5 Βιβλιοθήκη του Simulink

Χρήσιμες εντολές για το MATLAB

Σε αυτό το μέρος του παραρτήματος θα δοθούν σε πίνακες αρκετές εντολές του MATLAB.

Πίνακας 1 Συνηθισμένες μαθηματικές συναρτήσεις.

$\sin(x)$	Ημίτονο	$\operatorname{acoth}(x)$	Τόξο υπερβολικής συναφαπτομένης
$\sinh(x)$	Υπερβολικό ημίτονο	$\exp(x)$	Εκθετική συνάρτηση
$\operatorname{asin}(x)$	Τόξο ημιτόνου	$\log(x)$	Φυσικός λογάριθμος
$\operatorname{asinh}(x)$	Τόξο υπερβολικού ημιτόνου	$\log_{10}(x)$	Δεκαδικός λογάριθμος
$\cos(x)$	Συνημίτονο	$\log_2(x)$	Δυαδικός λογάριθμος
$\cosh(x)$	Υπερβολικό συνημίτονο	$\operatorname{pow}2(x)$	Δυνάμεις του 2 (2^x)
$\operatorname{acos}(x)$	Τόξο συνημιτόνου	$\operatorname{sqrt}(x)$	Τετραγωνική ρίζα αριθμού x
$\operatorname{acosh}(x)$	Τόξο υπερβολικού συνημιτόνου	$\operatorname{nextpow}2(x)$	Επιστρέφει το αριθμό p, όπου $2^p \geq x $
$\tan(x)$	Εφαπτομένη	$\operatorname{abs}(x)$	Απόλυτη τιμή
$\tanh(x)$	Υπερβολική εφαπτομένη	$\operatorname{angle}(x)$	Φασική γωνία
$\operatorname{atan}(x)$	Τόξο εφαπτομένης	$\operatorname{complex}(x,y)$	Επιστρέφει το μιγαδικό αριθμό $x+jy$
$\operatorname{atan}2(y,x)$	Τόξο εφαπτομένης τεσσάρων τεταρτημορίων	$\operatorname{conj}(x)$	Μιγαδικός συζυγής
$\operatorname{atanh}(x)$	Τόξο υπερβολικής εφαπτομένης	$\operatorname{imag}(x)$	Φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού
$\sec(x)$	Τέμνουσα	$\operatorname{real}(x)$	Πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού
$\operatorname{sech}(x)$	Υπερβολική τέμνουσα	$\operatorname{unwrap}(x)$	Επιστρέφει τη φασική γωνία στον πρωτεύοντα κύκλο
$\operatorname{asec}(x)$	Τόξο τέμνουσας	$\operatorname{isreal}(x)$	Επιστρέφει True για περιοχή πραγματικών
$\operatorname{asech}(x)$	Τόξο υπερβολικής τέμνουσας	$\operatorname{cplxpari}(x)$	Ταξινομεί μιγαδικούς κατά ζεύγη συζυγών
$\csc(x)$	Συντέμνουσα	$\operatorname{fix}(x)$	Στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο προς το 0 ακέραιο
$\operatorname{csch}(x)$	Υπερβολική συντέμνουσα	$\operatorname{floor}(x)$	Στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο προς το $-\infty$ ακέραιο
$\operatorname{acsc}(x)$	Τόξο συντέμνουσας	$\operatorname{ceil}(x)$	Στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο προς το $+\infty$ ακέραιο
$\operatorname{acsch}(x)$	Τόξο υπερβολικής συντέμνουσας	$\operatorname{round}(x)$	Στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο
$\cot(x)$	Συναφαπτομένη	$\operatorname{mod}(x)$	Μόντουλο (προσημασμένο υπόλοιπο διαίρεσης)
$\operatorname{coth}(x)$	Υπερβολική συναφαπτομένη	$\operatorname{rem}(x)$	Υπόλοιπο διαίρεσης
$\operatorname{acot}(x)$	Τόξο συναφαπτομένης		

Πίνακας 2 Εντολές δημιουργίας διαγραμμάτων

plot(x,y)	Σχεδιάζει το διάνυσμα x ως προς το διάνυσμα y
semilogx(x,y)	Σχεδιάζει το διάνυσμα x ως προς το διάνυσμα y. Η κλίμακα του άξονα x είναι λογαριθμική δηλαδή, το x έχει αντικατασταθεί από το $\log_{10}x$. Η κλίμακα του άξονα y είναι γραμμική
semilogy(x,y)	Σχεδιάζει το διάνυσμα x ως προς το διάνυσμα y. Η κλίμακα του άξονα y είναι λογαριθμική δηλαδή, το y έχει αντικατασταθεί από το $\log_{10}y$. Η κλίμακα του άξονα x είναι γραμμική
loglog(x,y)	Σχεδιάζει το διάνυσμα x ως προς το διάνυσμα y. Η κλίμακα αμφοτέρων των αξόνων είναι λογαριθμική ($\log_{10}x, \log_{10}y$)

Πίνακας 3 Συναρτήσεις μορφοποίησης διαγράμματος

title('text')	Εισάγει κείμενο στην κορυφή του διαγράμματος
legend(string1,string2,...)	Εισάγει κείμενο στο τρέχον διάγραμμα. Τα κείμενα προσδιορίζονται από τα ορίσματα της συνάρτησης
xlabel('text')	Επιγράφει τον άξονα x
ylabel('text')	Επιγράφει τον άξονα y
text(p1,p2, 'text')	Εισάγει κείμενο στη θέση (p1,p2). Το (p1,p2) μετρείται με χρήση των μονάδων του τρέχοντος διαγράμματος.
subplot	Δημιουργεί επιμέρους παράθυρα στο παράθυρο γραφικών
grid on	Προσθέτει πλέγμα στο τρέχον σχήμα
grid off	Αφαιρεί το πλέγμα στο τρέχον σχήμα
grid	Προκαλεί αλλαγή της κατάστασης του πλέγματος (π.χ. από on σε off)

Πίνακας 4 Συναρτήσεις του MATLAB

Όνομα Συνάρτησης	Λειτουργία της συνάρτησης
abs	Υπολογισμός απόλυτης τιμής
acos	Υπολογισμός τόξου συνημιτόνου
ans	Μεταβλητή στην οποία αποθηκεύονται τα αποτελέσματα μαθηματικών εκφράσεων
asin	Υπολογισμός τόξου ημιτόνου
atan	Υπολογισμός τόξου εφαπτομένης (σε δύο τεταρτημόρια)
atan2	Υπολογισμός τόξου εφαπτομένης (σε τέσσερα τεταρτημόρια)
axis	Καθορισμός κλίμακας αξόνων από το χρήστη

bode	Δημιουργεί διαγράμματα Bode για αποκρίσεις συχνότητας
cd2	Μετατρέπει την αναπαράσταση, μέσω μεταβλητών κατάστασης, ενός συστήματος συνεχούς χρόνου στην αντίστοιχη αναπαράσταση του συστήματος διακριτού χρόνου
clear	Διαγράφει όλα τα δεδομένα από το χώρο εργασίας
clf	Διαγράφει όλα τα δεδομένα από ένα παράθυρο γραφικών
conj	Υπολογισμός του συζυγούς μιγαδικού
conv	Πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων (συνέλιξη/convolution)
cos	Υπολογισμός συνημιτόνου
ctrb	Υπολογισμός πίνακα ελεγχιμότητας
diary	Αποθήκευση της τρέχουσας εργασίας σε αρχείο στο δίσκο
dc2	Μετατρέπει την αναπαράσταση, μέσω μεταβλητών κατάστασης, ενός συστήματος διακριτού χρόνου στην αντίστοιχη αναπαράσταση του συστήματος συνεχούς χρόνου
eig	Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων(eigenvalues, eigenvectors)
end	Τερματισμός δομής ελέγχου
exp	Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης (με βάση το e)
expan	Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης πίνακα (με βάση το e)
eye	Δημιουργία μοναδιαίου πίνακα
feedback	Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου (για δύο συναρτήσεις μια του κυρίου κλάδου και μία του κλάδου ανάδρασης)
for	Δημιουργία επαναληπτικού βρόχου
format	Καθορίζει τη μορφή των αριθμών στην έξοδο (δηλαδή, στην οθόνη)
grid on	Προσθήκη πλέγματος στον τρέχον διάγραμμα
help	Εμφανίζει τα θέματα για τα οποία υπάρχει βοηθητικός σχολιασμός
hold on	Συγκρατεί το τρέχον διάγραμμα στην οθόνη
i	$\sqrt{-1}$
image	Υπολογισμός φανταστικού μέρους μιγαδικού αριθμού
impulse	Υπολογισμός της μοναδιαίας κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος
inf	Αναπαριστά το άπειρο

j	$\sqrt{-1}$
legend	Προσθήκη κειμένου στο τρέχον διάγραμμα
linspace	Δημιουργία διανυσμάτων (γραμμών) με ισαπέχοντα στοιχεία (παρόμοια με τον τελεστή ':')
load	Φορτώνει μεταβλητές που είναι αποθηκευμένες σε αρχείο
log	Υπολογισμός φυσικού λογαρίθμου
log10	Υπολογισμός δεκαδικού λογαρίθμου
loglog	Υπολογισμός λογαριθμικών διαγραμμάτων
logspace	Δημιουργία διανύσματος (γραμμών) της οποίας τα στοιχεία κατανομονται με βάση τη λογαριθμική κλίμακα
lsim	Υπολογισμός της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος για τυχαίες εισόδους και αρχικές συνθήκες
margin	Υπολογισμός των περιθωρίων κέρδους και φάσης καθώς και των σχετικών συχνοτήτων διασταύρωσης από τη απόκριση συχνότητας του συστήματος
max	Προσδιορισμός μέγιστης τιμής
mesh	Δημιουργία τρισδιάστατων κλειστών επιφανειών
meshgrid	Δημιουργία περιοχών (πινάκων) που χρησιμοποιούνται με τη mesh
min	Προσδιορισμός ελάχιστης τιμής
minreal	Εξουδετέρωση ζεύγους πόλου – μηδενικού της συνάρτησης μεταφοράς
NaN	Αναπαράσταση μη αριθμητικών δεδομένων
ngrid	Δημιουργία πλαισίου στο διάγραμμα Nichols
nichols	Υπολογισμός διαγράμματος Nichols
num2str	Μετατροπή αριθμών σε συμβολοσειρές
nyquist	Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας Nyquist (διάγραμμα)
obsv	Υπολογισμός πίνακα παρατηρησιμότητας
ones	Δημιουργία πίνακα στον οποίο όλα τα στοιχεία είναι ίσα προς 1
pade	Υπολογισμός της προσέγγισης Pade n-στής τάξεως για μια χρονική καθυστέρηση
parallel	Υπολογισμός μιας παράλληλης σύνδεσης δύο μοντέλων LTI
plot	Δημιουργία διαγράμματος γραμμικής κλίμακας
pole	Υπολογισμός πόλων συστήματος
poly	Υπολογισμός πολωνύμου από τις ρίζες του (δέχεται ως όρισμα ένα πίνακα A, n x n, και επιστρέφει μια γραμμή μήκους n+1 της οποίας τα στοιχεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης

polyval	Υπολογισμός πολυωνυμικής συνάρτησης για συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής
printsys	Απεικονίζει σε βολική μορφή τις μεταβλητές κατάστασης και τη συνάρτηση μεταφοράς γραμμικών συστημάτων
pzmap	Δημιουργία διαγράμματος πόλων-μηδενικών γραμμικού συστήματος
rank	Υπολογισμός βαθμού πίνακα
real	Υπολογισμός πραγματικού μέρους μιγαδικού αριθμού
residue	Υπολογισμός του αναπτύγματος μερικών πηλίκων ($[r,p,k]=\text{residue}(B,C)$) όπου τα B,C τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή αντίστοιχα, r και p πίνακες στήλες με στοιχεία τους αριθμητές των μερικών πηλίκων και τις ρίζες των παρονομαστών, αντίστοιχα, και k ο σταθερός όρος του αναπτύγματος.
rlocfind	Υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σύνολο ριζών του γεωμετρικού τόπου ριζών
rlocus	Υπολογισμός του γεωμετρικού τόπου ριζών
roots	Υπολογισμός των ριζών πολυωνύμου
semilogx	Σχεδιάζει το διάγραμμα x-y. Η κλίμακα του άξονα x είναι λογαριθμική, δηλαδή το x έχει αντικατασταθεί από το $\log_{10}x$. Η κλίμακα του άξονα y είναι γραμμική
semilogy	Σχεδιάζει το διάγραμμα x-y. Η κλίμακα του άξονα y είναι λογαριθμική, δηλαδή το y έχει αντικατασταθεί από το $\log_{10}y$. Η κλίμακα του άξονα x είναι γραμμική
series	Υπολογισμός δύο συστημάτων συνδεδεμένων εν σειρά
shg	Εμφανίζει παράθυρο γραφικών
sin	Υπολογισμός ημιτόνου
sqrt	Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας
ss	Δημιουργία μοντέλου μεταβλητών κατάστασης ενός συστήματος
step	Υπολογισμός βηματικής απόκρισης ενός συστήματος
subplot	Διάρθρωση του παραθύρου γραφικών σε επιμέρους παράθυρα
tan	Υπολογισμός εφαπτομένης
text	Εισαγωγή κειμένου στο τρέχον διάγραμμα
title	Εισαγωγή τίτλου στο τρέχον διάγραμμα
tf	Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος
who	Επιστρέφει τη λίστα μεταβλητών που βρίσκονται στη μνήμη

whos	Επιστρέφει τη λίστα μεταβλητών που βρίσκονται στη μνήμη μαζί με το μέγεθος κάθε μεταβλητής
xlabel	Επιστρέφει τον άξονα x του τρέχοντος διαγράμματος
ylabel	Επιστρέφει τον άξονα y του τρέχοντος διαγράμματος
zero	Υπολογισμός των μηδενικών ενός συστήματος
zeros	Δημιουργία πίνακα στον οποίον όλα τα στοιχεία είναι ίσα προς 0

Ο Σύρκος Π. Γεώργιος και Κούκος Κ. Ιωάννης το 2011 ανέφεραν τη σύνταξη του βρόχου for στο MATLAB όπως και τις δομές ελέγχου while, if-else-if και switch, η σύνταξη τους στο MATLAB δίνεται παρακάτω.

Για το βρόχο **for**:

for μεταβλητή = έκφραση

Εντολή

...

Εντολή

end

Για τη δομή ελέγχου **while**:

while λογική έκφραση

Εντολή

...

Εντολή

end

Για τη δομή ελέγχου **if-else-if**:

if λογική έκφραση A

Εντολές A

elseif λογική έκφραση B

Εντολές B

...

else

Εντολές Z

end

Για τη δομή ελέγχου **switch**:

switch λογική έκφραση

case A, εντολές A

case B, εντολές B

...

case Z, εντολές Z

otherwise, εντολές

end

Χρήσιμες εξισώσεις

2.1 Παράγωγος $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ σελ.12

2.2 Κανόνας σταθερής συνάρτησης με $f(x)=a$, τότε $f'(x) = (a)' = 0$ σελ.12

2.3 Κανόνας αθροίσματος $(a + f(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$ σελ.12

2.4 Κανόνας γινομένου $((f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ σελ.13

2.5 Κανόνας πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ σελ.13

2.6 Κανόνας αλυσίδας εάν $f(x)=h(g(x))$ τότε $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ σελ.13

2.7 Ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ σελ.13

2.8 Αόριστο ολοκλήρωμα $\int F(x)dx$ σελ.13

2.9 Συνήθης διαφορική εξίσωση $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

Όπου $n=1,2, \dots$ και $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n} \equiv \frac{d^n y}{dx^n}$ η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $y(x)$. σελ.13

2.10 Γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως με άγνωστη συνάρτηση y και ανεξάρτητη μεταβλητή x $A_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_1(x) \frac{dy}{dx} + A_0(x)y = B(x)$ σελ.14

2.11 Εξίσωση Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F$ σελ.16

2.12 Τύπος του Taylor

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + R_n(x) \quad \text{σελ. 17}$$

$$2.13 \text{ Υπόλοιπο Lagrange } R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{σελ. 17}$$

$$2.14 \text{ Ορισμός μετασχηματισμού Laplace } \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad \text{σελ. 22}$$

3.1 Διαφορική εξίσωση συστήματος n εισόδων και m εξόδων

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad \text{σελ. 27}$$

3.2 Συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{σελ. 28}$$

3.3 Συνάρτηση μεταφοράς με πόλους και μηδενικά

$$G(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad \text{σελ. 28}$$

3.12 Τύπος του Mason

$$G(s) = \frac{\sum_{n=1}^k T_n \Delta_n}{\Delta} \quad \text{σελ. 39}$$

$$3.13 \text{ Ορίζουσα διαγράμματος ροής } \Delta = 1 - \Delta_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots \quad \text{σελ. 39}$$

3.14 Εξίσωση ανάλυσης απλών κλασμάτων για απλούς πόλους

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n} \quad \text{σελ. 40}$$

3.15 Εξίσωση υπολογισμού μεταβλητών A_1, A_2, A_n απλών πόλων

$$A = R(s)|_{s=p} \quad \text{σελ. 40}$$

3.16 Εξίσωση εξόδου στο πεδίο του χρόνου για απλούς πόλους

$$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \quad \text{σελ. 40}$$

3.17 Εξίσωση ανάλυσης απλών κλασμάτων για πολλαπλούς πόλους

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p)^r \dots (s-p_n)} = \frac{A_1}{(s-p)^r} + \frac{A_2}{(s-p)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r}{s-p} + \dots \quad \text{σελ. 40}$$

3.18 Εξίσωση υπολογισμού μεταβλητών A_1, A_2, A_n για πολλαπλούς πόλους

$$A_1 = R(s)|_{s=p}, A_2 = \left. \frac{dR(s)}{ds} \right|_{s=p}, \dots, A_{k-1} = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k R(s)}{ds^k} \right|_{s=p}, \dots, A_r \quad \text{σελ. 40}$$

3.19 Εξίσωση εξόδου στο πεδίο του χρόνου για πολλαπλούς πόλους

$$y(t) = \left(A_1 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + A_{r-1}t + A_r \right) e^{pt} + \dots \quad \text{σελ.40}$$

3.20 Εξίσωση ανάλυσης απλών κλασμάτων για μιγαδικούς πόλους

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{P(s)}{((s-\sigma)^2 + \omega^2)\dots(s-p_n)} \quad \text{σελ.40}$$

3.21 Εξίσωση υπολογισμού της μιγαδικής μεταβλητής A

$$A = \frac{1}{\omega} R(s) \Big|_{s=\sigma \pm j\omega} \quad \text{σελ.41}$$

3.22 Εξίσωση υπολογισμού της μιγαδικής μεταβλητής A

$$A = A_1 + jA_2 = Me^{j\Phi} \quad \text{σελ.41}$$

3.23 Εξίσωση υπολογισμού A_1

$$A_1 = \text{Re}A \quad \text{σελ.41}$$

3.24 Εξίσωση υπολογισμού A_2

$$A_2 = \text{Im}A \quad \text{σελ.41}$$

3.25 Εξίσωση υπολογισμού M

$$M = |A| \quad \text{σελ.41}$$

3.26 Εξίσωση υπολογισμού Φ

$$\Phi = \angle A \quad \text{σελ.41}$$

3.27 Χρονική απόκριση $y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$ σελ.41

3.28 Διαφορική εξίσωση συστήματος 1^{ης} τάξης $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$ σελ.42

3.29 Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος 1^{ης} τάξης $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}$ σελ.42

3.30 Διαφορική εξίσωση συστήματος 2^{ης} τάξης

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad \text{σελ.45}$$

3.31 Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος 2^{ης} τάξης

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{σελ.45}$$

3.32 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ σελ.45

3.33 Ρίζες χαρακτηριστικού πολυώνυμου $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ σελ.45

3.34 Υπερύψωση $u = \frac{y_m - y_\infty}{y_m} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ σελ.54

3.35 Χρόνος κορυφής $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ σελ.54

3.36 Χρόνος ανύψωσης $T_r \cong \frac{1+2.5\zeta}{\omega_n}$ σελ.54

3.37 Χρόνος αποκατάστασης για απόκλιση $\varepsilon=\pm 5\%$ $T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ σελ.54

3.38 Χρόνος αποκατάστασης για απόκλιση $\varepsilon=\pm 2\%$ $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ σελ.54

3.39 Μόνιμο σφάλμα $e_\infty = U - y_\infty$ σελ.54

4.1 Εξίσωση κατάστασης $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$ σελ.61

4.2 Εξίσωση εξόδου $\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t)$ σελ.61

4.3 Εξίσωση για την εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από χώρο κατάστασης

$$G(s) = \underline{C}(s) (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}(s) + \underline{D}(s) \quad \text{σελ.62}$$

4.4 Εξίσωση κατάστασης $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t) + \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau)\underline{B}u(\tau)d\tau$ σελ.63

4.5 Πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t}$ ή $\underline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\}$ σελ.63

4.6 Εξίσωση κατάστασης για ελεύθερη απόκριση $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{x}(s) = \underline{\Phi}(s)\underline{x}_0(s)$ σελ.63

4.7 Εξίσωση κατάστασης για εξαναγκασμένη απόκριση

$$\underline{x}(t) = \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau)\underline{B}u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{x}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{B} \cdot U(s) \quad \text{σελ.64}$$

4.8 Υπολογισμός ιδιοτιμών $\det(\lambda\underline{I} - \underline{A}) = 0$ σελ.64

4.9 Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων $(\lambda\underline{I} - \underline{A})\underline{v} = 0$ σελ.64

4.10 Υπολογισμός πίνακα μετασχηματισμού $\underline{M} \quad \underline{M} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n]$ σελ.64

4.11 Πίνακας μετασχηματισμού $\underline{L} \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ σελ.64

4.12 Υπολογισμός πίνακα $\underline{L} \quad \underline{L} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{M}$ σελ.65

4.13 Υπολογισμός πίνακα μετάβασης $\underline{\Phi}(t)$ από ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{M}^{-1} \quad \text{σελ.65}$$

4.14 Κανονικός πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}_0(t)$

$$\underline{\Phi}_0(t) = e^{\underline{L}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{σελ.65}$$

4.15 Πίνακας \underline{L} για απλές ιδιοτιμές $\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ σελ.65

4.16 Κανονικός πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}_0(t)$ για απλές ιδιοτιμές $\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
σελ.65

4.17 Πίνακας \underline{L} για πολλαπλές ιδιοτιμές $\underline{L} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ σελ.65

4.18 Κανονικός πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}_0(t)$ για πολλαπλές ιδιοτιμές

$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ σελ.66

4.19 Πίνακας \underline{L} για μιγαδικές ιδιοτιμές $\underline{L} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ σελ. 66

4.20 Κανονικός πίνακας μετάβασης $\underline{\Phi}_0(t)$ για μιγαδικές ιδιοτιμές

$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos(\omega t) & -e^{\sigma t} \sin(\omega t) & 0 & \dots & 0 \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) & e^{\sigma t} \cos(\omega t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ σελ.66

4.21 Ελεγχιμότητα $P_c = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B} \quad \underline{A}^2\underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{B}]$ σελ.66

4.22 Παρατηρησιμότητα $P_o = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ σελ.67

5.1 Πληθυσμός ψαριών $\frac{dF}{dt} = F(t)(a - bF(t) - cS(t))$ σελ. 97

5.2 Πληθυσμός καρχαριών $\frac{dS}{dt} = S(t) \left(e - \lambda \frac{S(t)}{F(t)} \right)$ σελ. 97

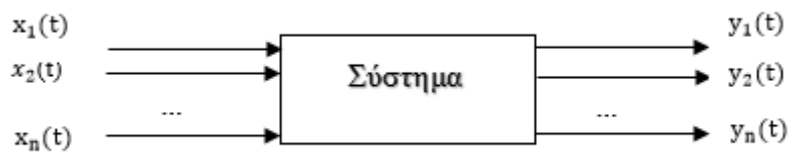
5.5 Σημείο ισορροπίας ψαριών $F_e(t) = \frac{a\lambda}{\lambda b + ce}$ σελ. 98

5.6 Σημείο ισορροπίας καρχαριών $S_e(t) = \frac{ea}{\lambda b + ce}$ σελ. 99

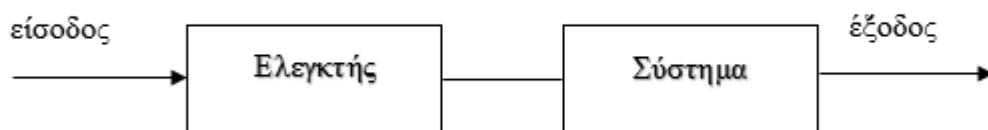
Εικόνες



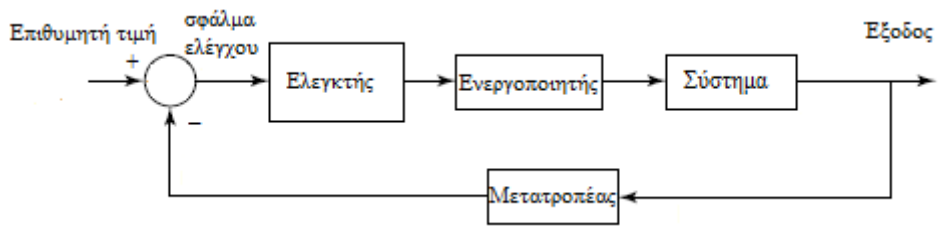
Εικόνα 1.1 Σύστημα σελ.3



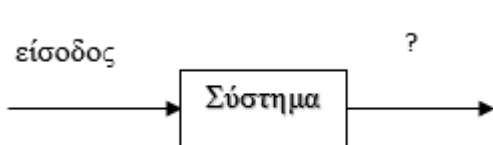
Εικόνα 1.2 Σύστημα πολλαπλών εισόδων και εξόδων σελ.4



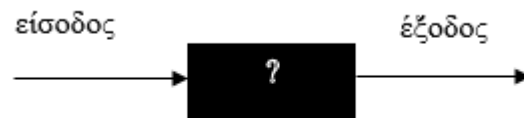
Εικόνα 1.3 Σύστημα ελεγκτή σε σειρά σελ.6



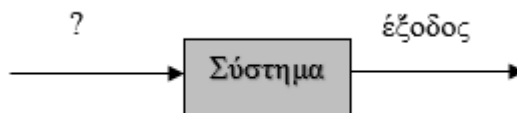
Εικόνα 1.4 Σύστημα με ανάδραση σελ.6



Εικόνα 1.5 Λευκό κουτί σελ.8



Εικόνα 1.6 Μαύρο κουτί σελ.8



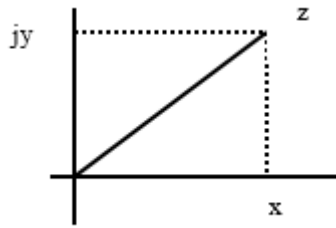
Εικόνα 1.7 Γκρι κουτί σελ.8



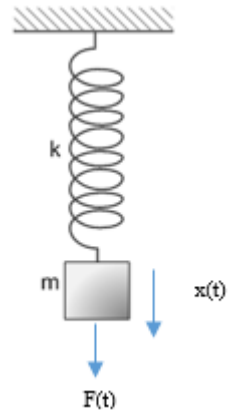
Εικόνα 1.8 Εξομίωση σελ.10



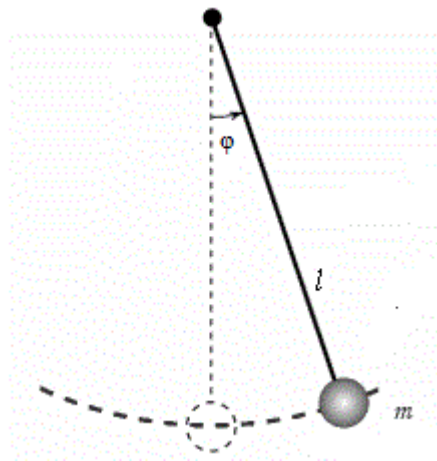
Εικόνα 1.9 Προσομοίωση σελ.10



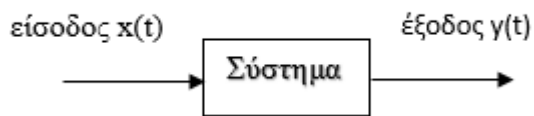
Εικόνα 2.1 Μιγαδικοί αριθμοί σε διάγραμμα x - y σελ.22



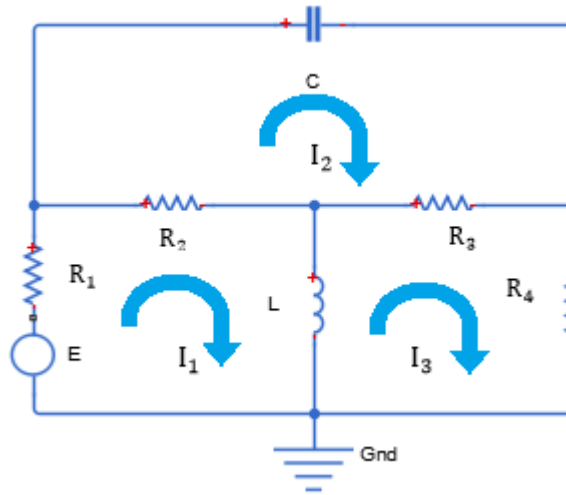
Εικόνα 2.2 Μάζα-ελατήριο σελ.25



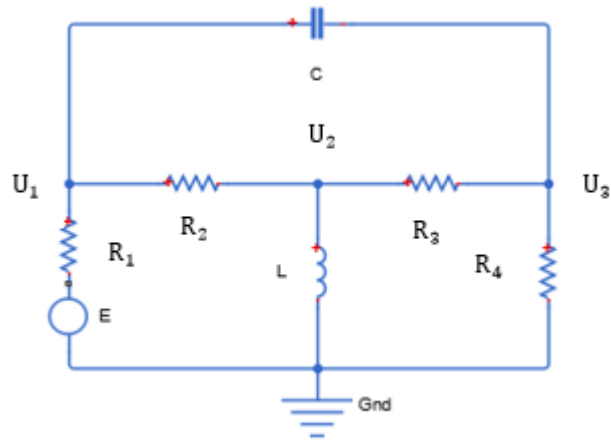
Εικόνα 2.3 Εκκρεμές σελ.26



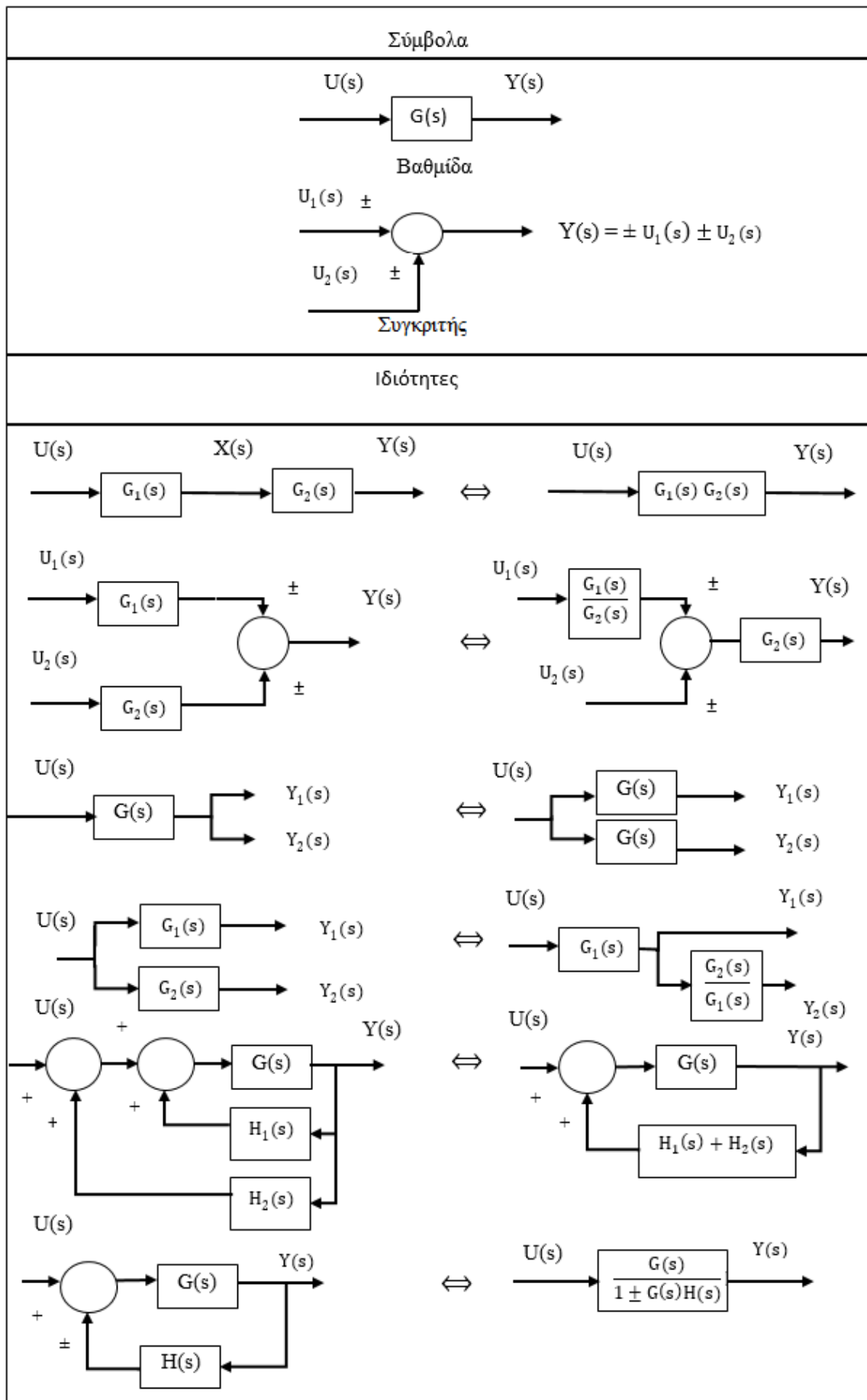
Εικόνα 3.1 Σύστημα σελ.27



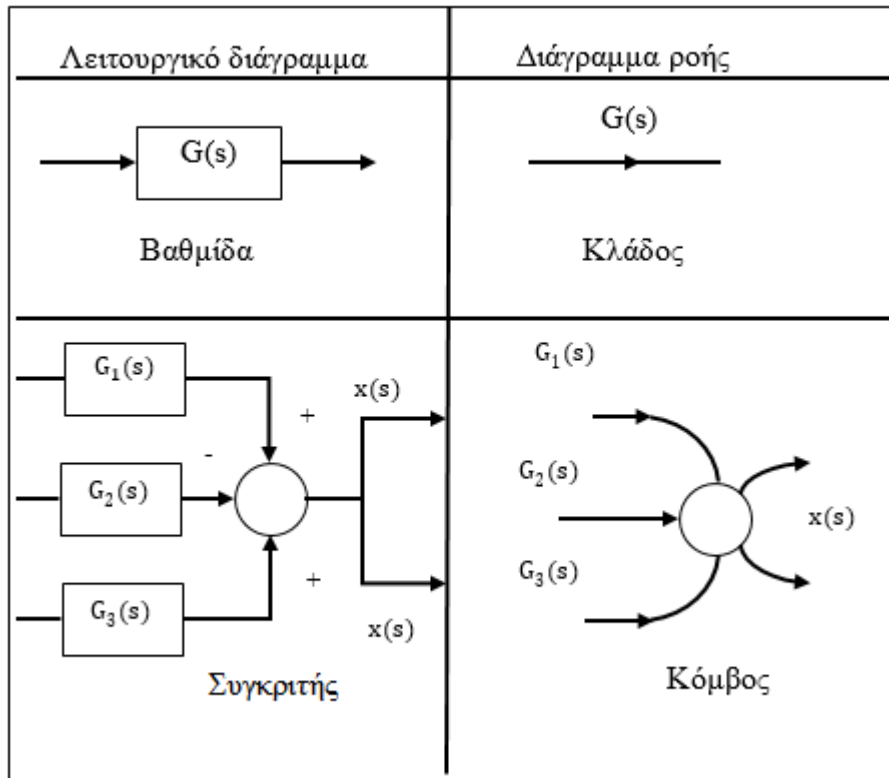
Εικόνα 3.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο εντάσεων βρόχων σελ.29



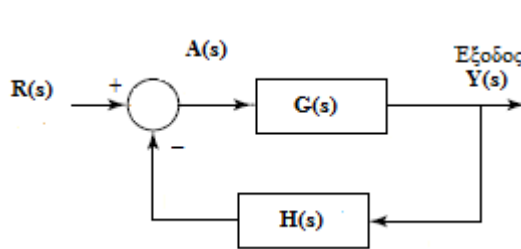
Εικόνα 3.3 Ηλεκτρικό κύκλωμα για τη μέθοδο τάσεων κάβων σελ.32



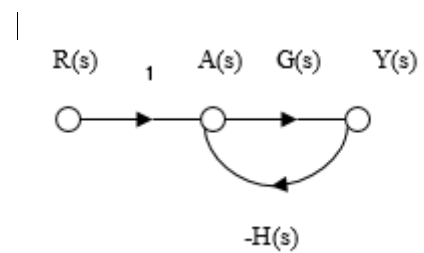
Εικόνα 3.4 Σύμβολα και τυπικές ιδιότητες λειτουργικών διαγραμμάτων σελ.36



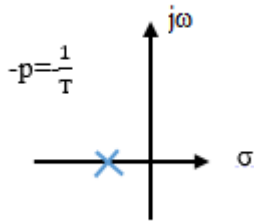
Εικόνα 3.5 Αντιστοιχία μεταξύ λειτουργικού διαγράμματος και διαγράμματος ροής σελ.37



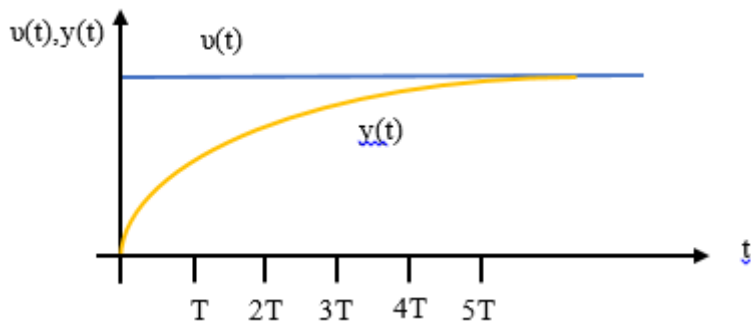
Εικόνα 3.6 Λειτουργικό διάγραμμα σελ.38



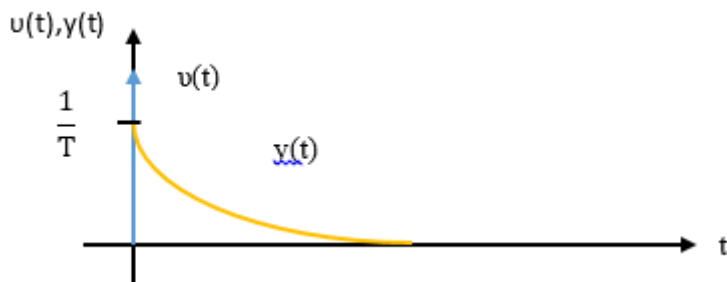
Εικόνα 3.7 Διάγραμμα ροής σελ.38



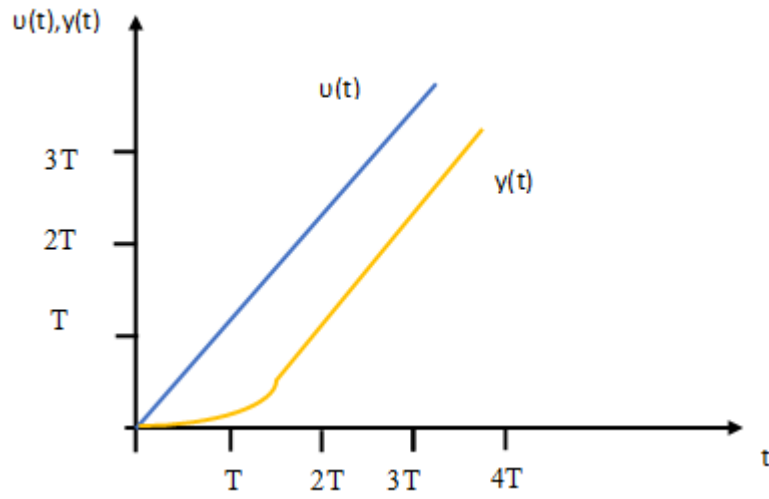
Εικόνα 3.8 Πολικό διάγραμμα συστήματος 1^{ης} τάξης με ένα πραγματικό πόλο σελ.42



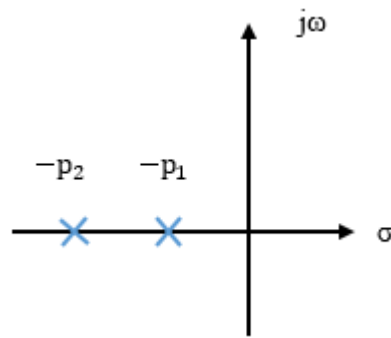
Εικόνα 3.9 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία βηματική είσοδο σελ.43



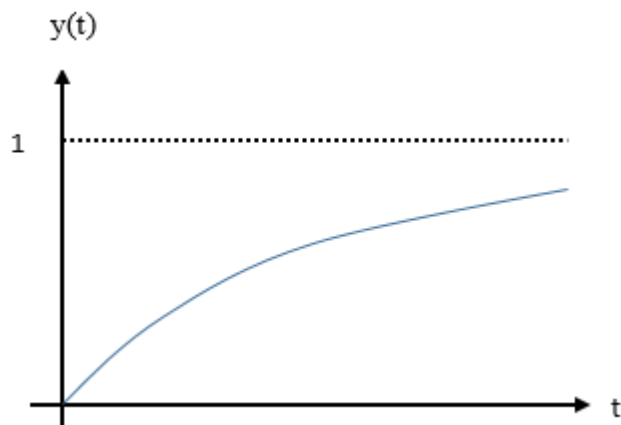
Εικόνα 3.10 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο σελ.44



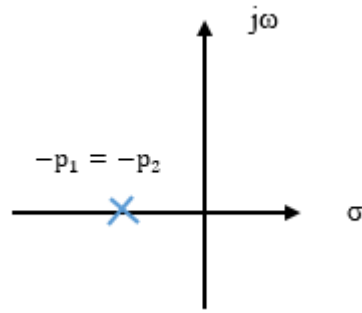
Εικόνα 3.11 Χρονική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης με μοναδιαία αναρρίχηση ως είσοδο σελ.45



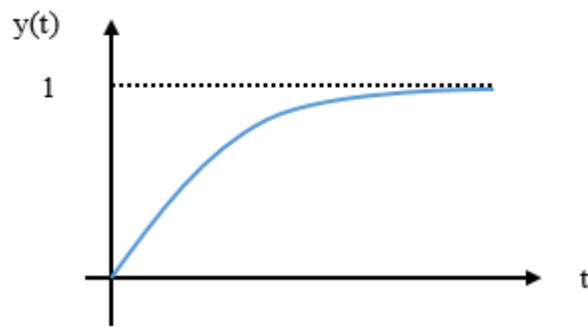
Εικόνα 3.12 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta > 1$ σελ.46



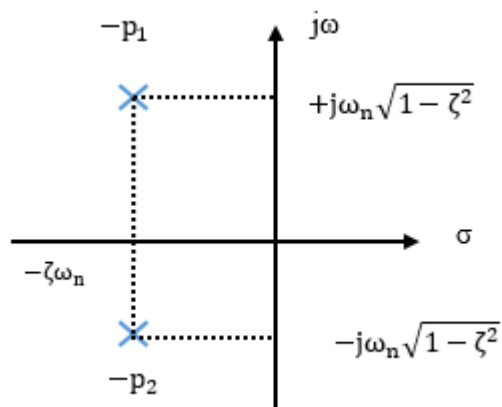
Εικόνα 3.13 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta > 1$ σελ.47



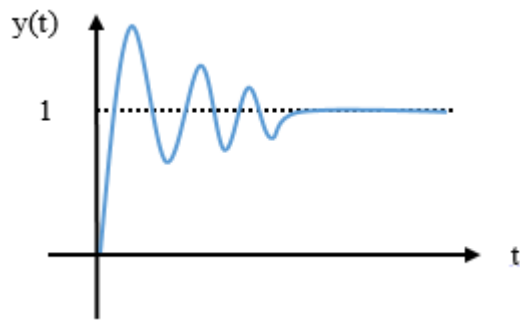
Εικόνα 3.14 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για ζ=1 σελ.48



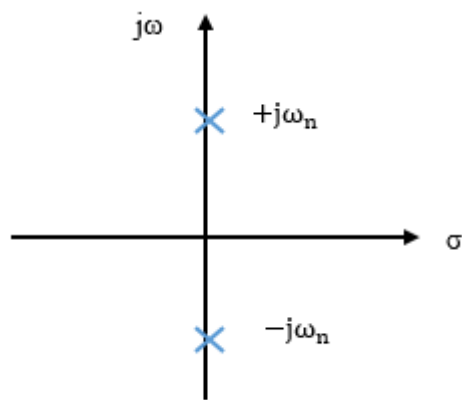
Εικόνα 3.15 Χρονική απόκριση συστήματος για ζ=1 σελ.49



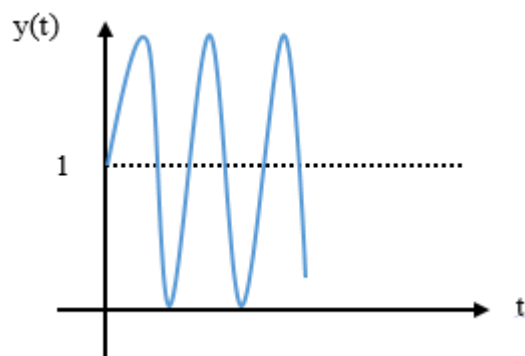
Εικόνα 3.16 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για ζ<1 σελ.49



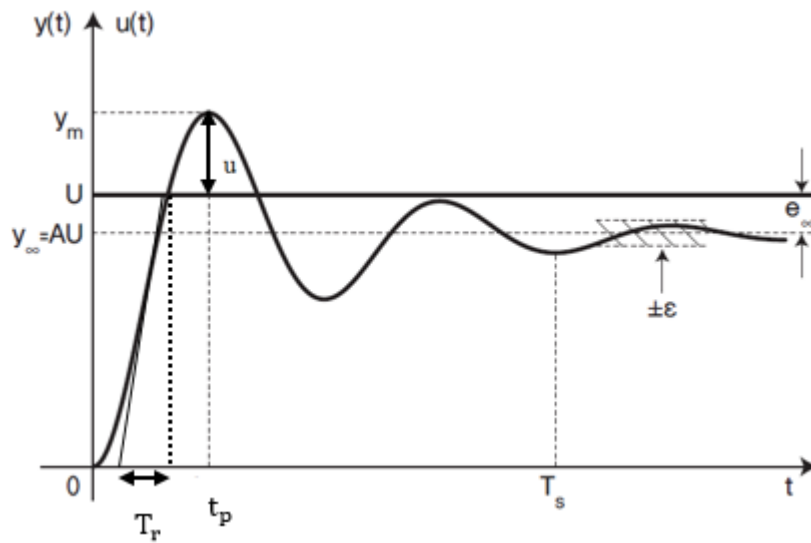
Εικόνα 3.17 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta < 1$ σελ.51



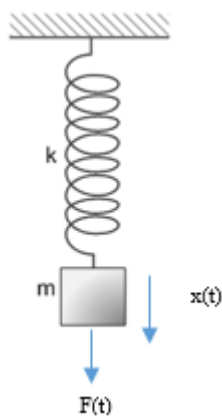
Εικόνα 3.18 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης για $\zeta = 0$ σελ.52



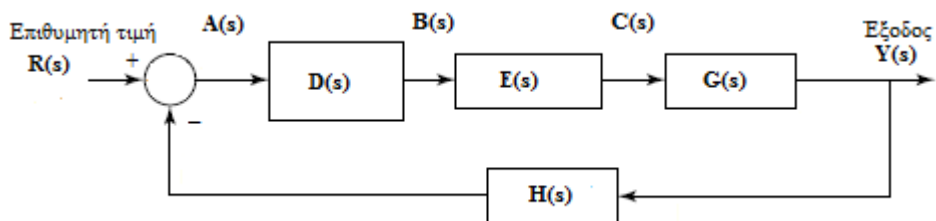
Εικόνα 3.19 Χρονική απόκριση συστήματος για $\zeta = 0$ σελ.53



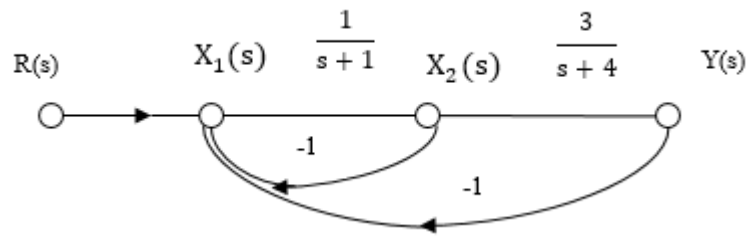
Εικόνα 3.20 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για ζ=0 σελ.58



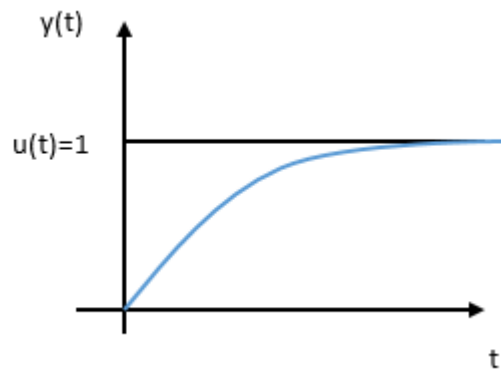
Εικόνα 3.21 Μάζα-ελατήριο σελ.55



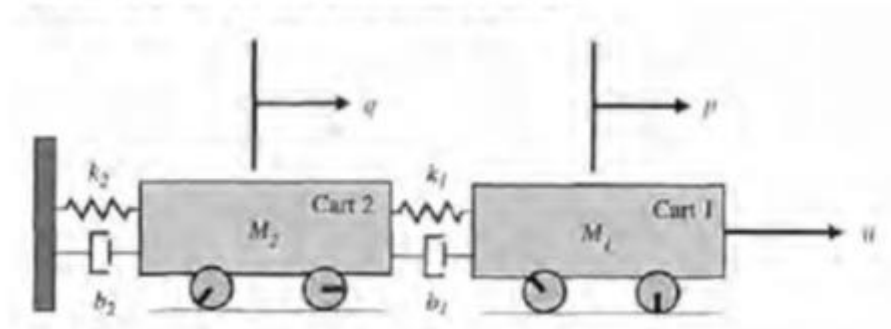
Εικόνα 3.22 Λειτουργικό διάγραμμα παραδείγματος σελ.56



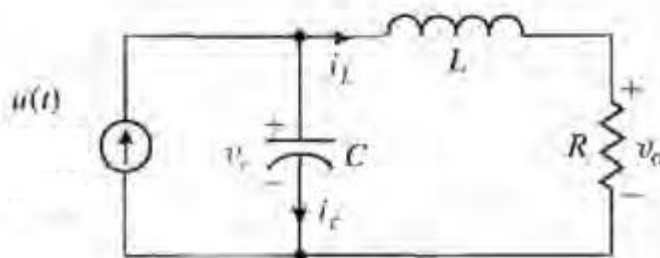
Εικόνα 3.23 Διάγραμμα ροής παραδείγματος σελ.57



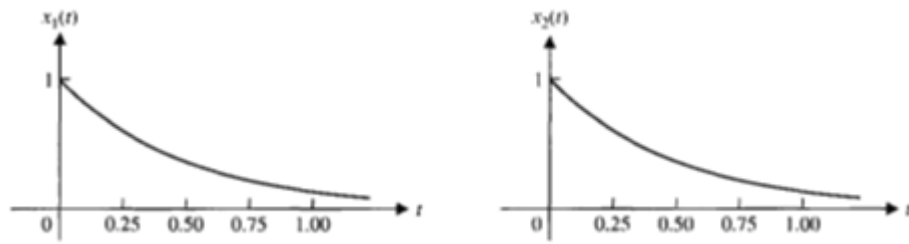
Εικόνα 3.24 Χρονική απόκριση παραδείγματος σελ.59



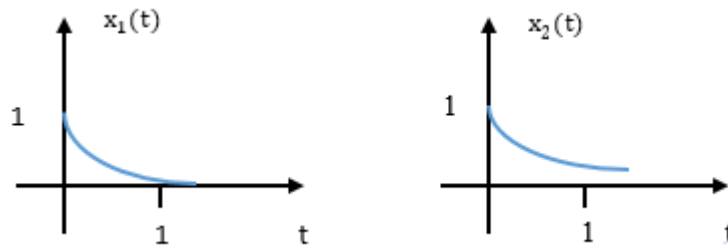
Εικόνα 4.1 Δύο κυλιόμενα βαγόνια σελ.67



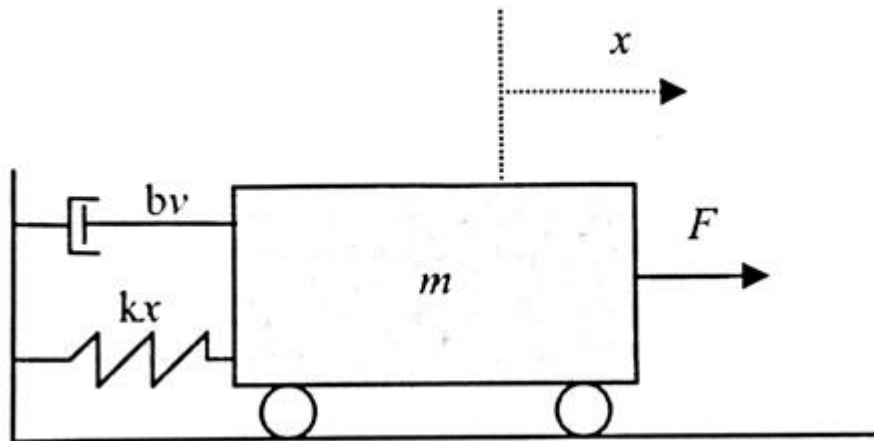
Εικόνα 4.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σελ.69



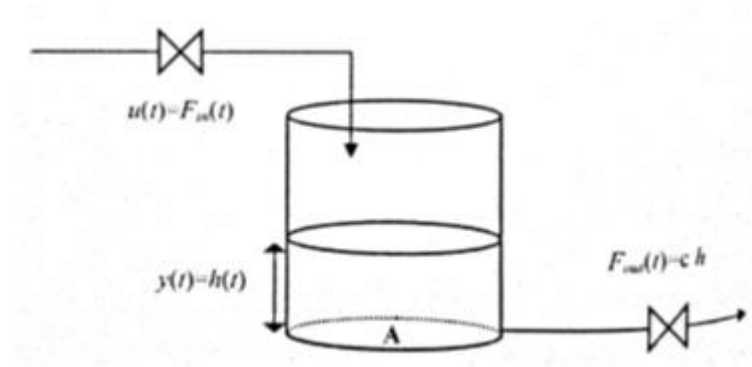
Εικόνα 4.3 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης $x_1(t)$ και $x_2(t)$ σελ.72



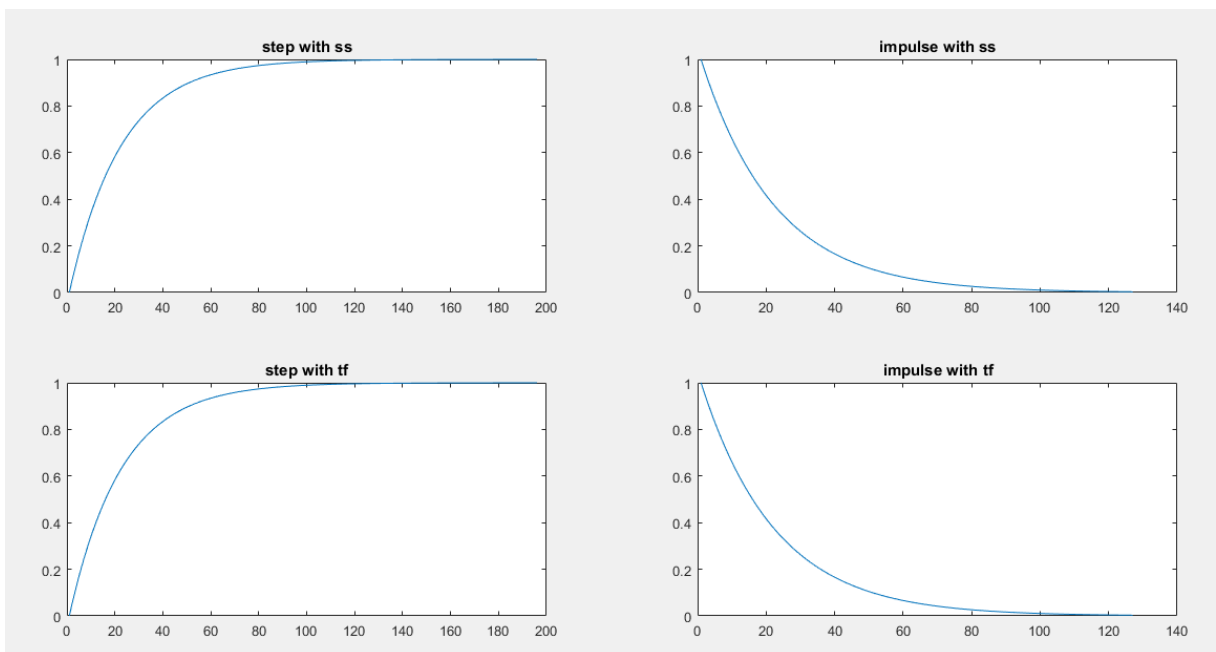
Εικόνα 4.4 Αποκρίσεις μεταβλητών κατάστασης σελ.74



Εικόνα 5.1 Μηχανικό σύστημα σελ.75



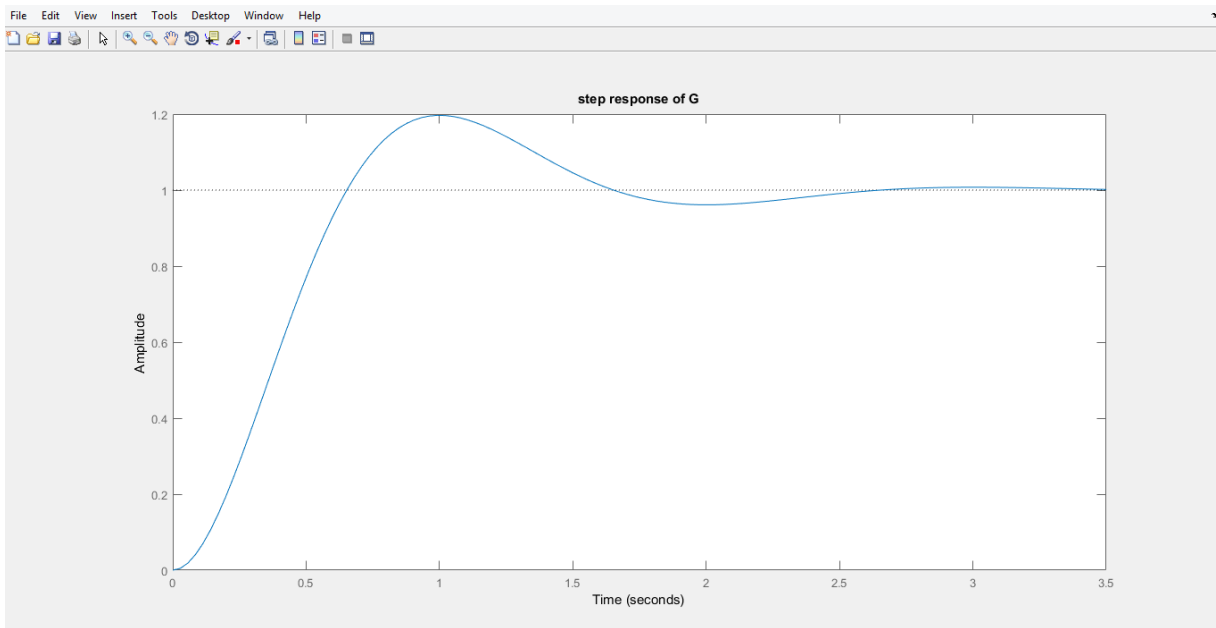
Εικόνα 5.2 Σύστημα στάθμης υγρού σελ.81



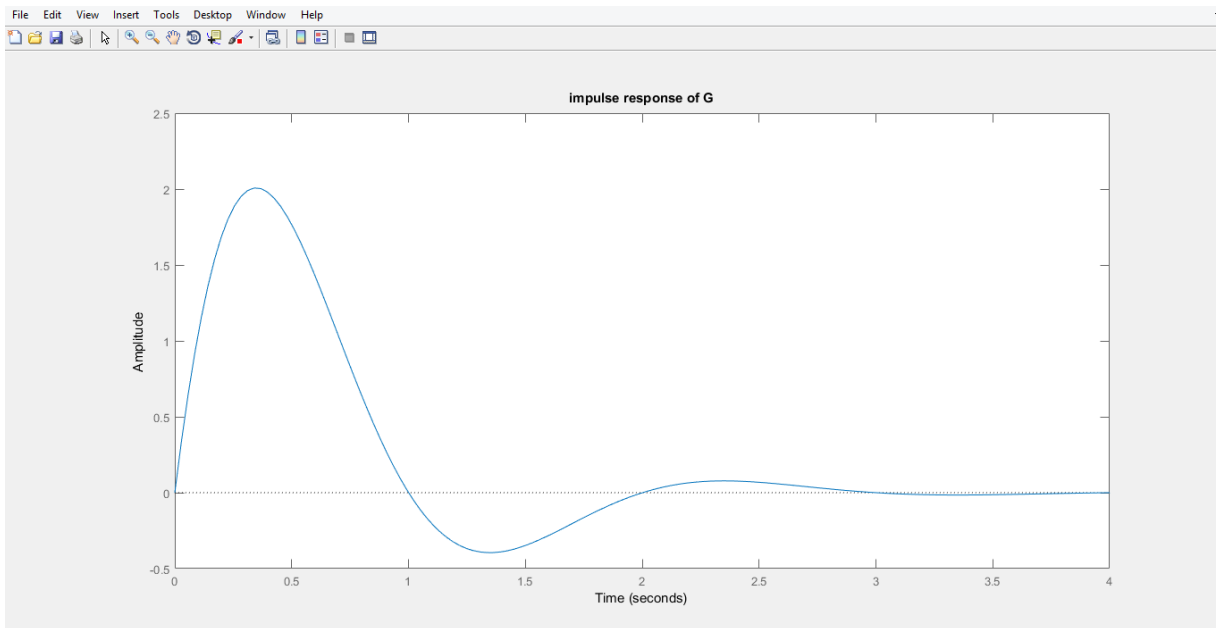
Εικόνα 5.3 Χρονικές αποκρίσεις συστήματος 1^{ης} τάξης με βηματική και κρουστική είσοδο σελ.83



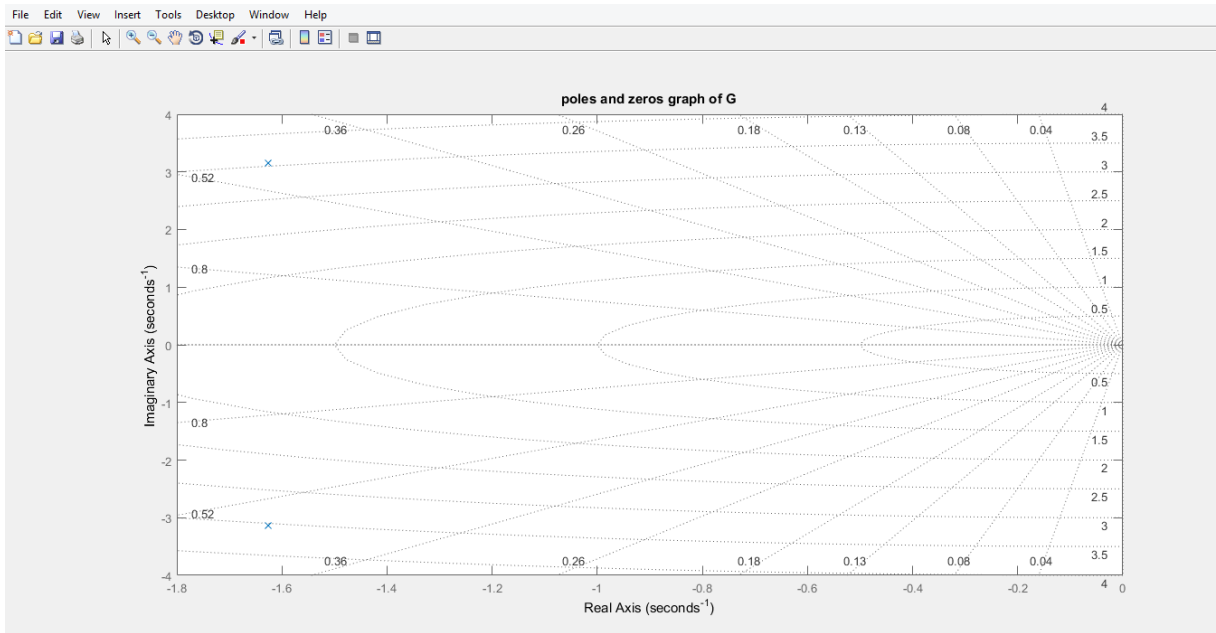
Εικόνα 5.4 Λειτουργικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης σελ.83



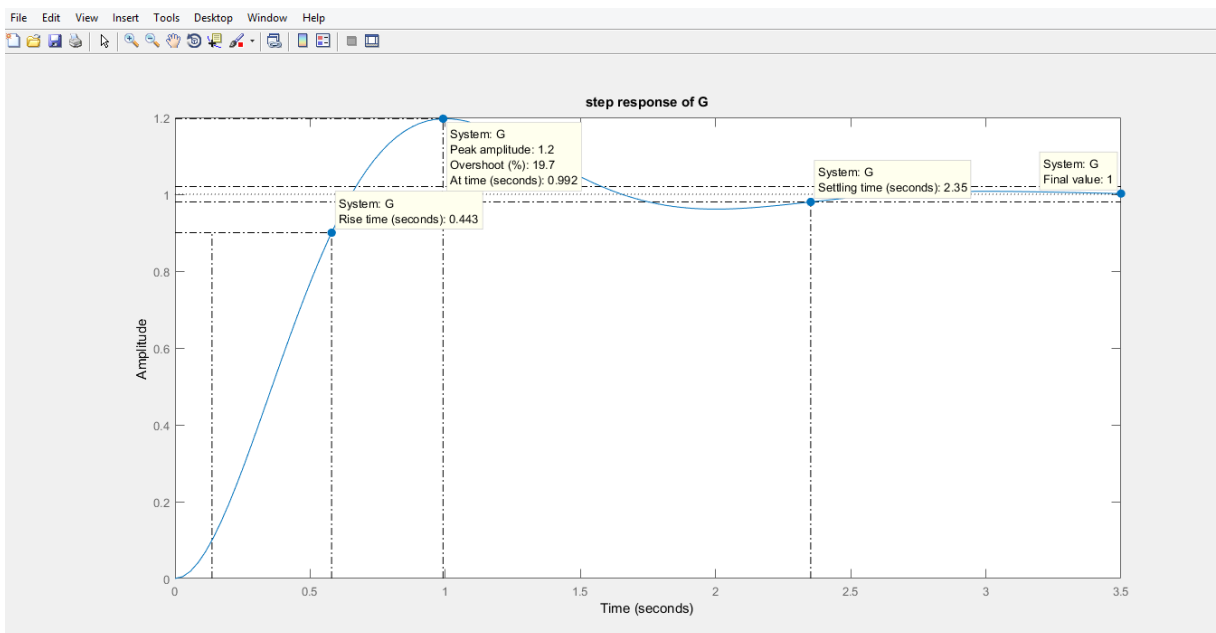
Εικόνα 5.5 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης με βηματική είσοδο σελ.85



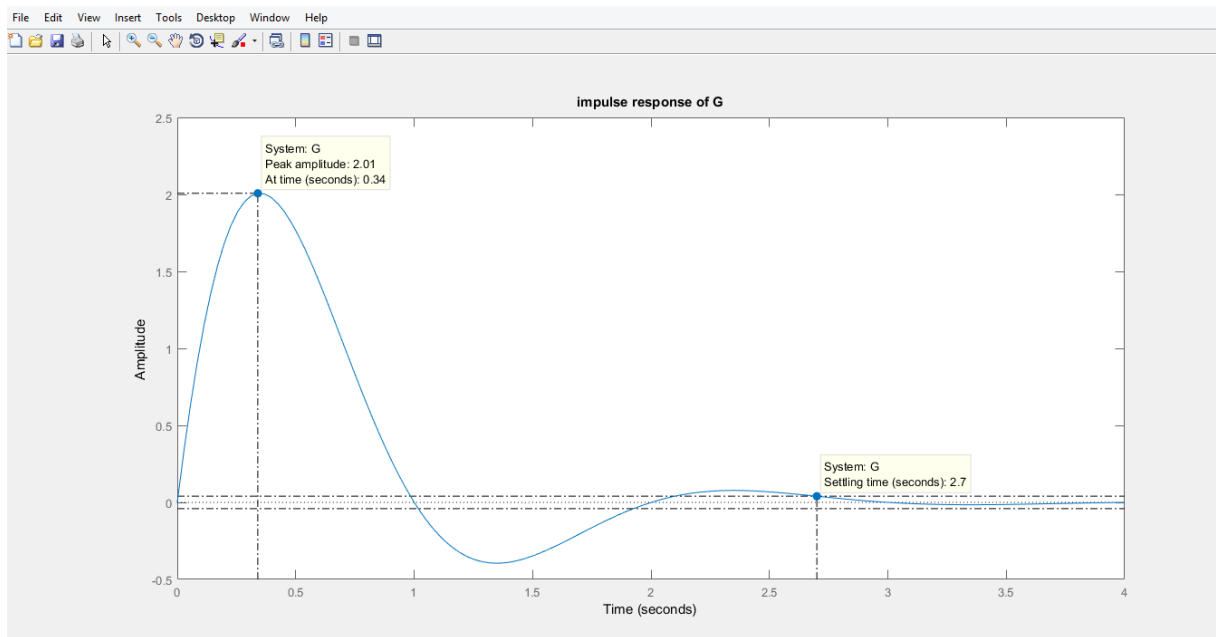
Εικόνα 5.6 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο σελ.85



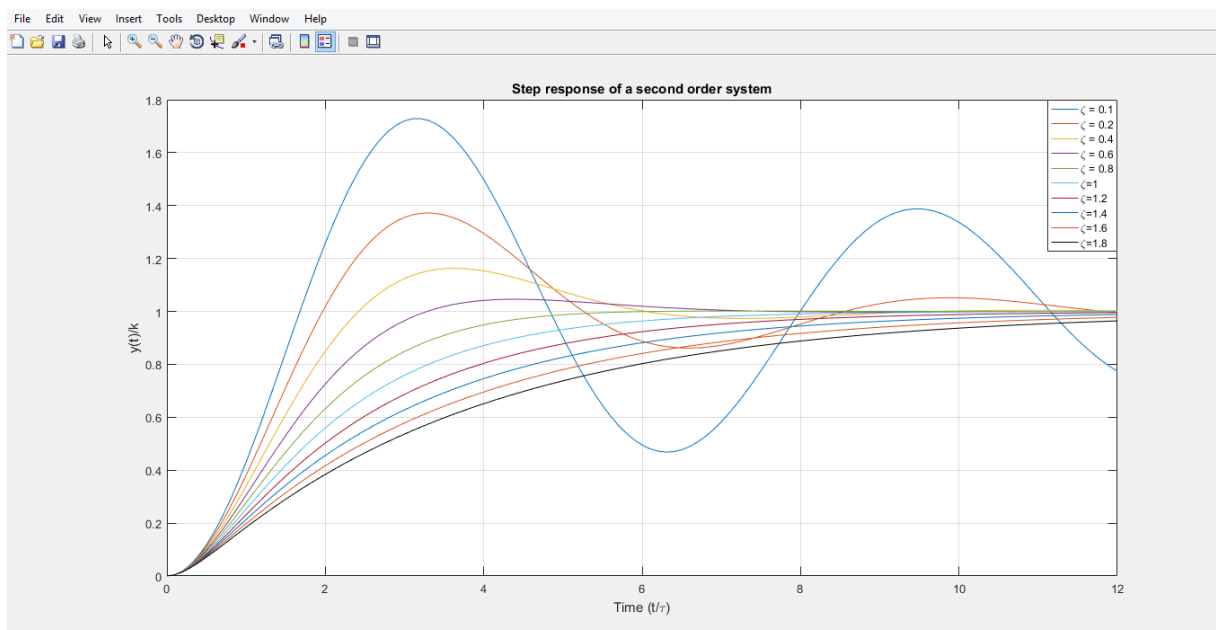
Εικόνα 5.7 Πολικό διάγραμμα συστήματος 2^{ης} τάξης σελ.86



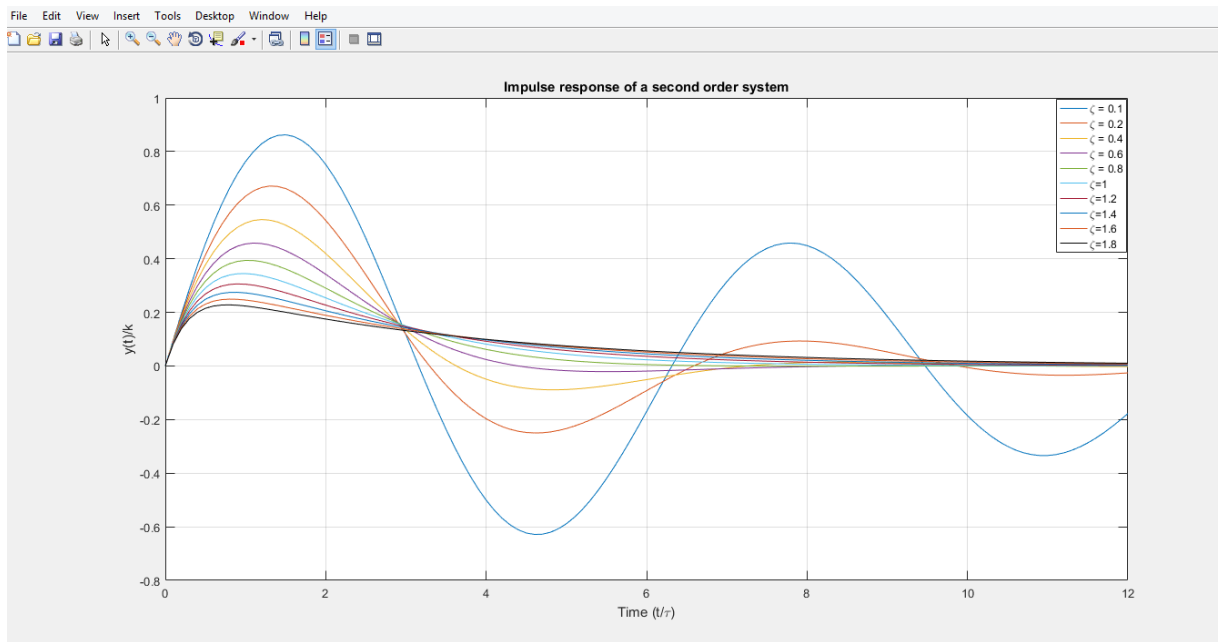
Εικόνα 5.8 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης με βηματική είσοδο σελ.87



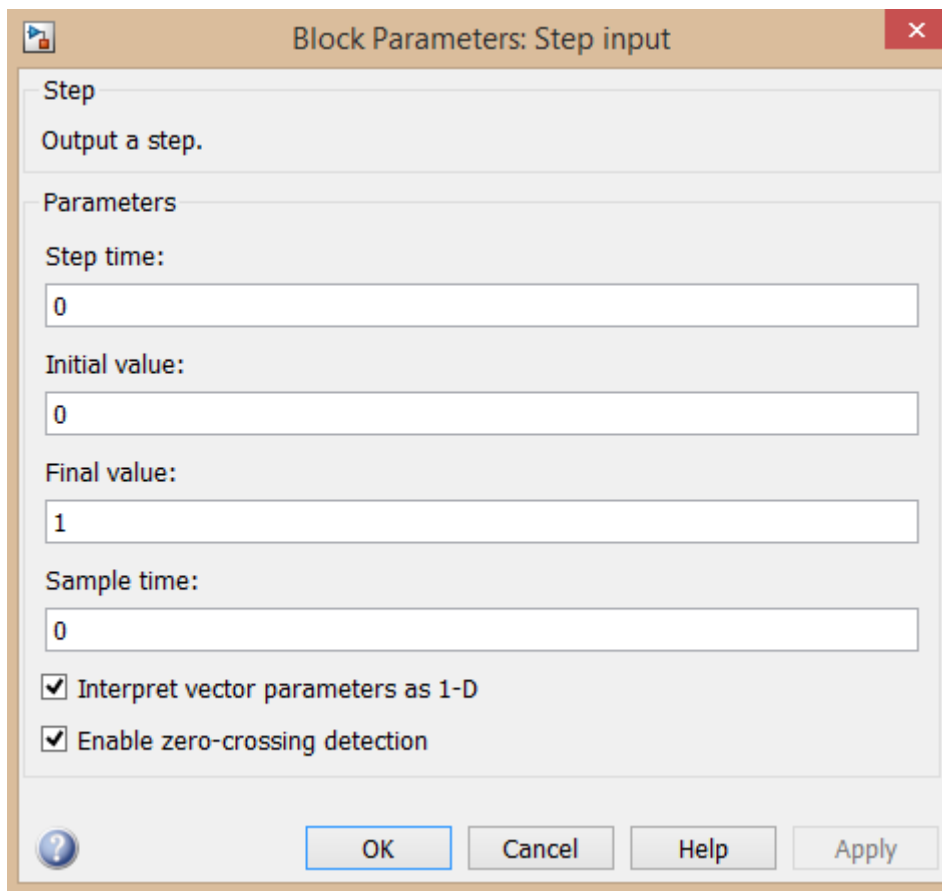
Εικόνα 5.9 Χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης συστήματος 2^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο σελ.88



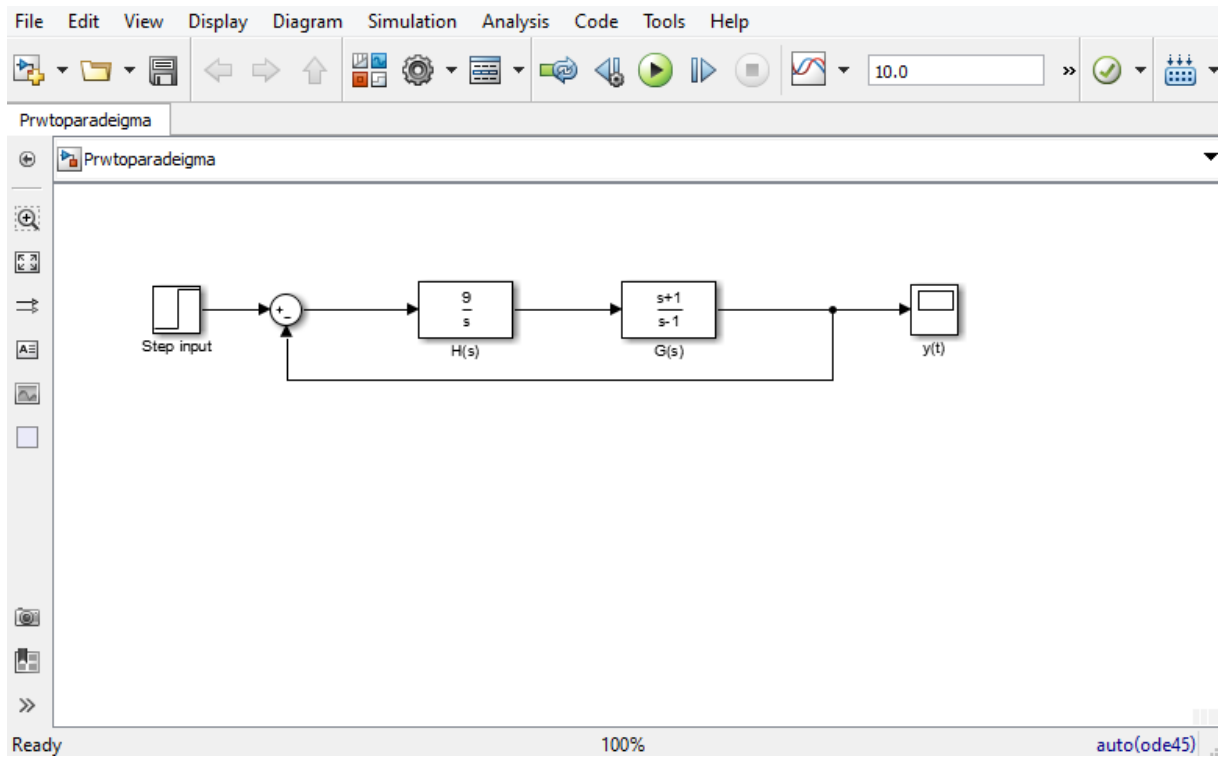
Εικόνα 5.10 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ με βηματική είσοδο σελ.89



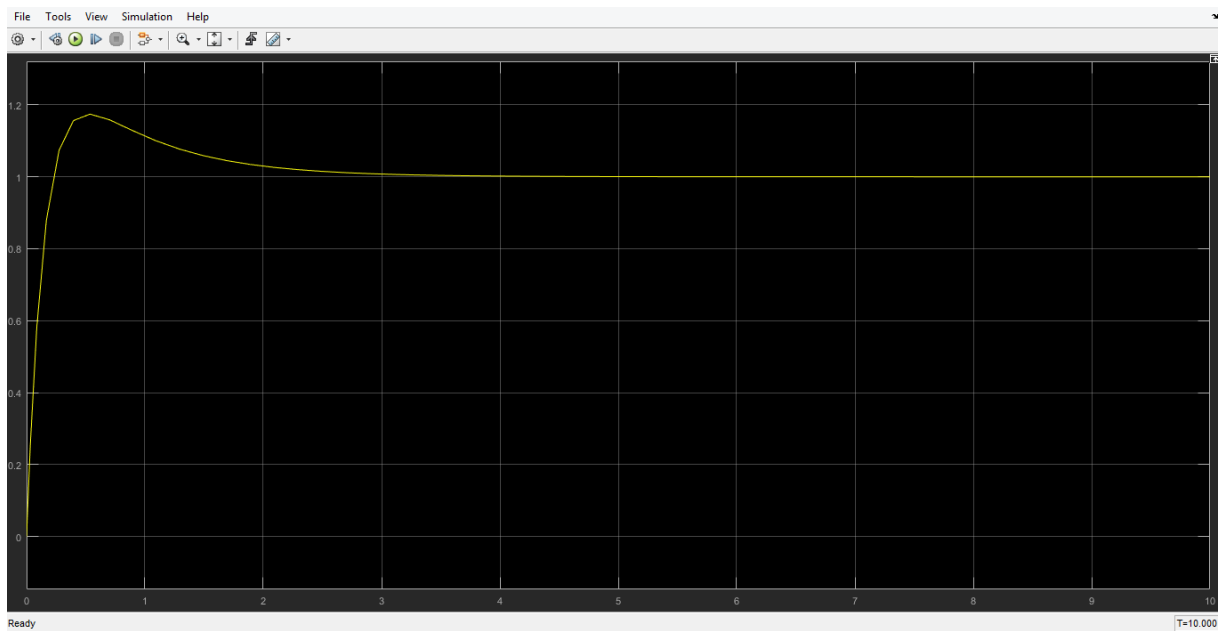
Εικόνα 5.11 Χρονική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης με κρουστική είσοδο σελ.91



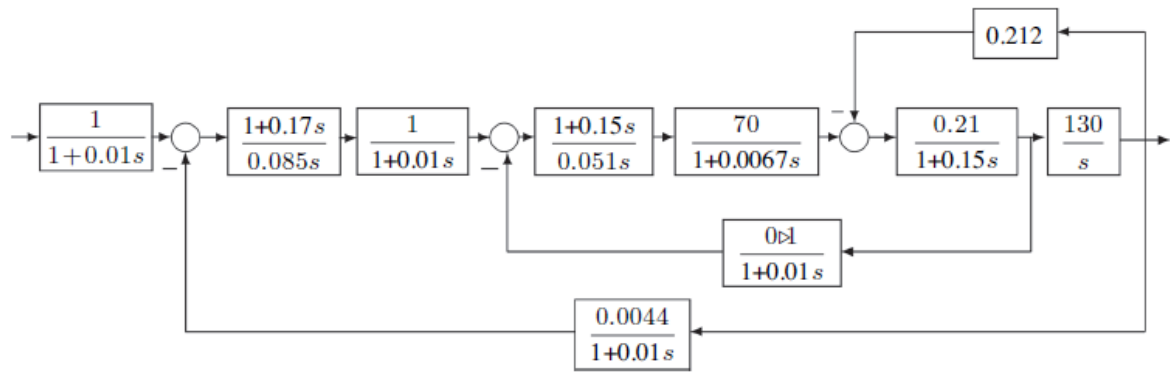
Εικόνα 5.12 Παράθυρο ορισμού παραμέτρων βηματικής εισόδου σελ.93



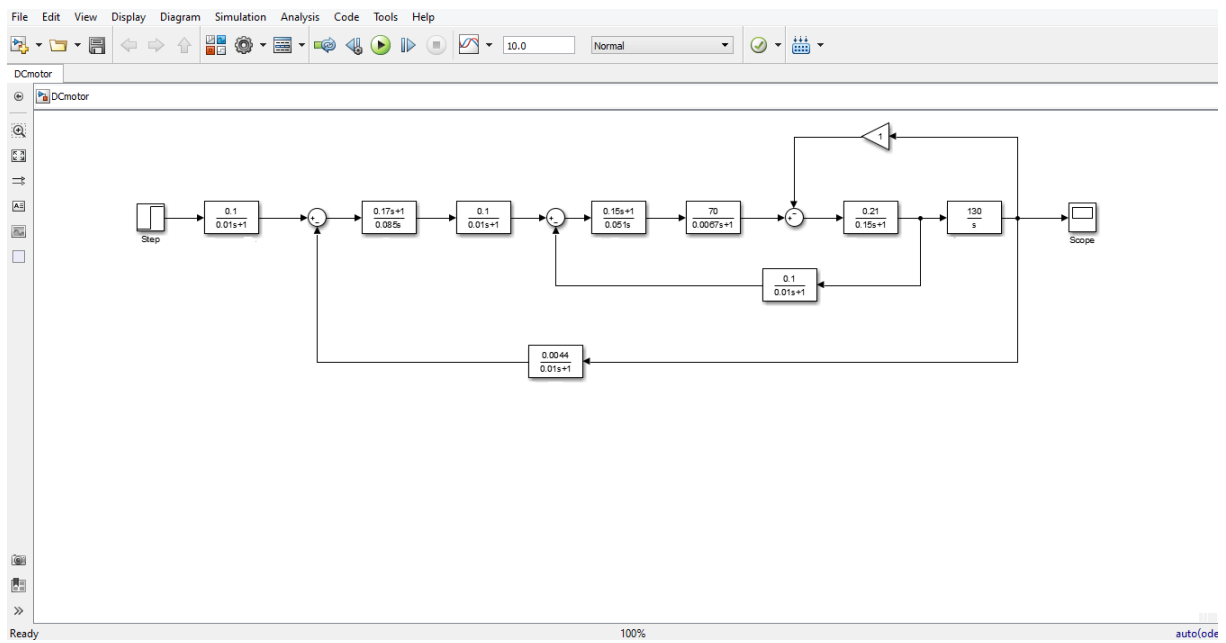
Εικόνα 5.13 Προσομοίωση συστήματος στο Simulation σελ.93



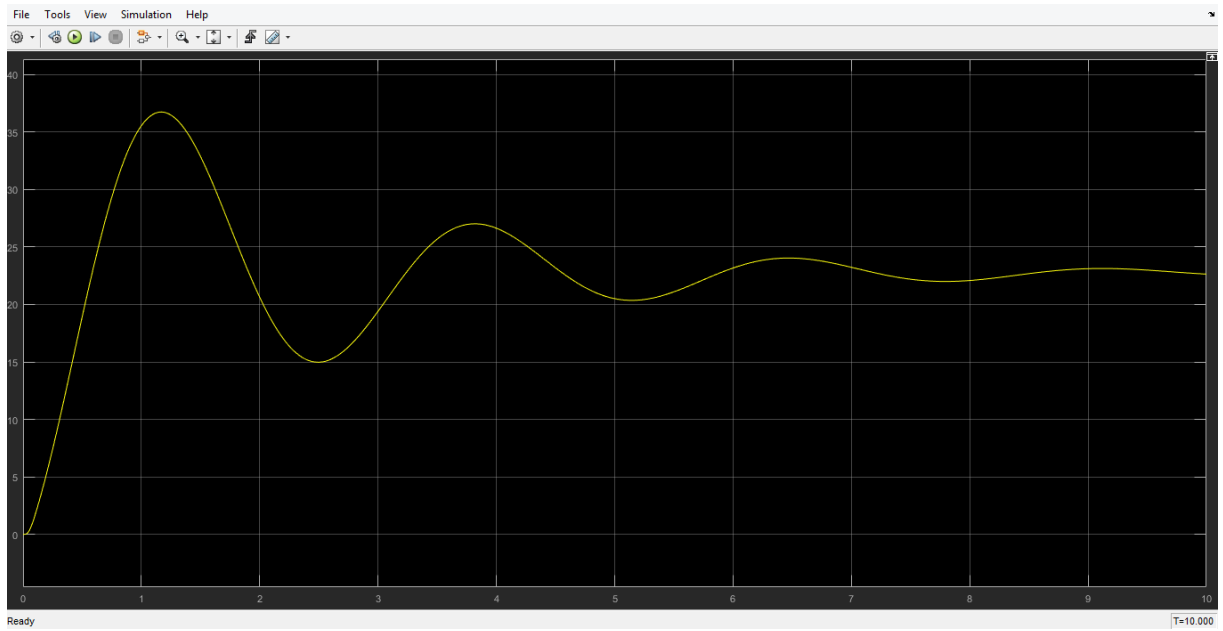
Εικόνα 5.14 Απόκριση εξόδου του συστήματος σελ.93



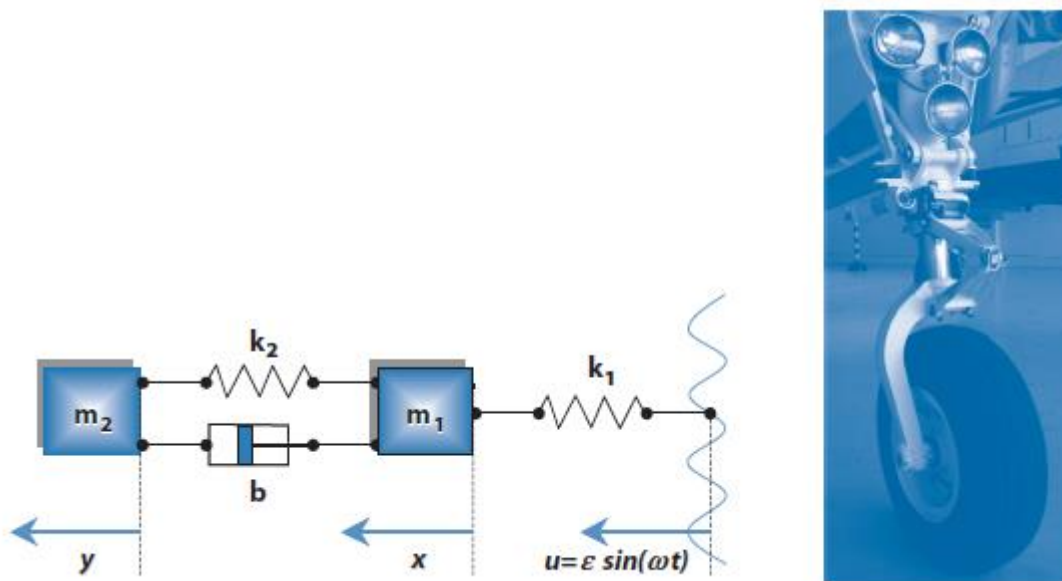
Εικόνα 5.15 Λειτουργικό διάγραμμα κινητήρα DC σελ.94



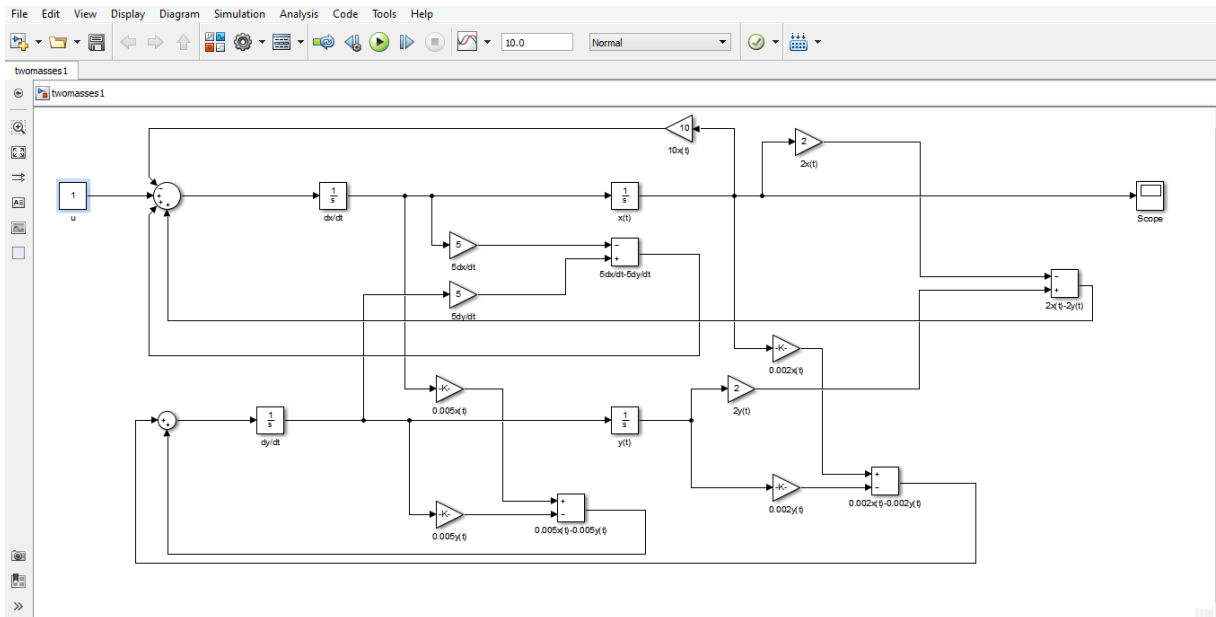
Εικόνα 5.16 Προσομοίωση του κινητήρα DC σελ.94



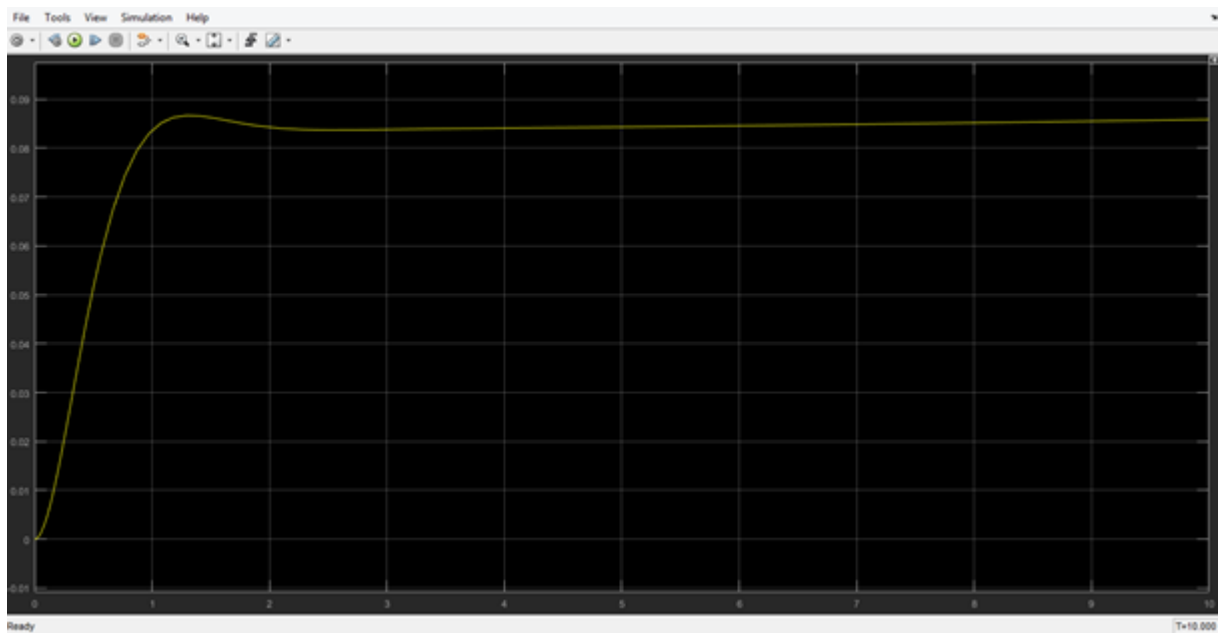
Εικόνα 5.17 Απόκριση εξόδου του κινητήρα DC σελ.95



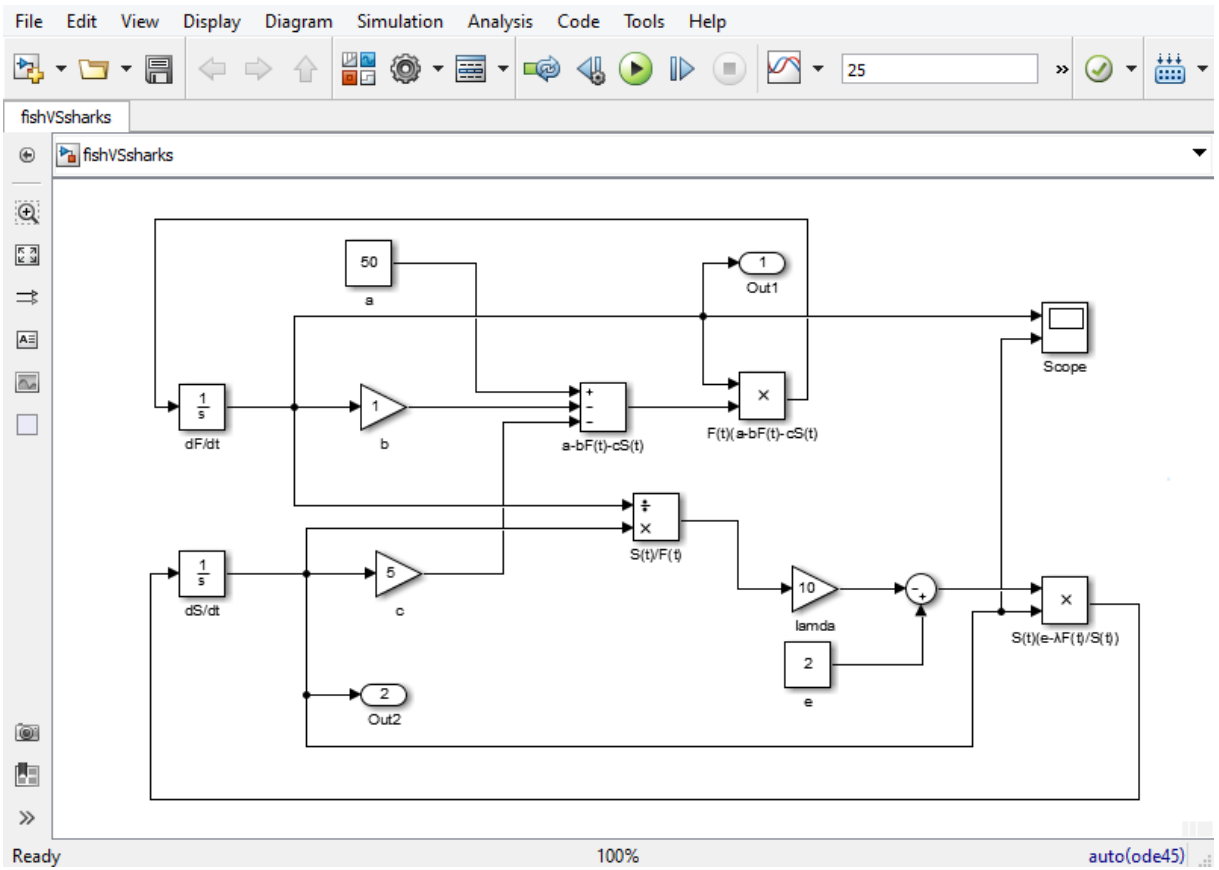
Εικόνα 5.18 Σύστημα αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα σελ.95



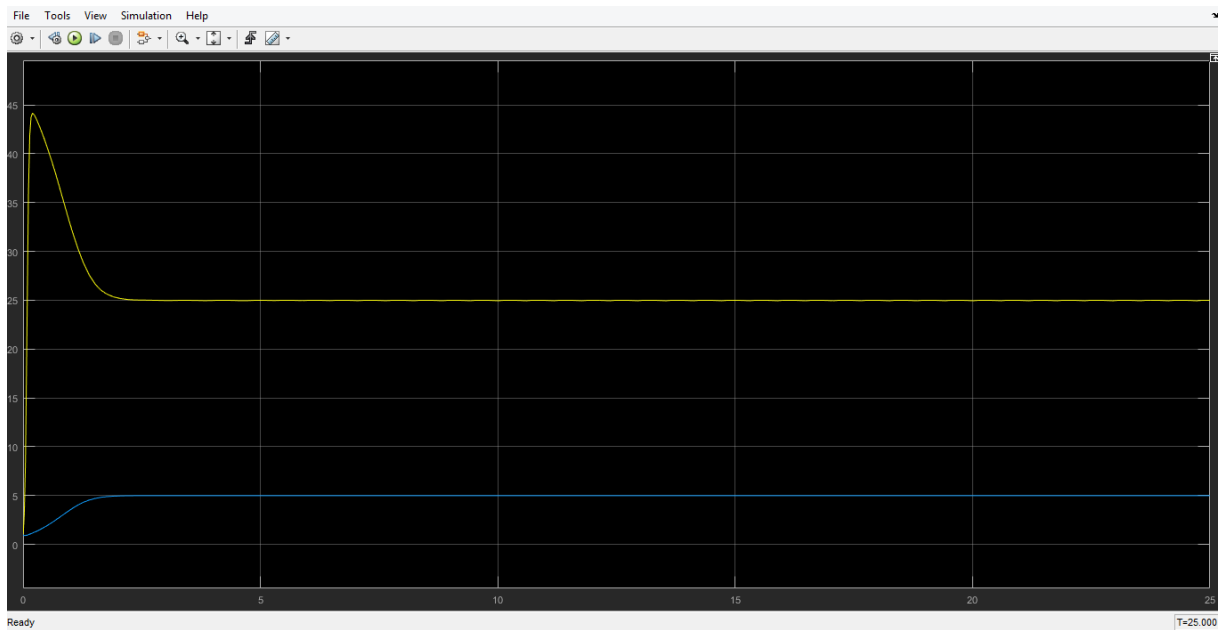
Εικόνα 5.19 Προσομοίωση συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα σελ.96



Εικόνα 5.20 Απόκριση εξόδου συστήματος αποτελούμενο από δύο μάζες, δύο ελατήρια και έναν αποσβεστήρα σελ. 97



Εικόνα 5.21 Προσομοίωση μοντέλου θηρευτής και θήραμα σελ.99



Εικόνα 5.22 Απόκριση εξόδου μοντέλου θηρευτής και θήραμα σελ.100

Πίνακες

Πίνακας 2.1 Βασικά φαινόμενα, βασικά μεγέθη και βασικοί νόμοι φυσικής σελ. 15

Φαινόμενο:	Μηχανικό	Περιστροφικό	Ηλεκτρικό	Μαγνητικό	Θερμικό	Υδραυλικό	
Μεγέθη:	1. Ποσοτικό μέγεθος χ	Γωνία περιστροφής φ	Ηλεκτρικό Φορτίο Q	Μαγνητική Ροή Φ	Θερμότητα Q	Όγκος ρευστού Q	
	1^η παράγωγος Ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Ηλεκτρική ένταση $i = \frac{dQ}{dt}$	Τάση $u = \frac{d\Phi}{dt}$	Παροχή θερμότητας $q = \frac{dQ}{dt}$	Παροχή Ρευστού $q = \frac{dQ}{dt}$	
	2^η παράγωγος Επιτάχυνση $\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	-	-	
	2. Ενεργειακό μέγεθος Δύναμη $F = \frac{dW}{dx}$	Ροπή $M = \frac{dW}{d\varphi}$	Ηλεκτρική τάση $u = \frac{dW}{dQ}$	Ένταση $\iota = \frac{dW}{d\Phi}$	Θερμοκρασία $\theta = \frac{dW}{dQ}$	Πίεση $p = \frac{dW}{dQ}$	
Νόμοι:	1. Ποσοτικός νόμος -	-	-	$\sum i = 0$ σε κόμβο	$\sum u = 0$ σε βρόχο	$\sum q = 0$ σε σύστημα	$\sum q = 0$ σε σύστημα
	2. Ενεργειακός νόμος $\sum F = 0$ σε σώμα	$\sum M = 0$ σε σώμα	$\sum u = 0$ σε βρόχο	$\sum i = 0$ σε κόμβο	-	$\sum p = 0$ σε επιφάνεια	
Υλικά στοιχεία:	1. Στοιχείο απώλειας ενέργειας Τριβή κίνησης $F = B v$	Τριβή περιστροφής $M = B \omega$	Ηλεκτρική αντίσταση $u = i R$	Αγωγιμότητα $i = \frac{1}{R} u$	Θερμική αντίσταση $\theta = R q$	Υδραυλική αντίσταση $p = R q$	
	2. Στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας Ελαστικότητα $F = Kx$ $= K \int v dt$	Ελαστικότητα $M = K\varphi$ $= K \int \omega dt$	Ηλεκτρική χωρητικότητα $u = \frac{Q}{C}$ $= \frac{1}{C} \int i dt$	Αυτεπαγωγή $i = \frac{1}{L} \Phi$ $= \frac{1}{L} \int u dt$	Θερμική χωρητικότητα $\theta = \frac{Q}{C}$	Υδραυλική χωρητικότητα $p = \frac{Q}{C}$	
	3. Στοιχείο απόδοσης ενέργειας Μάζα $F = M\gamma$ $= M \frac{du}{dt}$	Ροπή αδράνειας $M = J a = J \frac{d\omega}{dt}$	Ηλεκτρική αυτεπαγωγή $u = L \frac{di}{dt}$	Χωρητικότητα $i = C \frac{du}{dt}$	-	-	

Πίνακας 2.2 Γενικές πληροφορίες για τις ενέργειες φυσικών φαινομένων της εξίσωσης LaGrange σελ.17

Φαινόμενα:	Μηχανικό	Περιστροφικό	Ηλεκτρικό	Μαγνητικό	Θερμικό	Υδραυλικό
Γενικευμένη μεταβλητή χ	Μετατόπιση χ	Γωνία περιστροφής φ	Ηλεκτρικό φορτίο Q	Μαγνητική ροή Φ	Θερμότητα Q	Όγκος ρευστού Q
Γενικευμένη ταχύτητα $\dot{\chi}$	Ταχύτητα v	Γωνιακή ταχύτητα ω	Ηλεκτρική ένταση i	Τάση u	Παροχή θερμότητας q	Παροχή ρευστού q
Γενικευμένη δύναμη F	Δύναμη F	Ροπή M	Τάση u	Ένταση i	Θερμοκρασία θ	Πίεση p
Απώλειες ισχύος $D = D(\dot{\chi})$	$\frac{1}{2}Bv^2$	$\frac{1}{2}B\omega^2$	$\frac{1}{2}Ri^2$	$\frac{1}{2R}u^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$
Γενικευμένη δυναμική ενέργεια $V=V(x)$	$\frac{1}{2}Kx^2$	$\frac{1}{2}K\varphi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2L}\Phi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$
Γενικευμένη κινητική ενέργεια $J = J(x, \dot{x})$	$\frac{1}{2}Mv^2$	$\frac{1}{2}J\omega^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Cu^2$	-	-

Πίνακας 2.3 Γενικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace σελ23

Ιδιότητα	Επίπεδο t	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Επίπεδο s
Σταθερός συντελεστής	$ay(t)$		$aY(s)$
Άθροισμα	$y_1(t) + y_2(t)$		$Y_1(s) + Y_2(s)$
Πρώτη παράγωγος	$\frac{dy}{dt} = y(t)$		$sY(s) - y(0)$
Δεύτερη παράγωγος	$\frac{d^2y}{dt^2} = y(t)$		$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
n-οστή παράγωγος	$\frac{d^ny}{dt^n} = y^{(n)}(t)$		$s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$
Ολοκλήρωμα	$\int_0^t y(\tau) d\tau$		$\frac{1}{s}Y(s)$
Κλιμάκωση χρόνου	$y(\omega t)$		$\frac{1}{\omega}Y\left(\frac{s}{\omega}\right)$
Καθυστέρηση χρόνου	$y(t - T)$		$e^{-sT}Y(s)$
Εκθετική απόσβεση	$e^{-\sigma t}y(t)$		$Y(s + \sigma)$
Συνέλιξη	$\int_0^t y(t - \tau)x(\tau) d\tau$		$Y(s)X(s)$
Αρχική τιμή	$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t)$	=	$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$
Τελική τιμή	$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	=	$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$

Πίνακας 2.4 Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace σελ.24

Επίπεδο t	\mathcal{L} \rightarrow	Επίπεδο s
$\delta(t)$		1
1		$\frac{1}{s}$
t		$\frac{1}{s^2}$
t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\sigma t}$		$\frac{1}{s + \sigma}$
$te^{-\sigma t}$		$\frac{1}{(s+\sigma)^2}$
$\eta\mu\omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\eta\mu(\omega t + \varphi)$		$\frac{s\eta\mu\varphi + \omega\sigma\upsilon\nu\varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t}\eta\mu\omega t$		$\frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t}\sigma\upsilon\nu\omega t$		$\frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$